

# NUMERIČKA ANALIZA GIBANJA 1D NASUMIČNOG HODA

---

**Dragičević, Kristijan**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Physics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:160:149493>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-30**



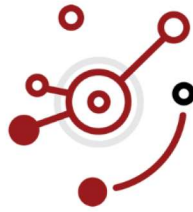
*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Department of Physics in Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**

**ODJEL ZA FIZIKU**



**KRISTIЈAN DRAGIČEVIĆ**

**NUMERIČKA ANALIZA GIBANJA 1D NASUMIČNOG  
HODA**

**Diplomski rad**

**Osijek, 2022.**

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**

**ODJEL ZA FIZIKU**



**KRISTIJAN DRAGIČEVIĆ**

**NUMERIČKA ANALIZA GIBANJA 1D NASUMIČNOG  
HODA**

**Diplomski rad**

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku radi stjecanja akademskog naziva magistar edukacije fizike i informatike

**Osijek, 2022.**

**Ovaj diplomski rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom mentora doc. dr. sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog diplomskog studija fizike i informatike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Uvod .....</b>                                   | <b>1</b>  |
| <b>1. Teorijska podloga .....</b>                   | <b>3</b>  |
| 1.1. Nasumičan hod u jednoj dimenziji.....          | 3         |
| 1.2. Srednje udaljenosti od početnog položaja ..... | 5         |
| 1.3. Pokazni primjeri simulacije .....              | 9         |
| 1.4. Jednadžba difuzije .....                       | 12        |
| <b>2. Simulacija i analiza rezultata .....</b>      | <b>16</b> |
| <b>3. Zaključak.....</b>                            | <b>22</b> |
| <b>4. Literatura .....</b>                          | <b>23</b> |
| 4.1. Mrežne stranice .....                          | 23        |
| <b>5. Životopis .....</b>                           | <b>24</b> |
| <b>6. Dodatak .....</b>                             | <b>25</b> |
| 6.1. Računalni kod.....                             | 25        |

# NUMERIČKA ANALIZA GIBANJA 1D NASUMIČNOG HODA

**KRISTIJAN DRAGIČEVIĆ**

## **Sažetak**

Kod promatranja raznih fizičkih sustava i procesa s kojima se susrećemo i koji nas okružuju, često postoji težnja za korištenjem determinističkog načina razmatranja istih, za pretpostaviti je zato što je „lakše“ ili jednostavnije približiti si takve slučajeve. No, kako bi ostali dosljedni, treba prihvatiti kako u se u promatranjima stvarnih procesa i sustava zapravo radi o promatranju iznimno velikih brojeva, često raznovrsnih čestica ili elemenata sustava, koji se na najmanjim razinama svaki ponašaju na određeni način. Kako bismo ih mogli promatrati i opisivati na način koji ima fizičkog smisla, nužno je koristiti se stohastičkim metodama i modelima. U ovome radu na primjeru nasumičnog hoda u jednoj dimenziji prikazana je upravo poveznica između determinističkog i stohastičkog pristupa razmatranjima.

(28 stranica, 10 slika, 1 dodatak)

**Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku**

**Ključne riječi:** Determinističko / stohastičko / nasumični hod / difuzija / simulacija

**Mentor:** doc. dr. sc. Zvonko Glumac

**Ocjenjivači:**

**Rad prihvaćen:**

# NUMERICAL ANALYSIS OF MOVEMENT OF 1D RANDOM WALK

**KRISTIЈAN DRAGIČEVIĆ**

## **Abstract**

When observing various physical systems and processes we encounter regularly and which surround us, there is a tendency to use a deterministic approach to such observations, presumably because it is „easier“ or less complicated to draw near such cases. But, in order to remain consistent, we should accept that in observing realistic processes and systems, we come to encompass extremely large numbers of often very diverse particles or system elements, all of which act in a specific way on the smallest scales. If we are to observe and describe such systems in a manner that has physical sense, it is necessary to apply stochastic methods and models. In this paper, an example of random walks in one dimension is used precisely to demonstrate the connection between the deterministic and stochastic approach.

(28 pages, 10 figures, 1 appendix)

**Thesis deposited in Department of Physics library**

**Keywords:** Deterministic / stochastic / random walk / diffusion / simulation

**Supervisor:** Zvonko Glumac, Ph. D., Assistant professor

**Reviewers:**

**Thesis accepted:**

## Uvod

Kada se spomene fizika, obično se svi prisjete svojih mlađih dana kada su, u jednom ili drugom obliku, pod vodstvom svojih učitelja i nastavnika bili suočeni sa osnovnim načelima fizike kao znanosti i svega onoga iza čega ona stoji. Neki će se također prisjetiti kako su upravo tijekom tih razdoblja po prvi puta upoznati sa radovima i istraživanjima nekih od najvećih umova ljudske prošlosti, barem u osnovnim oblicima prilagođenim vremenu i „ciljanoj publici“. Upravo takva razmatranja koja se poučavaju i približavaju iznimno velikom dijelu opće populacije, u fizičkom smislu, opisuju stanja, pojave i procese koje susrećemo svakodnevno, bez iznimke, kao što su npr. sustavi tijela ili čestica, odnosno gibanje tijela ili čestica. Poznato je kako su za npr. opisivanje gibanja klasičnih, mehaničkih sustava čestica potrebna rješenja Newtonovih jednadžbi gibanja uz poznavanje početnih uvjeta na položaj i brzinu čestica. Slična načela preciznog određivanja promatranih sustava javljaju se i u mnogim drugim granama fizike. Ono što je zajedničko takvim sustavima je upravo činjenica da se gibanje čestica u njima može točno odrediti i opisati rješavanjem diferencijalnih jednadžbi ovisnih o promatranome sustavu, uz pripadne početne ili rubne uvjete. Takvi se sustavi nazivaju **deterministički** sustavi, a ono što ih čini specifičnima je mogućnost potpuno sigurnog određivanja, odnosno predviđanja stanja sustava u bilo kojem trenutku, naravno uz uvjet da su matematički model i početni uvjeti poznati.

Nasuprot „sigurnim“ determinističkim sustavima javlja se drugačiji oblik sustava koji su zapravo jedan od predmeta razmatranja u ovome radu, a to su sustavi u kojima „nesigurnost“ i nasumičnost kao osnovno svojstvo igraju glavnu ulogu. Neovisno o tome radi li se o nasumičnosti smjerova gibanja čestica, prostornom rasporedu čestica ili bilo kojem drugom svojstvu, takve sustave ili procese nazivamo nasumičnim ili **stohastičkim**. Jedan od razloga zbog kojih se javila potreba za ne-determinističkim promatranjem su slučajevi složenih sustava ili procesa, sa iznimno velikim brojem čestica. U razmatranjima takvih sustava i procesa praktički je nemoguće pratiti gibanje svake pojedine čestice na temelju njihovih jednadžba gibanja i početnih uvjeta, čak i ako su oni poznati. Zbog toga se takvim problemima pristupa statistički, gdje se traže odgovori na pitanja kao što su npr.: koliko je vremena potrebno da se određeni proces ili segment procesa izvrši, kolike su vjerojatnosti da će proces rezultirati u nekome stanju, i slično.

Jedan od klasičnih primjera stohastičkog problema je difuzija, odnosno problem miješanja fluida, koji se radi jednostavnosti za početak može ograničiti na samo dva fluida. Obično se u ovakvim slučajevima uzimaju slikoviti primjeri poput miješanja kapljica mlijeka u kavu ili tinte u vodi, pa stoga promotrimo upravo slučaj miješanja mlijeka u kavu gdje se u središte šalice kave



nježno i bez miješanja postavi kapljica mlijeka. Uz pretpostavku da nema vanjskog ometanja promatranog sustava, nakon određenog vremena bijela će se masa mlijeka spontano početi miješati, odnosno širiti kroz šalicu, te će na posljetku nastati jednolika smjesa približno smeđe boje. Ako bi se opisani proces promatrao na mikroskopskoj razini, moglo bi se najprije primijetiti kako se oba fluida sastoje od velikog broja čestica (radi jednostavnosti nazovimo ih česticama kave i česticama mlijeka). Kada bismo bili u mogućnosti pratiti gibanje samo jedne određene čestice mlijeka kroz prostor ispunjen česticama kave i mlijeka, uočili bismo da je njezina putanja vrlo složena. U skladu sa prvim Newtonovim postulatom, ona bi se tijekom vrlo kratkog vremena gibala pravocrtno stalnom brzinom, sve dok ne dođe do sudara sa nekom od susjednih čestica mlijeka ili kave, nakon čega dolazi do trenutne promjene iznosa i smjera brzine, te se ponovno giba pravocrtno do sljedećeg sudara, itd. Dopusti li se ovome procesu da se odvija dovoljno vremena, moglo bi se uočiti kako čak i bez vanjskih utjecaja, nakon određenog vremena nastaje jednolika smjesa fluida, u ovome slučaju mješavina kave i mlijeka smeđe boje. [2]

U takvom slučaju naš bi zadatak bio pronaći smislen i koristan teorijski opis gibanja čestica u sustavu. Kao što je i ranije spomenuto, svi ovi procesi sudara čestica mlijeka i kave ponašaju se u skladu s Newtonovim jednadžbama gibanja i u načelu, zapisivanjem i rješavanjem svih jednadžbi za sve čestice mogao bi se dobiti deterministički opis promatranog sustava. Uzme li se u obzir kako se tu radi o približno  $10^{23}$  jednadžbi, položaja i brzina čestica kao funkcija vremena, čak i uz poznavanje svih jednadžbi i početnih uvjeta, njihovo rješavanje je praktično neizvedivo. Treba naglasiti da rješavanjem svih tih jednadžba, odnosno detaljnim poznavanjem putanje svake čestice u sustavu, i dalje ne bismo zaista razumjeli proces miješanja, nego bismo bili zaokupljeni ogromnim količinama podataka. Zato se rješavanju ovakvih problema pristupa na drugačiji način, sa ciljem pronalaska kvalitetnog statističkog opisa ponašanja sustava. U tom slučaju bilo bi dovoljno poznavati samo karakteristične srednje vrijednosti kojima su opisane putanje čestica. Budući da se radi o iznimno velikom broju parametara, srednje će vrijednosti imati vrlo oštre maksimume, te se statističkim razmatranjima mogu odrediti odstupanja od srednjih vrijednosti. [4]

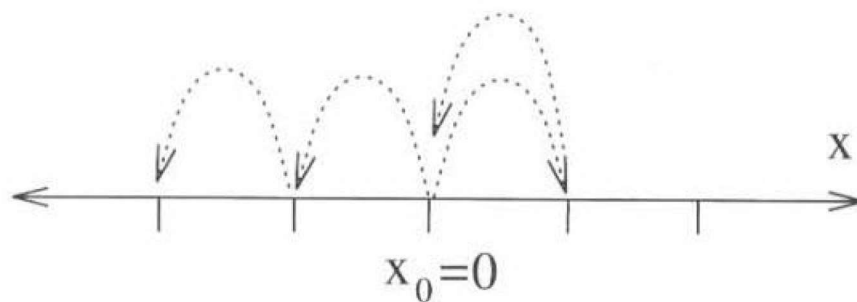
U nastavku ovoga rada prikazan je jedan od mogućih načina kojima se stvarni, deterministički procesi poput miješanja fluida modeliraju pomoću nasumičnih ili stohastičkih procesa sa istim karakterističnim svojstvima, sa ciljem pronalaska određenih srednjih vrijednosti. Također, na primjerima je prikazana simulacija ranije spomenutog modela uz analizu rezultata dobivenih simulacijom, te je pojašnjena povezanost stohastičkog modela nasumičnog hoda sa jednadžbom difuzije.

# 1. Teorijska podloga

## 1.1. Nasumičan hod u jednoj dimenziji

Model nasumičnog hoda podrazumijeva proces u kojem se čestica (u modelu prikazana kao osoba) giba slijedeći točno određena pravila. Ako se držimo analogije spomenute ranije u slikovitom primjeru miješanja fluida, čestice se gibaju po vrlo složenim putanjama između međusobnih sudara sa okolnim česticama. U modelu nasumičnog hoda (ponekad nazvan i „pijančev hod“) takva putanja opisana je pravilom da se čestice gibaju po jedan korak (ili skok) unutar jediničnog vremenskog intervala koji predstavlja vrijeme između sudara, a promjenu smjera brzine opisuje se nasumičnim odabirom smjera svakog koraka, neovisno o prethodnim koracima ili trenutnom položaju.

Kako bi se uspješno pojasnio model nasumičnog hoda dovoljni su pojednostavljeni primjeri, pa se stoga možemo ograničiti samo na nasumičan hod u jednoj dimenziji, npr. gibanje čestice po segmentu osi  $x$ . Dakle, u tom slučaju čestica se giba samo u jednoj dimenziji tako da se tijekom vremena nasumično sudara s drugim česticama i uslijed tih sudara izvodi skokove lijevo ili desno za jediničnu dužinu.



Slika 1: Skica primjera nasumičnog hoda u jednoj dimenziji [2]

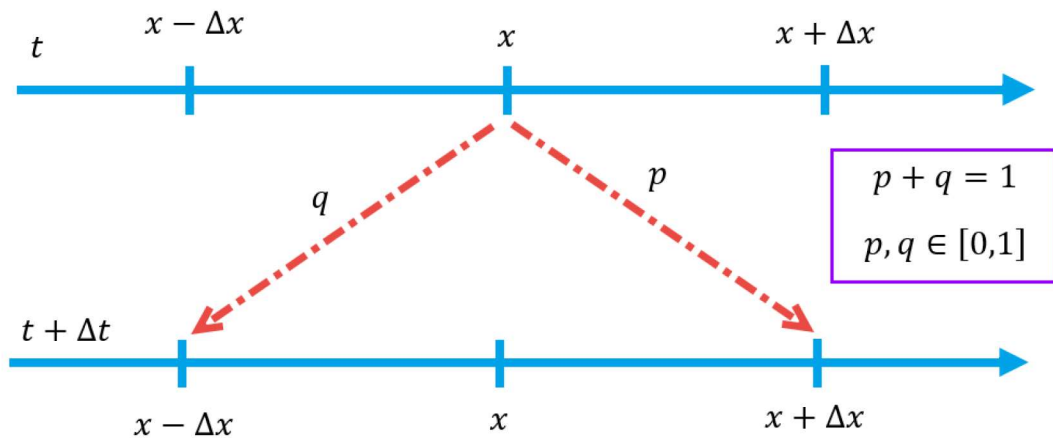
Na slici iznad nalazi se shematski prikaz primjera nasumičnog hoda u jednoj dimenziji, gdje je za početni položaj izabran  $x = x_0 = 0$ , te je nasumičnim odabirom slijed koraka rezultirao najprije jednim korakom udesno, a zatim tri uzastopna koraka ulijevo. Kao što je ranije spomenuto, uzmimo da su koraci jedinične duljine. U tom slučaju položaj nakon svakog sljedećeg nasumičnog koraka u odnosu na trenutni položaj može se zapisati na sljedeći način:

$$x_{n+1} = x_n \pm 1 \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Gdje je  $x_n$  trenutni položaj nakon  $n$  koraka, a  $x_{n+1}$  položaj nakon sljedećeg koraka.

Treba naglasiti da se obično vjerojatnost koraka udesno (pozitivan smjer osi  $x$ ) označava s  $p$ , a vjerojatnost koraka ulijevo (negativan smjer osi  $x$ )  $q$ , te one općenito ne moraju biti jednake. Također, duljina koraka ne mora nužno biti jedinična, niti stalna tijekom cijeloga hoda, stoga se kod općeg opisivanja mogu koristiti primjerenije oznake, pa će gornji izraz poprimiti oblik:

$$x_{n+1} = x_n \pm \Delta x \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$



Slika 2: Mogući pomaci čestice u jednoj dimenziji

Na slici iznad prikazani su mogući pomaci čestice sa početnim položajem  $x$  u trenutku  $t$ , duljinom koraka  $\Delta x$ , položajem  $x \pm \Delta x$  u trenutku  $t + \Delta t$ , uz navedene vjerojatnosti koraka udesno, odnosno ulijevo.

Budući da se model nasumičnog hoda koristi kako bi se deterministički procesi modelirali pomoću stohastičkih, od velike su važnosti kvantitativni statistički pokazatelji koji se mogu odrediti upravo analizom nasumičnog hoda. Također, ovdje treba naglasiti kako je moguće relativno jednostavno poopćiti model nasumičnog hoda sa jedne dimenzije na dvije ili tri prostorne dimenzije. U tom je slučaju potrebno promatrati koordinatu čestice s obzirom na sve (željene) prostorne dimenzije, te se u obzir moraju uzeti mogući pomaci u pozitivnom ili negativnom smjeru svake osi, naravno uz pripadajuće vjerojatnosti svakog pomaka. Jasno je da bi u takvom razmatranju prostor po kojem se čestica giba bio oblika kubične rešetke, ako se držimo pravila, odnosno ograničenja, da se gibanje može odvijati samo u točno određenim smjerovima.

## 1.2. Srednje udaljenosti od početnog položaja

Budući da zbog prirode nasumičnog hoda u jednoj dimenziji postoje samo dvije mogućnosti prilikom odabira smjera pomaka, vjerojatnost da je čestica u  $N$  pomaka napravila  $m$  pomaka udesno (sa vjerojatnošću  $p$ ) i  $N - m$  pomaka ulijevo (sa vjerojatnošću  $q = 1 - p$ ) dana je binomnom raspodjelom:

$$P(m) = \binom{N}{m} p^m q^{(N-m)} \quad ; m = 0, 1, \dots, N. \quad (3)$$

Kao što je ranije navedeno u jednadžbi (1), pomak udesno povećava koordinatu čestice za jedan, a pomak ulijevo smanjuje koordinatu za jedan. Prema tome, položaj čestice (označen sa  $n$ ) nakon  $N$  nasumičnih koraka biti će dan sa:

$$n = m \cdot (+1) + (N - m) \cdot (-1) = 2m - N. \quad (4)$$

Iz gornjeg se izraza može odrediti:

$$m = \frac{N + n}{2} \quad \Rightarrow \quad N - m = \frac{N - n}{2}. \quad (5)$$

Sada se može prijeći sa određivanja vjerojatnosti da je čestica u  $N$  koraka načinila  $m$  koraka udesno,  $P(m)$ , na vjerojatnost pronalaska čestice na položaju  $n$  nakon  $N$  koraka,  $P(n)$ :

$$P(m) \rightarrow P(n) = \left( \frac{N}{\frac{N+n}{2}} \right) p^{\frac{(N+n)}{2}} q^{\frac{(N-n)}{2}}$$

$$P(n) = \left( \frac{N}{\frac{N+n}{2}} \right) p^{\frac{N}{2}} \cdot p^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{N}{2}}}{q^{\frac{n}{2}}}$$

$$P(n) = (pq)^{\frac{N}{2}} \binom{N}{\frac{N+n}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (6)$$

Položaj čestice nakon  $N$  koraka može se označiti sa  $n$  zato što se uzima da je duljina koraka jedinična, pa prema tome čestica će se nalaziti u točki s koordinatom  $x = n\Delta x = n$ . Srednja vrijednost koordinate  $x$  je u tome slučaju:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \langle n \rangle \Delta x, \\ \langle n \rangle &= (4) = 2\langle m \rangle - N. \end{aligned}$$

Kako bi se odredila gornja vrijednost, potrebno je najprije odrediti očekivanje  $\langle m \rangle$  [4]:

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^N m P(m) = \sum_{m=0}^N m \binom{N}{m} p^m q^{N-m} = \sum_{m=0}^N m \frac{N!}{m!(N-m)!} p^m q^{N-m}.$$

U gornjem izrazu može se primijetiti kako nema smisla postaviti donju granicu sume od  $m = 0$  jer ostali članovi pod sumom, bez obzira na njihov oblik ili iznos, pomnoženi sa nulom nestaju, stoga je moguće promijeniti donju granicu sume:

$$\begin{aligned} \langle m \rangle &= \sum_{m=1}^N m \frac{(N-1)! \cdot N}{(m-1)! \cdot m \cdot (N-m)!} p^{m-1} \cdot p \cdot q^{N-m} \\ &= Np \sum_{m=1}^N \frac{(N-1)!}{(m-1)! \cdot (N-m)!} p^{m-1} q^{N-m}. \end{aligned}$$

Uvođenjem zamjene  $a = m - 1$  u gornji izraz, dobijemo:

$$\langle m \rangle = Np \sum_{a=0}^N \frac{(N-1)!}{a! \cdot (N-1-a)!} p^a q^{N-1-a} = Np(p+q)^{N-1} = Np.$$

Slijedi:  $\langle n \rangle = 2Np - N = N(2p - 1) = N(p - q). \quad (7)$

Iz relacije (7) vidljivo je da za slučaj „savršeno“ nasumičnog hoda, kod kojega su vjerojatnosti koraka udesno i ulijevo jednake ( $p = q$ ), srednja vrijednost koordinate  $x$  nakon  $N$  koraka biti će  $\langle x \rangle = 0$ , što je u skladu sa logičkim očekivanjima. Ako nasumični hod čini korake u oba smjera sa jednakom vjerojatnošću, za očekivati je da će se i zadržati u okolini početnog položaja bez obzira na broj proteklih koraka. Naravno, za slučaj  $p > \frac{1}{2}$  biti će i srednja vrijednost pomaknuta udesno ( $\langle x \rangle > 0$ ), odnosno simetrično za slučaj  $p < \frac{1}{2}$  biti će pomaknuta ulijevo ( $\langle x \rangle < 0$ ).

Vrlo slično srednjoj udaljenosti od početnog položaja nakon  $N$  koraka, može se odrediti i drugi moment oko početnog položaja, odnosno srednja kvadratna udaljenost od početnog položaja:

$$\langle x^2 \rangle = \langle n^2 \rangle \Delta x,$$

$$\langle n^2 \rangle = (4) = 4\langle m^2 \rangle - 4\langle m \rangle N + N^2.$$

Ovdje je najprije potrebno odrediti očekivanje  $\langle m^2 \rangle$ :

$$\langle m^2 \rangle = \sum_{m=0}^N m^2 P(m) = \sum_{m=0}^N [m(m-1) + m] P(m).$$

U gornjem izrazu opet se može primijetiti kako donja granica sume od  $m = 0$  ili  $m = 1$  nemaju smisla, jer u oba slučaja izraz u uglatoj zagradi, a samim time i cijeli argument unutar sume postaje nula. Zbog toga je opet moguće promijeniti donju granicu sume:

$$\langle m^2 \rangle = \sum_{m=2}^N m(m-1) P(m) + \sum_{m=1}^N m P(m).$$

Desni član u prethodnom izrazu može se prepoznati iz ranijeg izvoda, gdje se pokazalo kako se zapravo radi o očekivanju  $\langle m \rangle = Np$ .

$$\begin{aligned}
\langle m^2 \rangle &= \sum_{m=2}^N m \frac{N!}{m!(N-m)!} p^m q^{N-m} + Np \\
&= \sum_{m=2}^N \frac{(m^2 - m)(N-2)! \cdot (N-1) \cdot N}{(m-2)! \cdot (m-1) \cdot (N-m)!} p^{m-2} \cdot p^2 \cdot q^{N-m} + Np \\
&= N(N-1)p^2 \sum_{m=2}^N \frac{(N-2)!}{(m-2)! \cdot (N-m)!} p^{m-2} q^{N-m}.
\end{aligned}$$

Uvođenjem zamjene  $a = m - 2$ , dobije se:

$$\begin{aligned}
\langle m^2 \rangle &= N(N-1)p^2 \sum_{a=0}^N \frac{(N-2)!}{a! \cdot (N-2-a)!} p^{m-2} q^{N-m} + Np \\
&= N(N-1)p^2(p+q)^{N-2} + Np \\
&= (Np)^2 - Np^2 + Np = (Np)^2 + Npq.
\end{aligned}$$

Slijedi:  $\langle n^2 \rangle = 4[(Np)^2 + Npq] - 4N^2p + N^2 = N^2 - 4N(Np - pq - Np^2)$

$$\langle n^2 \rangle = N^2 - 4N(N-1)pq. \quad (8)$$

Konačno, još jedan bitan pokazatelj kod razmatranja raspodjela i ponašanja statističkih veličina jest standardna devijacija:

$$\sigma_n = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = 2\sqrt{Npq}. \quad (9)$$

Ovdje treba također naglasiti da se za izraz (8) mogu izdvojiti dva granična slučaja, a to su slučaj kada uopće nema sudara među česticama, i slučaj kada su sudari zaista potpuno nasumični. U prvome slučaju, kada ne bi bilo sudara među česticama, odnosno „prevedeno“ u model nasumičnog hoda, nema mogućnosti promjene smjera nakon svakog koraka, tada bi se čestica, odnosno osoba, svakim korakom linearno udaljavala od početnog položaja. Ovakav slučaj možemo opisati kao potpuno slobodnu česticu, odnosno pomoću vjerojatnosti, zasigurno će se

gibati samo u jednu stranu (ili udesno,  $p = 1$  i  $q = 0$ , ili ulijevo,  $q = 1$  i  $p = 0$ ). Prema tome, gornji će izraz (8) poprimiti oblik:

$$\langle n^2 \rangle \Big|_{p=0} = \langle n^2 \rangle \Big|_{q=0} = N^2 . \quad (10)$$

U drugome pak slučaju, kada su sudari, odnosno odabir smjera sljedećeg koraka, potpuno nasumični ( $p = q = 0.5$ ) može se primijetiti kako srednja kvadratna udaljenost više neće biti kvadratno ovisna o broju izvršenih koraka, već postaje linearno ovisna [4]:

$$\langle n^2 \rangle \Big|_{p=q=0.5} = N . \quad (11)$$

### 1.3. Pokazni primjeri simulacije

#### Pokazni primjer 1

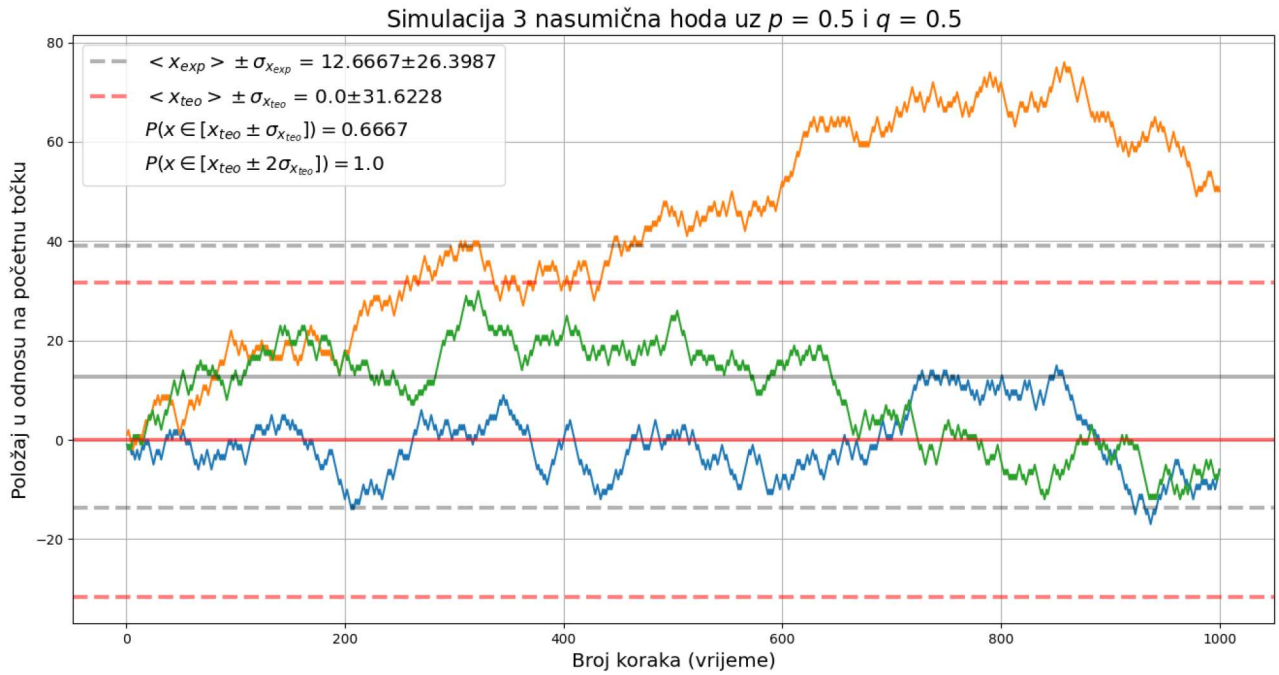
Kao pokazni primjer može se izvesti pokazna simulacija „potpuno“ nasumičnog hoda, odnosno sa jednakim vjerojatnostima koraka u oba smjera. Najprije možemo izračunati teorijski predviđene vrijednosti za srednju udaljenost i standardnu devijaciju, a zatim ih usporediti sa rezultatima simulacije. Kao što je vidljivo na slici u nastavku, u ovome slučaju izvršena je simulacija tri nasumična hoda, svaki duljine 1000 koraka:

$$\langle x \rangle = N(p - q) = 0 ,$$

$$\langle x^2 \rangle \Big|_{p=q=0.5} = 1000 ,$$

$$\sigma_{x_{teo}} = 2\sqrt{Npq} = 31.6228 .$$





*Slika 3: Primjer 1 - Simulacija nasumičnog hoda uz  $p = q = 0.5$*

Na slici iznad prikazan je oblik putanje tri nasumična hoda, odnosno njihov položaj u odnosu na početni s obzirom na broj proteklih koraka. Također, na slici su prikazane teorijski predviđene, ali i eksperimentalno određene vrijednosti srednje udaljenosti i standardne devijacije od početnog položaja nakon izvršenih svih 1000 koraka. Eksperimentalne vrijednosti određene su pomoću statističkih funkcija u računalnom kodu koje za ulazne podatke uzimaju određeni skup podataka za koje se želi odrediti srednja vrijednost i standardna devijacija, te kao izlazni podatak vraćaju izračunate vrijednosti. Može se naglasiti da su spomenute funkcije definirane na takav način da se srednja vrijednost određuje kao zbroj konačnih udaljenosti svih nasumičnih hodova podijeljen sa brojem vrijednosti, odnosno brojem nasumičnih hodova, a standardna devijacija prema izrazu u nastavku:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, \quad k - \text{broj nasumičnih hodova} \quad (12)$$

$$\sigma_{x_{exp}} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|x_i - \langle x \rangle\|^2}. \quad (13)$$

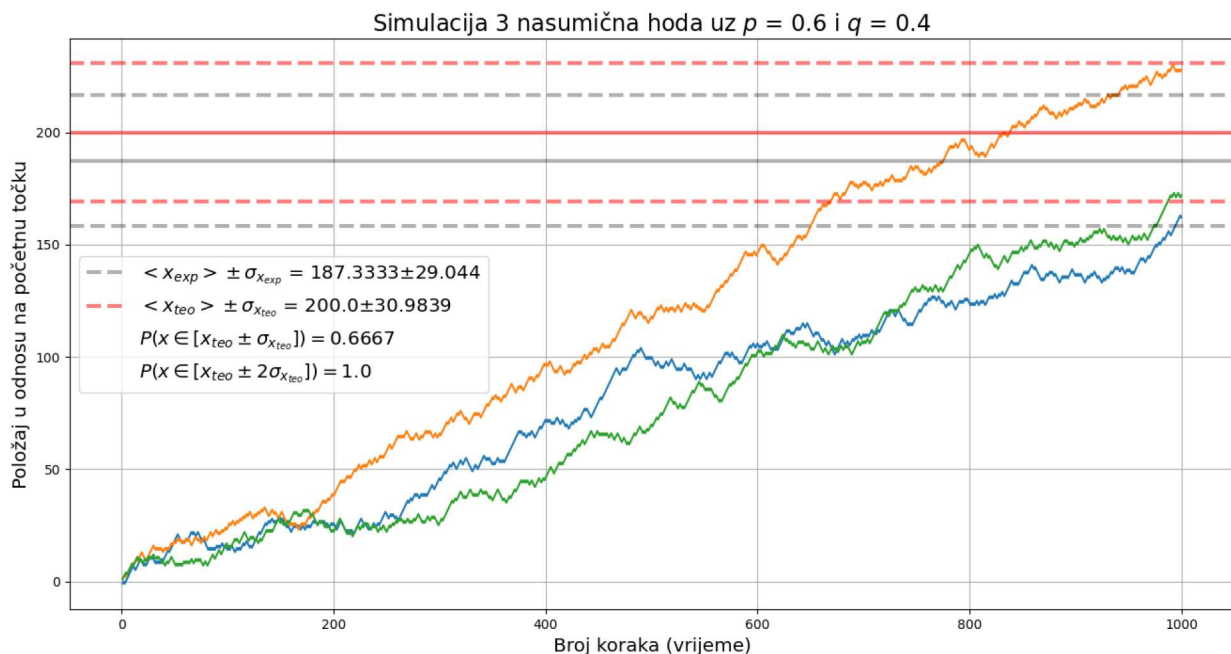
Jasno je da postoje odstupanja između teorijskih i eksperimentalno simuliranih vrijednosti, no u ovome primjeru statističke pokazatelje treba uzeti sa određenom rezervom jer se radi o vrlo malenom uzorku (broju nasumičnih hodova).

## Pokazni primjer 2

Slično prethodnome primjeru, može se izvesti pokazni primjer simulacije nasumičnog hoda sa povećanom vjerojatnošću koraka u jednu stranu, npr. udesno. Za ovaj primjer su također simulirana tri nasumična hoda, svaki duljine 1000 koraka, ali uz vjerojatnosti  $p = 0.6$ ,  $q = 0.4$ . Kao i u prethodnome pokaznom primjeru, mogu se izračunati teorijski predviđene srednje vrijednosti:

$$\langle x \rangle = N(p - q) = 200 ,$$

$$\sigma_{x_{teo}} = 2\sqrt{Npq} = 30.9839 .$$



Slika 4: Simulacija nasumičnog hoda uz  $p = 0.6$  i  $q = 0.4$

Kao i u prethodnome primjeru, na slici iznad je prikazan oblik putanje tri simulirana nasumična hoda, odnosno njihov položaj u odnosu na početnu točku s obzirom na broj proteklih koraka, te su na slici prikazane teorijski predviđene i simulacijom određene srednje vrijednosti.

## 1.4. Jednadžba difuzije

Tijekom teorijskog pregleda ranije u ovome radu, spomenuto je kako se model nasumičnog hoda koristi za modeliranje determinističkih procesa ili sustava pomoću stohastičkih, te je kao jedan od najčešće korištenih primjera navedena difuzija. Kako bi pokazali povezanost nasumičnog hoda i difuzije, možemo se zadržati na ranije korištenom slikovitom primjeru.

Pretpostavimo da postoji veći broj čestica mlijeka koji se giba u okolini ispunjenoj česticama kave. Postavlja se pitanje kako odrediti prostornu raspodjelu čestica kao funkciju vremena, pošto je poznato da će se difuzija zasigurno odvijati, bilo spontano ili izazvana vanjskim utjecajima, te tijekom vremena dolazi do miješanja čestica, u ovome slučaju fluida. U ranijim primjerima sa nasumičnim gibanjem čestica, odnosno osoba, zadržano je ograničenje na promatranje samo jedne specifične čestice, no postoji i drugačiji način promatranja takvog fizičkog sustava, a to je pomoću gustoće čestica  $\rho(x, y, z, t)$  koja se može dobro definirati u slučaju kada promatrani sustav sadrži veći broj čestica. U takvome sustavu gustoća čestica srazmjerna je vjerojatnosti pronalaska čestice u jediničnom segmentu volumena na položaju  $(x, y, z)$  tijekom jedinice vremena  $t$ , koja se može označiti sa  $P(x, y, z, t)$ . S ovakvim pretpostavkama, može se reći da gustoća čestica  $\rho$  i vjerojatnost  $P$  zadovoljavaju istu jednadžbu, no kako bismo odredili tu jednadžbu potrebno je prisjetiti se modela nasumičnog hoda.

Radi jednostavnosti, promotrimo gibanje čestice u jednoj dimenziji prikazano na Slici 2 ranije u ovome radu. U tome će slučaju gustoća čestica biti samo  $\rho(x, t)$ , odnosno vjerojatnost pronalaska čestice na danom položaju  $P(x, t)$ . Kako se radi o koordinatnom sustavu oblika pravca sa diskretnim čvorovima, odnosno mogućim položajima čestice, svaki proizvoljno odabrani čvor ima točno dva najbliža susjeda, odnosno samo su dva moguća nova položaja nakon jednog „koraka“ čestice. Ako se uzme da se u trenutku  $(t - 1)$  čestica nalazi u jednome čvoru, a vjerojatnosti pomicanja u susjedne čvorove je jednoliko raspodijeljena, tada vjerojatnost da se u sljedećem trenutku  $t$  čestica pomakne iz bilo kojeg od susjednih čvorova u promatrani čvor na položaju  $x$ , iznosi točno  $\frac{1}{2}$  za svaki od njih. Prema tome, vjerojatnost pronalaska čestice  $P(x, t)$  biti će dana sa:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} [P(x + 1, t - 1) + P(x - 1, t - 1)]. \quad (14)$$

Oduzimanjem vjerojatnosti da se čestica u prethodnom trenutku  $(t - 1)$  već nalazi na položaju  $x$ , te preuređivanjem jednadžbe (14) dobijemo slijedeće:

$$P(x, t) - P(x, t - 1) = \frac{1}{2}[P(x + 1, t - 1) + P(x - 1, t - 1) - 2P(x, t - 1)]. \quad (15)$$

Pomnožimo li lijevu stranu jednadžbe (15) sa  $\frac{\Delta t}{\Delta t}$ , a desnu sa  $\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}$ , tada izraz poprima oblik:

$$\frac{P(x, t) - P(x, t - 1)}{\Delta t} \Delta t = \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{[P(x + 1, t - 1) + P(x - 1, t - 1) - 2P(x, t - 1)]}{\Delta x^2}. \quad (16)$$

Ranije je navedeno kako su u ovakvim razmatranjima vjerojatnost pronalaska čestice  $P$  i gustoća čestica  $\rho$  srazmjerne, pa u skladu s time može se prijeći na oznake sa gustoćom čestica. Kada bismo željeli promatrati gibanje čestice gotovo kao kontinuirani proces, potrebno je smanjiti što je više moguće vremenski interval između svakog koraka i udaljenost između mogućih položaja (čvorova) odnosno duljinu nasumičnog koraka, pa prema tome promotrimo li jednadžbu (16) u granici kada  $\Delta t \rightarrow 0$  i  $\Delta x \rightarrow 0$ , može se primijetiti kako je lijeva strana jednadžbe upravo definicija vremenske derivacije, dok se sa desne strane jednadžbe može uočiti kako se radi o drugoj prostornoj derivaciji, u ovome slučaju samo po prostornoj koordinati  $x$ .

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(x, t) - \rho(x, t - 1)}{\Delta t} = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}, \quad (17)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\rho(x + 1, t - 1) + \rho(x - 1, t - 1) - 2\rho(x, t - 1)]}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (18)$$

Uvrštavanjem (17) i (18) natrag u (16), te izdvajanjem preostalog koeficijenta, u konačnici se dobije izraz poznat kao jednadžba difuzije:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}, \quad (19)$$

gdje je  $D$  koeficijent difuzije ovisan o promatranome sustavu, a u ovome slučaju jednodimenzijuskog koordinatnog sustava:

$$D = \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}. \quad (20)$$

Treba naglasiti kako se analognim pristupom može pokazati da je jednačba difuzije istoga oblika za npr. trodimenzijske koordinatne sustave, uz prilagodbu derivacije iz (18) na sve tri prostorne koordinate, te u tome slučaju treba prilagoditi i koeficijent difuzije  $D$ :

$$\frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \rho(x, y, z, t). \quad (21)$$

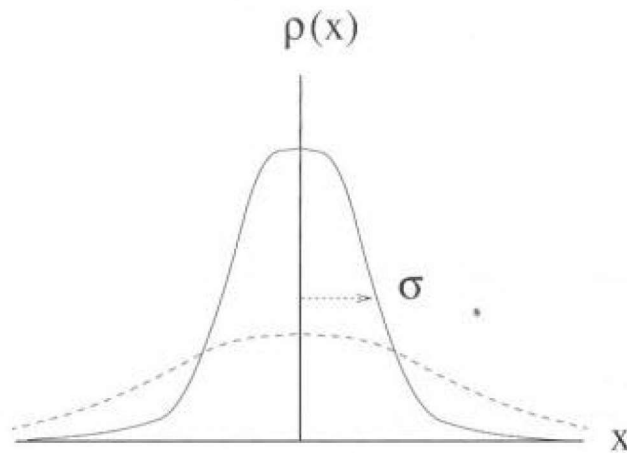
Kao što je obično slučaj kod diferencijalnih jednačbi, i kao što je spomenuto ranije u ovome radu, poznaju li se početna gustoća ili raspodjela čestica  $\rho(x, t = 0)$ , moguće je pomoću jednačbe difuzije odrediti raspodjelu u bilo kojem trenutku  $\rho(x, t)$ . [2]

Za jednačbu difuzije nije jednostavno analitički odrediti opće rješenje, ali postoji poseban slučaj koji je vrlo instruktivan, te se može uvrštavanjem u jednačbu difuzije (19) provjeriti valjanost rješenja oblika gausijana:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (22)$$

Treba naglasiti da rješenja prikazanog oblika mogu vrijediti samo uz uvjet da  $\sigma$  ima značenje standardne devijacije, tj. širine gausijana koja je vremenski ovisna, tj.  $\sigma = \sigma(t)$ , a u ovome slučaju vrijedi:

$$\sigma = \sqrt{2Dt}.$$



Slika 5: Shematski prikaz rješenja jednadžbe difuzije [2]

Na slici iznad shematski su prikazana ranije navedena rješenja jednadžbe difuzije u dva različita trenutka. Puna linija na grafu predstavlja raspodjelu čestica u nekom trenutku nedugo nakon početka procesa difuzije, dok isprekidana linija predstavlja raspodjelu istog skupa čestica u nekom kasnijem trenutku kada se difuzija već odvijala određeno vrijeme. Ono što se može na prvi pogled uočiti, a moglo se i pretpostaviti promatranjem oblika predloženog rješenja, jest oblik raspodjele čestica koji izričito podsjeća na Gaussovu krivulju. Jasno je kako se raspodjela „širi“ s protekom vremena, dok je ukupna površina ispod krivulje, koja predstavlja ukupni broj čestica u promatranome sustavu, nepromijenjena. Također je na slici označena specifična polu-širina (eng. *half-width*) za dani trenutak, te se može napomenuti da se protekom vremena zadržava oblik krivulje raspodjele poput Gaussove krivulje, uz porast polu-širine  $\sigma \sim \sqrt{t}$ , kao što je ranije spomenuto.[2]

## 2. Simulacija i analiza rezultata

U nastavku se nalaze rezultati računalne simulacije (izvedene pomoću računalnog koda koji se nalazi u dodatku u nastavku ovoga rada) koja simulira izvođenje 1000 zasebnih nepristranih (eng. *non-biased*) nasumičnih hodova u jednoj dimenziji, dakle sa jednakim vjerojatnostima koraka u oba smjera ( $p = q = 0.5$ ), gdje je svaki nasumični hod duljine  $N = 10000$  koraka.

Prije nego se analiziraju rezultati, iz zadanih vrijednosti za nasumične hodove mogu se odrediti teorijski predviđene srednje vrijednosti, kako je pojašnjeno i prikazano na dva pokazna primjera ranije u ovome radu. Kako su nasumični hodovi međusobno nezavisni, tj. nemaju nikakvog međusobnog utjecaja, mogu se izračunati očekivana srednja konačna udaljenost od početnog položaja, očekivana srednja kvadratna udaljenost od početnog položaja i očekivana standardna devijacija:

$$\langle x \rangle = N(p - q) = 0 ,$$

$$\langle x^2 \rangle \Big|_{p = q = 0.5} = N = 10000 ,$$

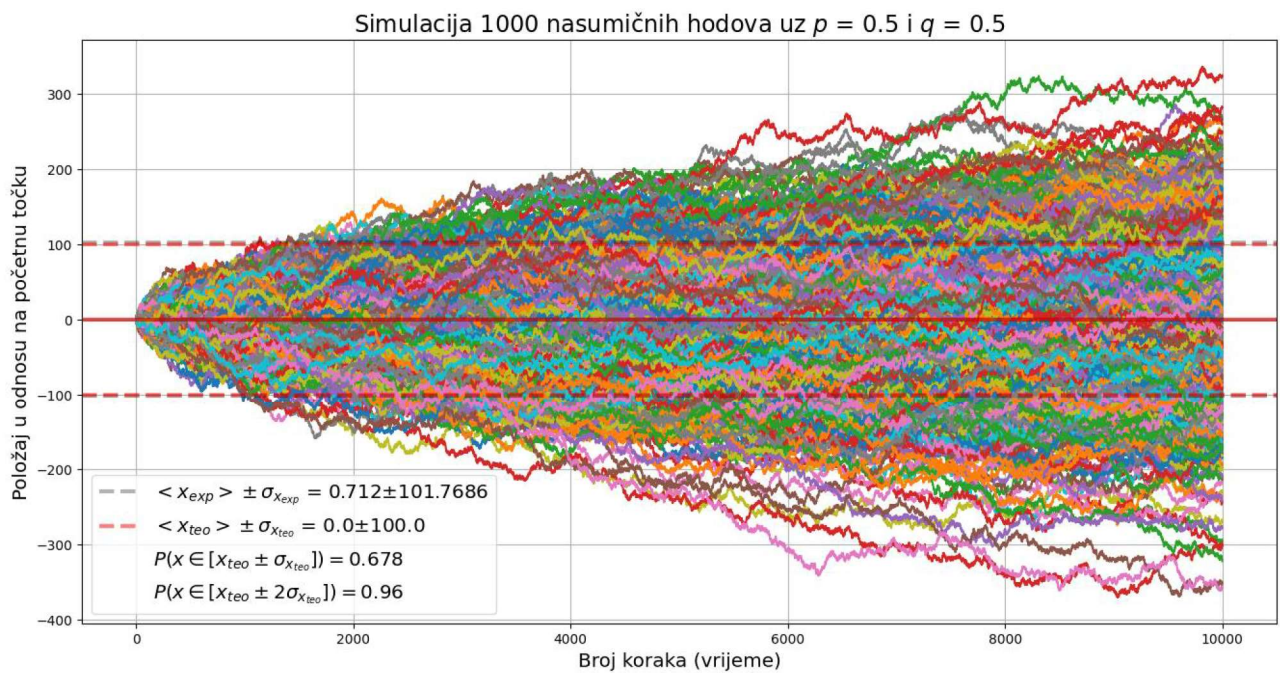
$$\sigma_{x_{teo}} = 2\sqrt{Npq} = 100 .$$

Na prvoj slici u nastavku (slika 6) nalazi se grafički prikaz putanja simuliranih nasumičnih hodova, odnosno njihov položaj s obzirom na broj proteklih koraka. Ovaj prikaz nema nužno poseban značaj u statističkoj analizi simulacije, ali može poslužiti kao koristan dodatak pri promatranju simulacije i shvaćanju što se zapravo događa u simulaciji. Kao što je već ranije naglašeno, a naznačeno je i na slici ispod, očekivana srednja vrijednost konačne udaljenosti od početnog položaja kod nepristranih nasumičnih hodova, uz pripadnu standardnu devijaciju, iznosi:

$$\langle x_{teo} \rangle \pm \sigma_{x_{teo}} = 0 \pm 100 .$$

Na temelju simuliranih 1000 nasumičnih hodova duljine 10000 koraka, dakle eksperimentalno određena srednja vrijednost konačne udaljenosti od početnog položaja i pripadna standardna devijacija (u ovoj instanci simulacije) iznose:

$$\langle x_{exp} \rangle \pm \sigma_{x_{exp}} = 0,712 \pm 101,7686 .$$

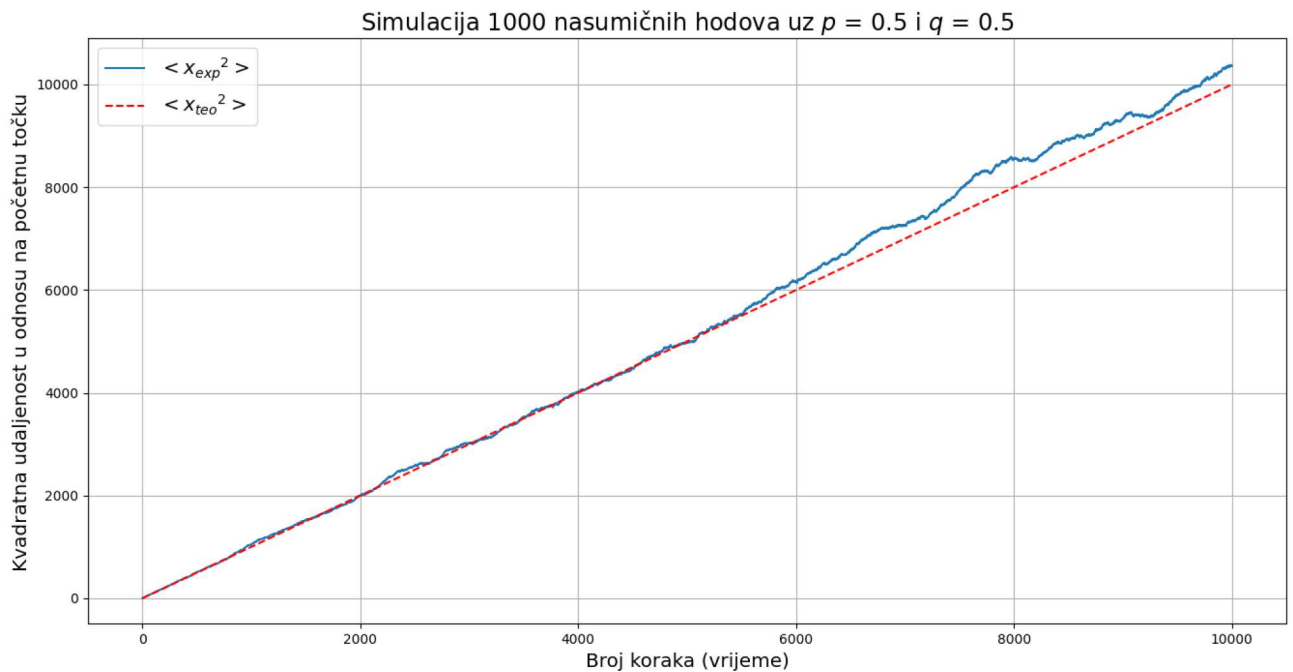


Slika 6: Prikaz putanja simulacije nasumičnih hodova

Na slici su teorijska i eksperimentalna srednja vrijednost prikazane horizontalnim punim linijama, a teorijske i eksperimentalne standardne devijacije u oba smjera isprekidanim linijama, no ova je simulacija rezultirala vrlo bliskim vrijednostima pa se linije djelomično preklapaju, stoga nisu najbolje vidljive. Također se može vidjeti prikaz eksperimentalno određenog udjela nasumičnih hodova koji su završili sa konačnom udaljenošću unutar jedne, odnosno unutar dvije teorijski predviđene standardne devijacije u odnosu na srednju vrijednost udaljenosti od početnog položaja. Prema Gaussovoj ili normalnoj raspodjeli, unutar jedne standardne devijacije oko srednje vrijednosti nalazi se približno 68% čestica, dok se unutar dvije standardne devijacije nalazi približno 95%. [4] Usporedbom eksperimentalno određenih podataka na temelju simulacije koja je rezultirala sa 67,8% čestica unutar jedne, i 96% čestica unutar dvije teorijske standardne devijacije

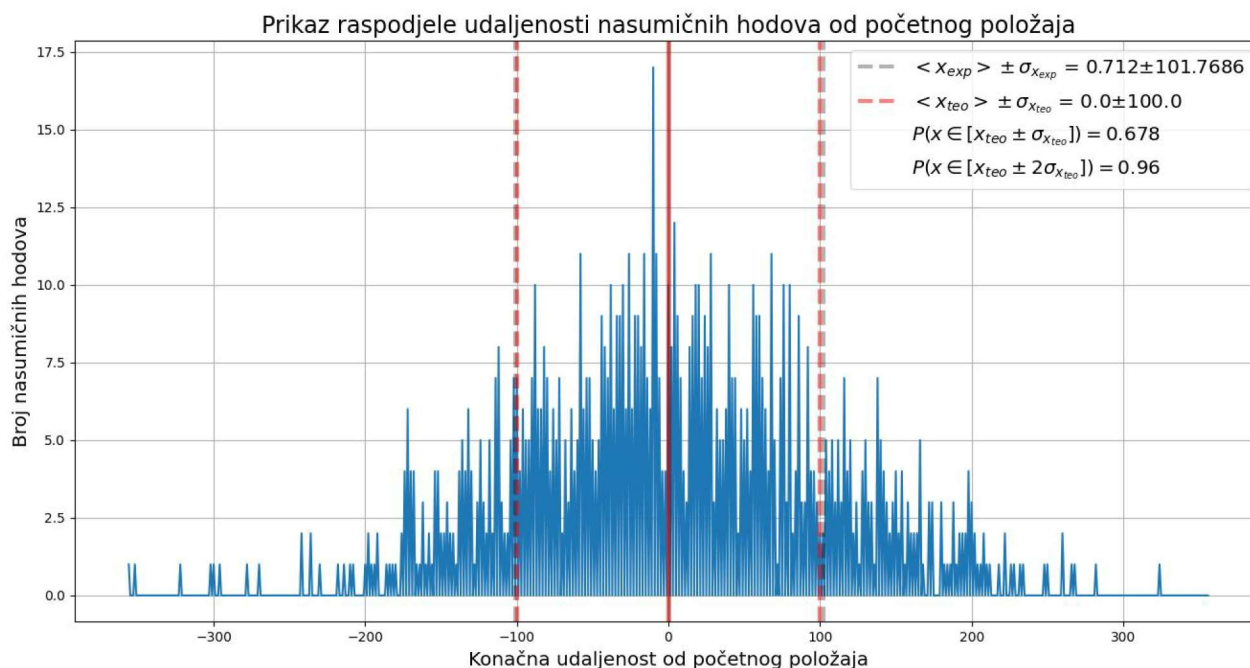


oko teorijski predviđene srednje vrijednosti, može se zaključiti kako ovi rezultati simulacije zaista odgovaraju očekivanjima, naravno unutar granica razumnih odstupanja.

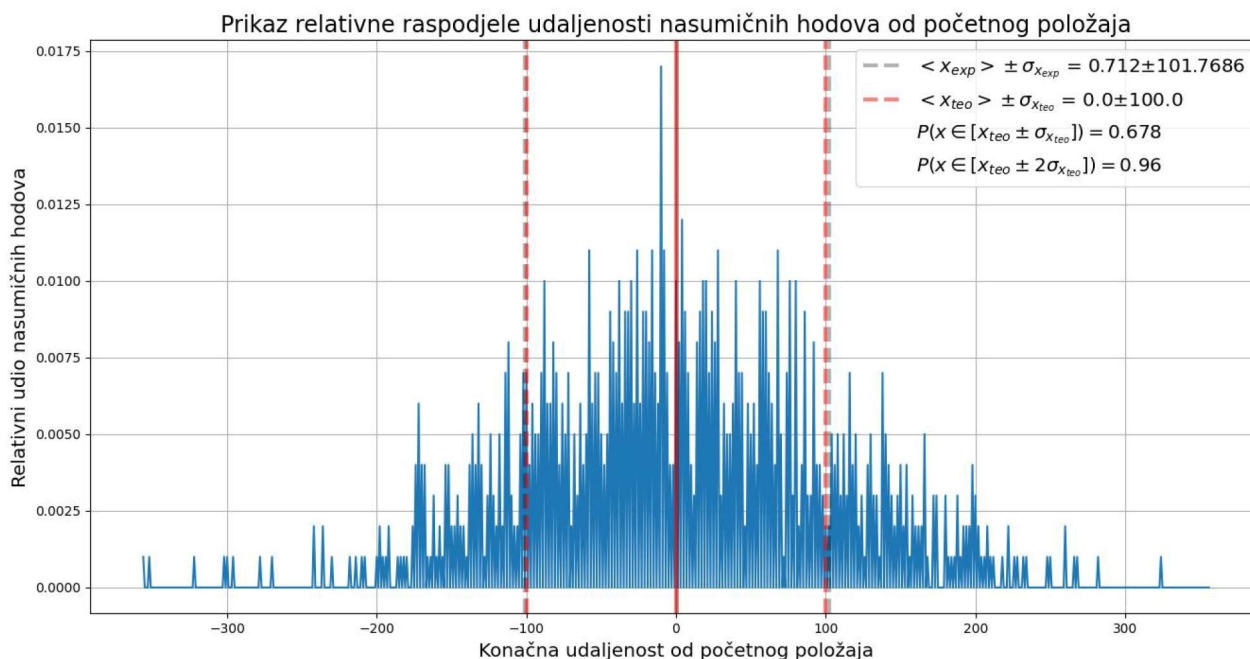


Slika 7: Prikaz ovisnosti kvadratne udaljenosti od početnog položaja s obzirom na broj proteklih koraka (vrijeme)

Kao što je naznačeno, na slici 7 prikazan je odnos srednje kvadratne udaljenosti od početnog položaja s obzirom na broj proteklih koraka u računalnoj simulaciji, određen na temelju svih 1000 simuliranih nasumičnih hodova. Kao što je ranije u teorijskom razmatranju spomenuto, kod nepristranih nasumičnih hodova kvadratna udaljenost postaje linearno ovisna sa brojem koraka, što je na ovoj slici jasno prikazano kao isprekidana crvena linija, te je također vidljivo teorijsko očekivanje srednje kvadratne udaljenosti na kraju nasumičnog hoda koje je ranije računski određeno.



Slika 8: Prikaz raspodjele udaljenosti nasumičnih hodova od početnog položaja

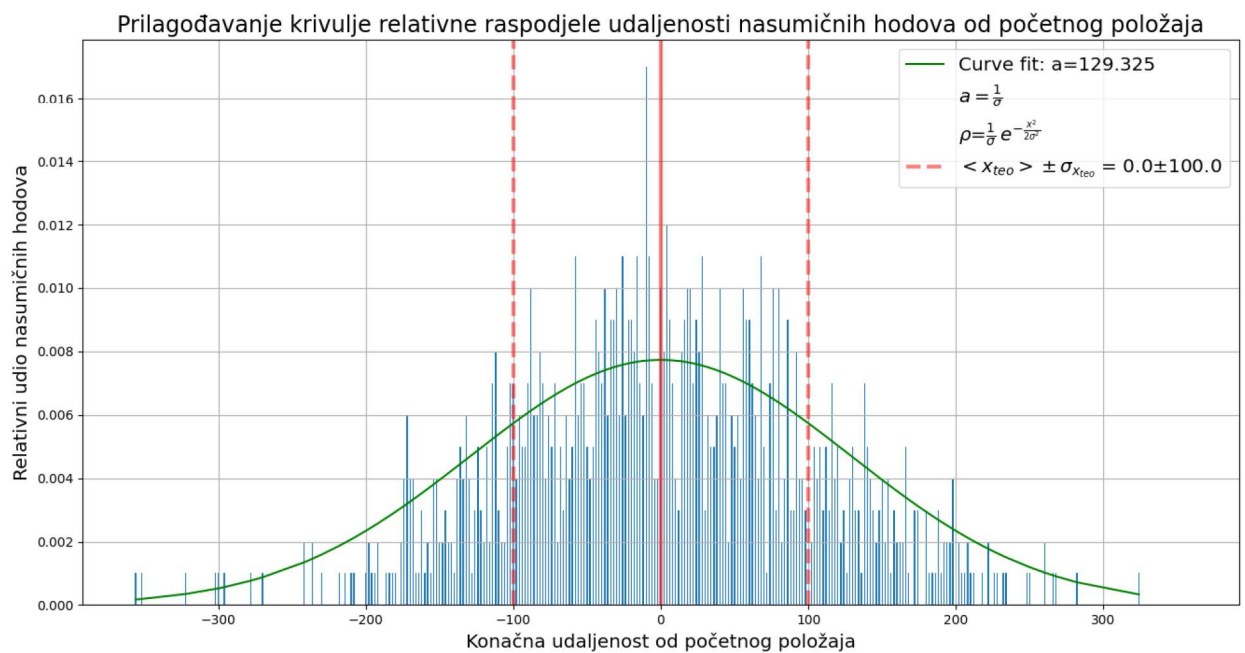


Slika 9: Prikaz relativne raspodjele udaljenosti nasumičnih hodova od početnog položaja

Na slikama 8 i 9 nalaze se dva vrlo slična prikaza rezultata računalne simulacije. Na slici 8 prikazan je broj nasumičnih hodova (od ukupnih 1000) koji je okončao svojih 10000 koraka na određenom položaju ulijevo ili udesno od početnog, dok se na slici 9 nalazi ekvivalentan relativni

prikaz, dakle postotak nasumičnih hodova koji su okončali na određenom položaju. Ono što je specifično za oba prikaza su izrazito uski diskretni šiljci koji „skaču“ između određenih vrijednosti i nule. To zapravo ima savršenog smisla ako se uzme u obzir kako se radi o nasumičnim hodovima s početnim položajem u  $x = 0$ , i to sa parnim brojem koraka.

Promotrimo trivijalan primjer nasumičnog hoda sa početkom u  $x = 0$  i duljine 2 koraka. Nakon prvog koraka, čestica se može nalaziti isključivo u  $x = -1$  ili u  $x = 1$ , te se nakon drugog koraka može pomaknuti u  $x = -2$ ,  $x = 2$ , ili se može vratiti natrag u  $x = 0$ . U svakom slučaju, zbog parnog broja koraka, mogući ili „dopušteni“ konačni položaji su ograničeni. Analogno vrijedi i za slučaj neparnog broja koraka sa „neparnim dopuštenim“ položajima. Dakle, intervali koji leže na x-osi na slikama iznad označavaju ili položaje na kojima nijedan nasumični hod nije okončao, ili položaje koji nisu bili mogući zbog zadanog broja koraka.



Slika 10: Prikaz prilagođavanja krivulje relativne raspodjele udaljenosti nasumičnih hodova od početnog položaja

Kao što je naznačeno, na slici 10 prikazano je prilagođavanje krivulje (eng. *curve fitting*) relativne raspodjele udaljenosti nasumičnih hodova od početnog položaja. Ovdje treba naglasiti da se na slici zapravo nalazi grafički prikaz ekvivalentan onome sa slike 9, uz promjenu oblika kojim su prikazani eksperimentalni podaci, u toliko da je na ovome prikazu korišten stupčasti oblik grafa za razliku od linije koja povezuje eksperimentalne točke. Prilagođavanje krivulje izvedeno je pomoću računalne funkcije koja radi na način da se unaprijed odredi oblik funkcije prema kojoj se

žele prilagoditi podaci, zatim se analizira skup ulaznih podataka, te se na izlazu vraćaju optimalne vrijednosti parametara tako da su kvadrati razlike vrijednosti zadane funkcije u danim točkama i eksperimentalno određenih vrijednosti minimalni. U ovome slučaju, zadani oblik funkcije za prilagođavanje odgovara predviđenom rješenju jednadžbe difuzije (22), kao što se može vidjeti na slici 10. Promotri li se oblik prilagođene krivulje, može se jasno uočiti sličnost obliku krivulje predloženog rješenja prikazane na slici 5. U ovome slučaju, prilagođena krivulja bolje odgovara isprekidanoj predviđenoj krivulji, pošto se radi o krivulji koja prikazuje raspodjelu čestica nakon što je protekla određena (za promatrani sustav značajna) količina vremena.

### 3. Zaključak

Promotri li se problematika razmatrana u ovome radu i modeli kojima su najprije teorijski predviđeni, a zatim eksperimentalno određeni specifični pokazatelji, moglo bi se zaključiti kako primjeri i rezultati prikazanih simulacija nisu pretjerano zahtjevni, no cilj ovoga rada je svakako ostvaren. Analizom rezultata i same simulacije javljaju se jasne sličnosti u usporedbi sa teorijskim pregledom, te služe kao dokaz koncepta (eng. *proof of concept*) kako praktično primijeniti stohastičke modele i statističke pokazatelje na determinističke sustave i procese, naravno uz stabilne matematičke modele u pozadini. Kao što je ranije navedeno, u ovome radu je prikazan samo jedan od mnogih modela koji u bližoj prošlosti, a za pretpostaviti je sličan trend i u budućnosti, sve više imaju „glavnu riječ“ kada se govori o matematičkom ili fizičkom modeliranju, simuliranju i prikazivanju raznih sustava i procesa iz svijeta oko nas.

Ono što još treba naglasiti je da ovaj rad nije nužno usredotočen na pojašnjavanje točne izvedbe simulacija koje su prikazane u radu, stoga se samo na mjestima nalaze kratka pojašnjenja određenih funkcionalnosti ili izvedbe simulacija, te se u dodatku nalazi izvorni računalni kod. U ovome su radu simulacije izrađene koristeći se programskim jezikom *Python* i određenim dostupnim gotovim bibliotekama funkcija, ali svakako valja napomenuti da su slične, ako ne i potpuno iste simulacije izvedive primjenom mnoštva drugih programskih jezika i okruženja.

## 4. Literatura

- [1] Ayars, E. Computational Physics With Python. California State University, Chico, 2013.
- [2] Giordano, N. J., Nakanishi, H. Computational Physics. Second Edition, Upper Saddle River, NJ, USA : Pearson Education, Inc., 2006.
- [3] Glumac, Z. Računalne metode fizike : Kratak uvod, 2015.
- [4] Glumac, Z. Vjerojatnost i statistika : Kratak uvod, 2015.
- [5] Guttag, J. V. Introduction to Computation and Programming using Python (Spring 2013 Edition). Cambridge, Massachusetts; London, England : The MIT Press, 2013.

### 4.1. Mrežne stranice

- [6] Matplotlib documentation. URL: <https://matplotlib.org/stable/index.html> (pristupljeno 19.9.2022.)
- [7] Numpy documentation. URL: <https://numpy.org/doc/> (pristupljeno 19.9.2022.)
- [8] Python documentation. URL: <https://docs.python.org/3/> (pristupljeno 19.9.2022.)
- [9] SciPy documentation. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/> (pristupljeno 19.9.2022.)

## **5. Životopis**

Kristijan Dragičević rođen je 25. listopada 1997. godine u Vinkovcima. Osnovnu školu završio je u Starim Mikanovcima, a zatim upisuje Tehničku Školu Ruđera Boškovića Vinkovci, strukovnog usmjerenja Elektrotehničar. 2016. godine završava srednjoškolsko obrazovanje, te iste godine upisuje Preddiplomski studij fizike na Odjelu za fiziku u Osijeku, gdje postaje Sveučilišnim prvostupnikom fizike 2020. godine. Iste godine upisuje Diplomski studij fizike i informatike na Odjelu za fiziku u Osijeku.

## 6. Dodatak

### 6.1. Računalni kod

```
import numpy as np
import random as r
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.optimize as sc

nSteps = 10000
nWalks = 1000
p = .5
q = 1 - p

endPosData = []
N = np.arange(1,nSteps+1,1)
fullPlotData1 = []

for i in range(nWalks):
    endPosData.append(np.zeros(nSteps, dtype=int))

for i in range(len(endPosData)):
    endPosData[i] = np.zeros(nSteps, dtype=int)
    stepChoice = r.choices(population=["1","-1"], weights=(p,q), k=nSteps)
    for j in range(len(stepChoice)):
        if stepChoice[j] == "-1":
            endPosData[i][j] = endPosData[i][j-1] - 1
        elif stepChoice[j] == "1":
            endPosData[i][j] = endPosData[i][j-1] + 1

for i in range(len(endPosData)):
    fullPlotData1.append((N,endPosData[i]))

finalPositions = []
finalNumCount = []
finalRelCount = []
xBarTicks = list(np.arange(-nSteps, nSteps+1, 1))

for i in endPosData:
    finalPositions.append(i[-1])

for i in xBarTicks:
    tempNumCount = finalPositions.count(i)
    finalNumCount.append(tempNumCount)
    if tempNumCount != 0:
        finalRelCount.append(tempNumCount/nWalks)
    elif tempNumCount == 0:
        finalRelCount.append(0)

theoryMean = round(nSteps*(p-q), 4)
theoryStdev = round(2*np.sqrt(nSteps*p*q), 4)

expMean = round(np.mean(finalPositions), 4)
expStdev = round(np.std(finalPositions), 4)

meanDis = list(np.zeros(len(endPosData[0])))
meanSquareDis = list(np.zeros(len(endPosData[0])))
tempSum = 0
probSig1 = 0
probSig2 = 0
```



```

emptyLabel = 0
plotlineWidth = 3

for k in endPosData:
    for i in range(len(k)):
        tempSum = k[i]
        meanDis[i] += round(tempSum/len(endPosData), 4)
        meanSquareDis[i] += round(tempSum**2/len(endPosData), 4)

for k in endPosData:
    if k[-1] >= (theoryMean - theoryStdev) and k[-1] <= (theoryMean +
theoryStdev):
        probSig1 += 1/len(endPosData)
    if k[-1] >= (theoryMean - 2*theoryStdev) and k[-1] <= (theoryMean +
2*theoryStdev):
        probSig2 += 1/len(endPosData)

probSig1 = round(probSig1, 4)
probSig2 = round(probSig2, 4)

meanLabel1 = "<math>\langle x_{\text{exp}} \rangle \pm \sigma_{x_{\text{exp}}} </math> = " + str(expMean) +
"$\pm$" + str(expStdev)
meanLabel2 = "<math>\langle x_{\text{teo}} \rangle \pm \sigma_{x_{\text{teo}}} </math> = " + str(theoryMean) +
"$\pm$" + str(theoryStdev)
meanLabel3 = "$P(x \in [x_{\text{teo}} \pm \sigma_{x_{\text{teo}}}] = $" + str(probSig1)
meanLabel4 = "$P(x \in [x_{\text{teo}} \pm 2\sigma_{x_{\text{teo}}}] = $" +
str(probSig2)

if nWalks == 1:
    titleLabel1 = 'Simulacija nasumičnog hoda uz $p$ = ' + str(p) + ' i $q$
= ' + str(q)
elif nWalks > 1 and nWalks < 5:
    titleLabel1 = 'Simulacija '+str(nWalks)+' nasumična hoda uz $p$ = ' +
str(p) + ' i $q$ = ' + str(q)
elif nWalks >= 5:
    titleLabel1 = 'Simulacija '+str(nWalks)+' nasumičnih hodova uz $p$ = '
+ str(p) + ' i $q$ = ' + str(q)
titleLabel2 = "Prikaz raspodjele udaljenosti nasumičnih hodova od početnog
položaja"
titleLabel3 = "Prikaz relativne raspodjele udaljenosti nasumičnih hodova od
početnog položaja"
titleLabel4 = "Prilagođavanje krivulje relativne raspodjele udaljenosti
nasumičnih hodova od početnog položaja"

meanSqLabel1 = "<math>\langle x_{\text{exp}}^2 \rangle </math>"
meanSqLabel2 = "<math>\langle x_{\text{teo}}^2 \rangle </math>"

fitLabel1 = str(r'$\rho$' + "=" + r'$\frac{1}{\sigma} \backslash e^{-\frac{x^2}{2
\sigma^2}}$')
fitLabel2 = r'$a = \frac{1}{\sigma}$'

def fitFunc(x, a):
    return (1/a) * np.exp(-1/(2*a**2)*x**2)

for k in fullPlotData1:
    plt.plot(k[0],k[1])
plt.grid()
plt.xlabel("Broj koraka (vrijeme)", size="x-large")
plt.ylabel("Položaj u odnosu na početnu točku", size="x-large")
plt.axhline(expMean, ls="-", lw = plotlineWidth, color = "k", alpha = .3)

```

```

plt.axhline(expMean - expStdev, lw = plotlineWidth, ls = "--", color = "k",
alpha = .3, label = meanLabel1)
plt.axhline(expMean + expStdev, lw = plotlineWidth, ls = "--", color = "k",
alpha = .3)
plt.axhline(theoryMean, lw = plotlineWidth, color = "r", alpha = .5)
plt.axhline(theoryMean + theoryStdev, lw = plotlineWidth, ls="--", color =
"r", alpha = .5, label = meanLabel2)
plt.axhline(theoryMean - theoryStdev, lw = plotlineWidth, ls="--", color =
"r", alpha = .5)
plt.axhline(emptyLabel, alpha=0, label=meanLabel3)
plt.axhline(emptyLabel, alpha=0, label=meanLabel4)

plt.legend(loc="best", fontsize="x-large")
plt.title(label=titleLabel1, size="xx-large")
plt.show()

plt.plot(N, meanSquareDis, label=meanSqLabel1)
plt.plot(N,N, ls="--", color="r", label=meanSqLabel2)
plt.grid()
plt.xlabel("Broj koraka (vrijeme)", size="x-large")
plt.ylabel("Kvadratna udaljenost u odnosu na početnu točku", size="x-large")
plt.title(label=titleLabel1, size="xx-large")
plt.legend(loc="best", fontsize="x-large")
plt.show()

a = 0
b = 0
leftEnd = 0
rightEnd = 0

while leftEnd == 0:
    temp = finalNumCount[a]
    if temp != 0:
        leftEnd = a
    else:
        a += 1

while rightEnd == 0:
    temp = finalNumCount[b]
    if temp != 0:
        rightEnd = b
    else:
        b += 1

xReducedTicks = xBarTicks [min(a,b):-min(a,b)]
reducedNumCount = finalNumCount [min(a,b):-min(a,b)]
reducedRelCount = finalRelCount [min(a,b):-min(a,b)]

plt.plot(xReducedTicks, reducedNumCount)
plt.grid()
plt.xlabel("Konačna udaljenost od početnog položaja", size="x-large")
plt.ylabel("Broj nasumičnih hodova", size="x-large")
plt.title(titleLabel2, size="xx-large")

plt.axvline(expMean, ls = "-", color = "k", lw = plotlineWidth, alpha=.3)
plt.axvline(expMean - expStdev, ls = "--", lw = plotlineWidth, color = "k",
alpha = .3, label = meanLabel1)
plt.axvline(expMean + expStdev, ls = "--", lw = plotlineWidth, color = "k",
alpha = .3)
plt.axvline(theoryMean, lw = plotlineWidth, color = "r", alpha = .5)

```

```

plt.axvline(theoryMean + theoryStdev, lw = plotlineWidth, ls = "--", color =
"r", alpha = .5, label = meanLabel2)
plt.axvline(theoryMean - theoryStdev, lw = plotlineWidth, ls = "--", color =
"r", alpha = .5)
plt.axvline(emptyLabel, alpha=0, label=meanLabel3)
plt.axvline(emptyLabel, alpha=0, label=meanLabel4)
plt.legend(loc="best", fontsize="x-large")
plt.show()

plt.plot(xReducedTicks, reducedRelCount)
plt.grid()
plt.xlabel("Konačna udaljenost od početnog položaja", size="x-large")
plt.ylabel("Relativni udio nasumičnih hodova", size="x-large")
plt.title(titleLabel3, size="xx-large")

plt.axvline(expMean, ls = "-", lw = plotlineWidth, color = "k", alpha =.3)
plt.axvline(expMean - expStdev, ls = "--", lw = plotlineWidth, color = "k",
alpha =.3, label = meanLabel1)
plt.axvline(expMean + expStdev, ls = "--", lw = plotlineWidth, color = "k",
alpha =.3)
plt.axvline(theoryMean, lw = plotlineWidth, color = "r", alpha = .5)
plt.axvline(theoryMean + theoryStdev, lw = plotlineWidth, ls = "--", color =
"r", alpha = .5, label = meanLabel2)
plt.axvline(theoryMean - theoryStdev, lw = plotlineWidth, ls = "--", color =
"r", alpha = .5)
plt.axvline(emptyLabel, alpha=0, label=meanLabel3)
plt.axvline(emptyLabel, alpha=0, label=meanLabel4)

plt.legend(loc="best", fontsize="x-large")
plt.show()

fitData = [[],[]]
fitCurveY = []

for i in range(len(reducedRelCount)):
    if reducedRelCount[i] != 0:
        fitData[0].append(reducedRelCount[i])
        fitData[1].append(xReducedTicks[i])
fOpt, fCov = sc.curve_fit(fitFunc, fitData[1],fitData[0])

for i in range(len(fitData[1])):
    fitCurveY.append(fitFunc(fitData[1][i], fOpt))

plt.bar(xReducedTicks, reducedRelCount)
plt.plot(fitData[1], fitCurveY, "g-", label="Curve fit: a=%5.3f" % fOpt)
plt.axvline(emptyLabel, alpha=0, label=fitLabel2)
plt.axvline(emptyLabel, alpha=0, label=fitLabel1)
plt.axvline(theoryMean, lw = plotlineWidth, color = "r", alpha = .5)
plt.axvline(theoryMean + theoryStdev, lw = plotlineWidth, ls = "--", color =
"r", alpha = .5, label = meanLabel2)
plt.axvline(theoryMean - theoryStdev, lw = plotlineWidth, ls = "--", color =
"r", alpha = .5)

plt.grid()
plt.xlabel("Konačna udaljenost od početnog položaja", size="x-large")
plt.ylabel("Relativni udio nasumičnih hodova", size="x-large")
plt.title(titleLabel4, size="xx-large")

plt.legend(loc="best", fontsize="x-large")
plt.show()

```