SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA FIZIKU

JOSIP ŽIVKOVIĆ

VARIJACIJSKE METODE

Završni rad

Osijek, 2016.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

JOSIP ŽIVKOVIĆ

VARIJACIJSKE METODE

Završni rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

radi stjecanja zvanja prvostupnika fizike

Osijek, 2016.

„Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom mentora doc.dr.sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku".

Sadržaj:

Sažetak 2

Abstract 3

1. Uvod 4
2. Problem brahistokrone krivulje 5
3. Euler - Lagrangeove jednadžbe 6
4. Hamiltonovo načelo 10
5. Problemi koji uključuju Sturm-Liouvilleove operatore 12
6. Rayleigh-Ritz metoda 14
7. Varijacijski problemi s ograničenjima 17
8. Varijacijska formulacija svojstvenih problema 22
9. Varijacijski problemi u više dimenzija 26
10. Formulacija svojstvenih vrijednosti metodom omjera 29
11. Zaključak 33
12. Literatura 34
13. Životopis 35

VARIJACIJSKE METODE

JOSIP ŽIVKOVIĆ

Sažetak

U ovome radu ukratko ćemo se upoznati sa osnovama varijacijskih metoda. Bavit ćemo se problemom traženja lokalnog minimuma određenog funkcionala, na način da tražimo nužne i dovoljne uvjete postojanja ekstrema tog funkcionala. Upoznat ćemo se sa Euler - Lagrangeovom jednadžbom, Hamiltonovim načelom, Sturm-Liouvilleovim operatorom i Rayleigh-Ritzovom metodom. Također, razmatrat ćemo više metoda pronalaženja svojstvenih vrijednosti. Na poslijetku ćemo pokazati kako se varijacijski postupak može proširiti za slučaj više nezavisnih varijabli.

(stranica 38, slika 3, fusnota 8)

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: Euler-Lagrangeova jednadžba, problem Brachistohorne, Hamiltonov princip

Mentor: doc.dr.sc. Zvonko Glumac

Rad prihvaćen:

VARIJACIJSKE METODE

JOSIP ŽIVKOVIĆ

Abstract

In this paper, we will shortly be introduced to the basics of Calculus of Variations. We will deal with problem of finding a local minima of certain functional in a way to seek the necessary and sufficient conditions for the existence of ekstreme of this functional. We will meet with Euler-Lagrange equation, Hamilton's principe, Sturm-Liouvilles operator and Rayleigh-Ritz method. Also, we will consider more methods for finding eigenvalues. In the end, we will show how calculus of variations can be extended to handle more than one independent variable.

(pages 38, figures 2, footnote 8)

Thesis deposited in Department of Physics library

Key words: Euler-Lagrange equation, Brachistohorne problem, Hamilton's principe

Supervisor: Professor Zvonko Glumac, PhD

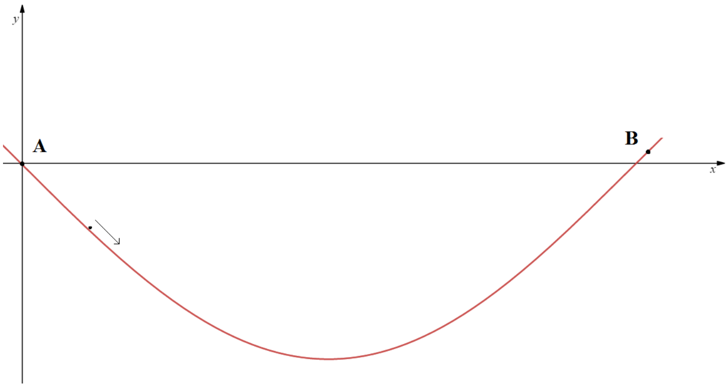
Thesis accepted:

1. Uvod

Jedna od najzanimljivijih i važnijih metoda korištenih u matematičkoj fizici je teorija varijacija. Nastajanju varijacijskog računa pridonijeli su neki problemi koje je inače bilo teško riješiti. Varijacijski račun se primjenjuje na probleme u kojima se neka veličina treba minimizirati ili maksimizirati, a ona je dana u obliku integrala. Varijacijske metode služe za modeliranje i rješavanje važnih matematičkih, fizikalnih i inženjerskih problema. Problemi koji se rješavaju pomoću varijacijski metoda su diferencijalne jednadžbe, svojstvenih vrijednosti itd. Jedan on najstarijih problema koji je riješen uz pomoć varijacijskih metoda je problem brahistokrone. Problem kod kojeg je potrebno minimizirati vrijeme potrebno da čestica dođe od jedne točke do druge.

2. Problem brahistokrone krivulje

Da bi pojasnili varijacijske metode i pokazali mogućnosti rješavanja problema, zamislimo česticu mase m koja klizi, pod utjecajem gravitacije, po nekoj krivulji R, od točke A do točke B (Slika 1.). Ako su točke A i B fiksirane i ako se čestica u početku nalazi u stanju mirovanja, kakva mora biti krivulja R da bi vrijeme za koje čestica dođe do točke B bilo minimalno? Trenje i ostale otpore zanemarujemo.



Slika 1. Krivulja R

Krivulja koja zadovoljava ovakve uvjete naziva se brahistokrona. Možemo pretpostaviti da ovakva krivulja optimalne vremenske putanje čestice doista postoji. Matematička formulacija ovog problema je sljedeća:

s obzirom da putanja čestice mora proći kroz točke A= (0,0) i B = (a,b) samo jednom, tu krivulju možemo opisati kao glatku funkciju jedne varijable $y = y(x)$. Gdje graf predstavlja putanju čestice. Iz zakona o očuvanju energije, neovisno o obliku krivulje R, znamo da će čestica m pri prolasku kroz točku (x,y) imati brzinu $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

potpuno vrijeme silaska je

$$T = \int_0^a dt = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Uzimajući različite funkcije $y(x)$, dobit ćemo različite vrijednosti za T. Drugim riječima, T je broj koji ovisi o funkciji y. Matematički problem je pronaći funkciju $y(x)$ koja će nam dati minimum za varijablu T. S gledišta fizike, funkcija $y(x)$ mora imati određena ograničenja kao što su: mora biti neprekidna, mora biti dvostruko derivabilna, zbog postojanja d^2y/dx^2 ona je izravno povezana s postojanjem ubrzanja čestice. Također je očito da $y(x)$ mora zadovoljavati relacije:

$$y(0) = 0, \qquad y(a) = b$$

s obzirom da krivulja mora proći kroz točke A i B.

Ovako formuliran problem određivanja brahistokrone postaje specijalni, najjednostavniji primjer varijacijskog računa: između svih funkcija $y(x)$ s zadanim vrijednostima u dvije točke, $y(x_0) = y_0$, $y(x_t) = y_t$, pronaći one koje daju ekstrem u integralu

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_t} F(y, y', x)dx$$

gdje je $F(y,y',x)$ eksplicitno zadana funkcija od tri varijable: y, y' *i* x.

3. Euler - Lagrangeove jednadžbe

Uobičajen postupak za pronalaženje ekstrema funkcija od jedne ili više varijabli sastoji se od idućih koraka: izaberemo proizvoljnu točku definiranu s nezavisnim varijablama (x_0, y_0, z_0, ...), zatim uvedemo proizvoljne beskonačno male promjene (dx, dy, dz, . . .) i formiramo totalni diferencijal funkcije $f(x, y, z, \dots)$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \dots$$

s pretpostavkom da su sve parcijalne derivacije izračunate u točki (x_0,y_0, . . .). S obzirom da df mora nestati u ekstremu, bez obzira kakvi su dx, dy, . . ., slijedi da sve parcijalne derivacije moraju nestati u točkama (x_0,y_0, . . .) ako se želi zadovoljiti uvjet za ekstrem

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\\dots}} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\\dots}} = \dots = 0.$$

Rješavanjem gornjeg sustava jednadžbi dobivamo koordinate točke (x_0,y_0, . . .).

Kod varijacijskog postupka koristi se ista osnovna ideja. Umjesto točke (x_0,y_0, . . .) radimo s partikularnom funkcijom $y(x)$, koju ćemo označiti s $\psi(x)$. Za funkciju $\psi(x)$ mora vrijediti:

$$\psi(x_0) = y_{0,} \qquad \psi(x_1) = y_1 \qquad A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$$

Kao sljedeći korak razmatra se mala promjena funkcije $\psi(x)$ tako što se mali umnožak druge funkcije u(x) doda na $\psi(x)$:

$$\psi(x) \to \psi(x) + \varepsilon u(x)$$

s obzirom da funkcija mora prolaziti točkama (x_0,y_0) i (x_1,y_1), to znači da u(x) mora biti jednaka nuli u tim točkama. Inače u(x) je skoro proizvoljna ali se mora dobro ponašati baš kao i $\psi(x)$. Na taj je način u osnovi moguće proizvoljno promijeniti oblik funkcije $\psi(x)$ sve dok se nova funkcija zadrži infinitezimalno blizu ψ(x), tako što izaberemo dovoljno mali ε. Član εu(x) često se označava s δψ i zove se varijacija funkcije ψ. Razlika između dψ i δψ je u tom što ψ ovisi o beskonačnom broju parametara (*x, y, z,* . . .), pa δψ predstavlja beskonačan broj neovisnih promjena, dok dψ predstavlja samo promijenu varijable ψ.

Promjena oblika funkcije ψ(x) rezultira promjenom vrijednosti integrala J. Naime, vrijednost podintegralne funkcije F se mijenja u svakoj točki x budući da su vrijednosti y i y' promijenjene u svakoj točki x

$$\mathrm{y(x) = \psi(x) + \varepsilon u(x) \qquad y'(x) = \psi'(x) + \varepsilon u'(x).}$$

Stoga nova vrijednost F(y, y', x) razvijena do članova prvog reda po ε glasi

$$\mathrm{F(\psi + \varepsilon u, \psi' + \varepsilon u', x)} \cong F(\psi, \psi', x) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\substack{y=\psi \\ y\prime=\psi\prime}} * \varepsilon \mathrm{u} + \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{\substack{y=\psi \\ y\prime=\psi\prime}} * \varepsilon \mathrm{u}'.$$

Napominjemo da funkciju F treba prvo derivirati po y i y' a tek potom uvrstiti funkcijske izraze ψ(x) i ψ'(x). Kao rezultat ovog razmatranja integral J će se promijeniti za δJ:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} F(\psi + \varepsilon \mathrm{u}, \psi' \varepsilon \mathrm{u}', \mathrm{x}) dx$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} F(\psi, \psi', x) dx \cong \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \left(\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\substack{y=\psi \\ y'=\psi'}} * u + \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{\substack{y=\psi \\ y'=\psi'}} * \mathrm{u}' \right) dx.$$

Provede li se parcijalna integracija drugog člana gornjeg izraza, uz uzimanje u obzir da je u(x_0) = u(x_1) = 0, nakon sređivanja dobije se sljedeći izraz

$$\delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \left.\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\right|_{\substack{y=\psi \\ y'=\psi'}} u\, dx.$$

Jednostavnom se argumentacijom može doći do zaključka da δJ mora iščeznuti u minimumu. Naime, za dovoljno mali ε predznak δJ određen je članovima prvog reda pa bi, u slučaju da je $\delta J \neq 0$, s odgovarajućim predznakom ε dobili $\delta J < 0$ (što znači da nismo u minimumu). Slična se argumentacija može provesti i za maksimum. Zaključujemo da $\delta J = 0$ nužan uvjet za minimum, a kako to mora vrijediti za proizvoljni u(x) i dovoljno mali ali konačan ε, slijedi da je

$$\int_{x_0}^{x_1} \left.\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\right|_{\substack{y=\psi \\ y'=\psi'}} u\, dx = 0.$$

što se čini mogućim samo ako vrijedi

$$\left.\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\right|_{\substack{y=\psi \\ y'=\psi'}} = 0.$$

Rigorozna potvrda gornje tvrdnje posljedica je sljedećeg teorema:

Fundamentalni teorem varijacijskog računa. Ako je $f(x)$ neprekidna na intervalu (x_0,x_1) i ako integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx$$

iščezava za svaku kontinuirano diferencijabilnu glatku funkciju $g(x)$ na intervalu (x_0,x_1) i koja iščezava za $x = x_0$ i $x = x_1$, tada je $f(x) = 0$ za $x_0 \leq x \leq x_1$.

Dokaz. Neka je $f(\xi) \neq 0$ za neki ξ takav da je $x_0 < \xi < x_1$. Pretpostavimo da je $f(\xi) > 0$. Zbog kontinuiranosti $f(x)$ mora postojati interval $(\xi - \varepsilon, \ \xi + \varepsilon)$ takav da je $f(x) > 0$ za $\xi - \varepsilon \leq x \leq x + \varepsilon$

$$g(x) = \begin{cases} (x - \xi + \varepsilon)^2 (x - \xi - \varepsilon)^2, & (\xi - \varepsilon \leq x \leq \ \xi + \varepsilon) \\ 0, & (inače). \end{cases}$$

Lako je provjeriti da je $g(x)$ glatka u intervalu (x_0,x_1) a iščezava za $x = x_0$ i $x = x_1$. Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f(x)(x - \xi + \varepsilon)^2 (x - \xi - \varepsilon)^2 \, dx$$

je pozitivan s obzirom da je $f(x)>m$, gdje je m minimum od $f(x)$ u $(\xi - \varepsilon, \ \xi + \varepsilon)$ i m mora biti pozitivan s obzirom da je $f(x)$ pozitivno. Ovo eliminira mogućnost da je $f(\xi) > 0$ za neki ξ. Rezultat prethodne analize je taj da izraz

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

mora nestati kad god je y zamijenjen s funkcijom $\psi(x)$ što integral J čini ekstremom. Ovaj se izraz nekada naziva *Lagrangeova derivacija* $F(y, y', x)$ po varijabli $y(x)$ i označava se s $\frac{\delta F}{\delta y}$. Da bi pojednostavili označavanje, funkcija $\psi(x)$ može biti preimenovana u $y(x)$ i tada mora zadovoljiti relaciju

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \equiv \frac{\delta F}{\delta y} = 0,$$

poznatu kao Euler - Lagrangeova jednadžba. To je obična diferencijalna jednadžba drugog reda po $y(x)$. Uistinu parcijalne derivacije funkcije $F=F(y, y', x)$ su općenito neke funkcije od y, y' i x:

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \varphi(y, y', x), \qquad \frac{\delta F}{\delta y'} = \chi(y, y', x).$$

Prema tome

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{dx}{dx} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}y' + \frac{\partial x}{\partial y'}y''$$

ili

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y''.$$

Euler - Lagrangeova jednadžba mora biti oblika

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y'}=0.$$

S obzirom da su sve parcijalne derivacije F funkcije od y, y' i x, ova diferencijalna jednadžba nema viših derivacija od druge po y.

Funkcije koje zadovoljavaju Euler - Lagrangeovu jednadžbu, kao i prigodne granične uvjete, osiguravaju da varijacija δJ funkcije J iščezava u okviru prvog reda. Ovo je nužan ali ne i dovoljan uvjet jer se može dogoditi da je $\delta J = 0$ u okviru prvog redu a da nije ostvaren ekstrem.[1] U svakom slučaju Euler – Lagrangeova jednadžba određuje točku gdje je integral J stacionaran. Potrebna je dodatna provjera kako bi se odredilo je li u pitanju ekstrem ili ne.

Prethodnu analizu možemo primijeniti na problemu brahistokrone. S obzirom da je faktor $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ konstanta, za problem brahistokrone možemo napisati

$$F(y,y',x)=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}=(1+y'^2)^{1/2}y^{-1/2}$$

i izračunati

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},\qquad \frac{\partial F}{\partial y'}=y'(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}y''-y'^2(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}y''-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}y'^2(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Formiranjem Euler – Lagrangeovu jednadžbe i pojednostavljenjem dobije se

$$2y''y+1+y'^2=0$$

Budući da dobivena diferencijalna jednadžba ne sadrži x možemo napraviti standardnu zamjenu

$$y'=p,\qquad y''=(dp/dy)p$$

te provesti jednostavnu integraciju koja daje

$$y\left(1+y'^2\right)=k$$

gdje je k neka neodređena konstanta. Nadalje slijedi

$$dx=\sqrt{\frac{y}{k-y}}\,dy.$$

Pogodna zamjena je $y=(k/2)(1-\cos\theta)=k\sin^2(\theta/2)$

[1]Ova situacija je analogna kod korištenja funkcija više varijabli: točka gdje sve parcijalne derivacije iščezavaju ne mora biti ekstrem, može biti samo točka pregiba.

$$dx = k\, sin^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$x = \frac{k}{2}(\theta - sin\theta) + k_1 \quad (k_1\, je\, konstanta).$$

Izborom da je $\theta = 0$ u točki A= (0,0), zaključujemo da je $k_1 = 0$. Konstanta k, i pripadajuća vrijednost θ može se dobiti iz uvjeta da naša krivulja prolazi kroz točku B = (*a*,*b*):

$$a = \frac{k}{2}(\theta - sin\theta), \quad b = \frac{k}{2}(1 - cos\theta)$$

Prema tome, brahistokrona je opisana u parametarskom obliku:

$$x = \frac{k}{2}(\theta - sin\theta), \quad y = \frac{k}{2}(1 - cos\theta).$$

Ove jednadžbe predstavljaju cikloidu koja daje minimum za vrijeme T.

4. Hamiltonovo načelo

Krenut ćemo od poznatog varijacijskog problema da pronađemo putanju koja ovaj integral

$$J = \int_{x_0}^{x_t} F(y, y', x)dx$$

minimizira. On se svodi na diferencijalnu jednadžbu nepoznate funkcije y(x). Ako je dana diferencijalna jednadžba drugog reda za nepoznatu funkciju y(x), onda bi trebalo biti moguće povezati y(x) s nekim varijacijskim problemom. Zamislimo na primjer diferencijalnu jednadžbu harmonijskog oscilatora

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Nezavisna varijabla je vrijeme t i funkcija koju tražimo je x(*t*). Lako je konstruirati funkciju *F*(*x*,*x'*,*t*) takvu da je diferencijalna jednadžba zapravo Euler – Lagrangeova jednadžba za *F*. Funkcija

$$F(x, x', t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

će sigurno zadovoljiti uvjete. Primijetimo da je ova funkcija razlika između kinetičke i potencijalne energije oscilatora. S obzirom da je moment količine gibanja očuvan, *F* je Langrangova funkcija $\Phi(x, \dot{x}, t)$. Ovo nije iznenađujuće s obzirom da je Lagrangeova jednadžba gibanja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = 0$$

identičnog oblika kao i Euler – Lagrangeova jednadžba. Lagranžijan možemo povezati s Hamiltonovim načelom. Među svim gibanjima čestica pod djelovanjem konzervativnih sila između dvije dane točke za vrijeme danog intervala vremena (t_0, t), gibanje mora biti takvo da će integral

$$J = \int_{t_0}^{t} F(x, \dot{x}, t) dt$$

biti stacionaran. Ova tvrdnja je važnija za sustav s više stupnjeva slobode, drugim riječima, za varijacijske probleme koji uključuju više od jedne funkcije.

Promotrimo integral

$$J = \int_{x_0}^{x} F(y, y', z, z', x) dx$$

koji ovisi o dvije nepoznate funkcije y(x) i z(x). Možemo varirati J praveći male izmjene na funkcijskim oblicima od y i z. Ove promjene su nezavisne:

$$\mathrm{y(x)} \to \mathrm{y(x)} + \varepsilon_1 \mathrm{u}_1(\mathrm{x}), \quad \mathrm{z(x)} \to \mathrm{z(x)} + \varepsilon_2 \mathrm{u}_2(\mathrm{x})$$

gdje je $\mathrm{u}_1(\mathrm{x}_0) = \mathrm{u}_1(\mathrm{x}_1) = 0$ i $\mathrm{u}_2(\mathrm{x}_0) = \mathrm{u}_2(\mathrm{x}_1) = 0$. Tada imamo:

$$F(y, \varepsilon_1 \mathrm{u}_1, \dots) \cong F(y, \mathrm{y}', \mathrm{z}, \dots) + \frac{\partial F}{\partial y} \varepsilon_1 \mathrm{u}_1 + \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon_1 \mathrm{u'}_1 + \frac{\partial F}{\partial z} \varepsilon_2 \mathrm{u}_2 + \frac{\partial F}{\partial z'} \varepsilon_2 \mathrm{u'}_2 \dots$$

Parcijalno integriramo kao i prije

$$\partial J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \varepsilon_1 \mathrm{u}_1 + \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} \right] \varepsilon_2 \mathrm{u}_2 \right\} dx.$$

S obzirom da su u_1 i u_2 proizvoljni, postavimo $u_2 = 0$ i napišimo dobivenu Euler – Lagrangeovu jednadžbu po y(x):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

također ako stavimo da je $u_1 = 0$ onda dobivamo jednadžbu za z(x)

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0$$

rješavanjem ove dvije jednadžbe možemo dobiti funkcije y(x) i z(x). Također primjećujemo da će ove parcijalne derivacije od F sadržavati obje nepoznate funkcije i njihove derivacije kao i nezavisnu varijablu x. To znači da će se Euler – Lagrangeove jednadžbe spojiti u sustav diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

U klasičnoj mehanici ovo vodi do formulacije Hamiltonovog načela za sustav od proizvoljnog broja stupnjeva slobode, kao na primjer višečestični sustav. Langranžijan je funkcija od n generaliziranih koordinata $q_1(t)$, $q_2(t)$, ... i njihovih derivacija $\dot{q}_1, \dot{q}_2$, ..., te i vremena. Princip je isti kao i prije, osim što više nije u pitanju jedna čestica, nego je ona zamijenjena s dinamičnim sustavom i vektorima koji određuju njihov položaj. Rješenje je u obliku diferencijalnih jednadžbi ovog oblika:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\right)=0 \quad (i=1,2,\dots,n).$$

5. Problemi koji uključuju Sturm-Liouvilleove operatore

Mnogi problemi u matematičkoj fizici uključuju diferencijalne operatore Sturm-Liouvilleovog tipa:

$$\mathcal{L}=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]-s(x),$$

gdje su funkcije p i s nenegativne, $p(x) \geq 0$, $s(x) \geq 0$, unutar razmatranog intervala. U ovom slučaju neka interval bude (0, L) i proučimo diferencijalnu jednadžbu ovog oblika

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-s(x)y=f(x),$$

gdje je $f(x)$ dana funkcija i y(x) nepoznata funkcija.

$$J=\int_0^L\left[py'^2+sy^2+2fy\right]dx.$$

Funkcije koje imaju konstantnu vrijednost u y(0) = a, y(L) = b i prave J stacionarnim, moraju zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu i obratno. Ako y(x) iščezava za x = 0 i za x = L, što je čest slučaj, možemo pisati:

$$\int_0^L py'^2dx=ypy'|_0^L-\int_0^L y\frac{d}{dx}(py')dx=-\int_0^L y\frac{d}{dx}(py')dx$$

$$J=-\int_0^L(y\mathcal{L}\mathrm{y}-2\mathrm{fy})\mathrm{dx}.$$

Da bi potpuno iskoristili varijacijske formulacije, napravit ćemo dokaz da ako je $p(x) > 0$ i $s(x) \geq 0$ postoji rješenje od

$$\frac{d}{dx}(py')-sy=f$$

koje zadovoljava uvjet y(0) = a, y(L) = b i da je to rješenje jedinstveno.

Pretpostavimo da postoje dva rješenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ koja zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu i rubne uvjete. Što znači da njihova razlika $u = y_1 - y_2$ mora zadovoljavati homogenu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]-s(x)u=0$$

i homogene granice u(0) = u(L) = 0. Ako pomnožimo gornju diferencijalnu jednadžbu s u(x) i integriramo u intervalu od 0 do L

$$\int_0^L u\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right]dx - \int_0^L su^2\,dx = up\frac{du}{dx}\bigg|_0^L - \int_0^L su^2\,dx = 0$$

$$\int_0^L u\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right]dx = up\frac{du}{dx}\bigg|_0^L - \int_0^L p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = -\int_0^L py'^2 dx$$

$$\int_0^L \left(pu'^2 + su^2\right)dx = 0.$$

S obzirom da ni jedan član ne može biti negativan, oba moraju biti 0, ali zbog našeg uvjeta p(x)>0, moramo imati u' = 0 ili u = konstanta. Također u(0) = 0, što znači da u(x) mora biti jednak nuli. Te dolazimo do činjenice da mora postojati samo jedno rješenje y(x) za našu originalnu diferencijalnu jednadžbu i rubne uvjete.

Nastavljajući ka dokazu postojanja, prihvaćamo činjenicu da postoje neka rješenja naše diferencijalne jednadžbe. Želimo pokazati da se može odabrati rješenje koje zadovoljava y(0) = a i y(L) = b. Također prihvaćamo činjenicu da postoje dva linearno neovisna rješenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednadžbe.

Neka $u_1(0)$ bude netrivijalno rješenje homogene diferencijalne jednadžbe tako da $u_1(0) = 0$, onda mora $u_1(L) \neq 0$, inače $u_1(x)$ bi bilo nula. Neka je $u_2(x)$ drugo netrivijalno rješenje homogene jednadžbe tako da $u_2(L) = 0$ i $u_2(0) \neq 0$. Konačno neka je $y_0(x)$ bilo koje rješenje homogene diferencijalne jednadžbe, i kreiramo funkciju

$$y(x) = y_0(x) + C_1u_1(x) + C_2u_2(x).$$

Očigledno, ova funkcija zadovoljava nehomogenu diferencijalnu jednadžbu. Kako bi zadovoljila naše rubne uvjete moramo imati

$$C_1u_1(0) + C_2u_2(0) + y_0(0) \;=\; a$$
$$C_1u_1(L) + C_2u_2(L) + y_0(L) \;=\; b$$

na temelju odabranih svojstava u_1 i u_2 možemo riješiti jednadžbu za C_1 i C_2 eksplicitno.

$$C_1 \;= \frac{b - y_0(L)}{u_1(L)}$$

$$C_2 \;= \frac{a - y_0(L)}{u_2(L)}.$$

Uočavamo da C_1 i C_2 mogu biti jednaki nuli, ali su dobro definirani. Kombiniranjem ovoga sa svojstvom jedinstvenosti, zaključujemo da jedinstveno rješenje naše diferencijalne jednadžbe s rubnim uvjetima postoji.

Sada smo u poziciji da dokažemo sljedeći teorem varijacijskog računa

Teorem. Unutar klase funkcija koje su glatke na (0,L) i zadovoljavaju y(0) = a, y(L) = b, funkcional

$$J = \int_0^L (py'^2 + sy^2 + 2fy)dx \qquad (p(x) > 0, s(x) \geq 0)$$

doseže minimum ako i samo ako y(x) je rješenje Euler-Lagrange jednadžbe. Suština teorema je da sada definitivno govorimo o minimumu, a ne o stacionarnoj točci.

Dokaz. Neka je ψ(x) jedinstveno rješenje diferencijalne jednadžbe i rubnih uvjeta, i neka je y(x) bilo koja druga glatka funkcija koja zadovoljava rubne uvjete. Također neka je $y(x) - \psi(x) = \varphi(x)$; onda je φ glatka i nestaje kada x = 0 i x = L. Sada imamo:

$$y^2 = \psi^2 + 2\psi\varphi + \varphi^2$$

$$y'^2 = \psi'^2 + 2\psi'\varphi' + \varphi'^2$$

i

$$\Delta J = J\{y\} - J\{\psi\} = 2\int_0^L (p\psi'\varphi' + s\psi\varphi + f\varphi)dx + \int_0^L (p\varphi'^2 + s\varphi^2)dx$$

ispostavlja se da je prvi integral nula. Parcijalnom integracijom i koristeći rubne uvjete koje zadovoljava funkcija φ, imamo:

$$\int_0^L p\psi'\varphi' dx = \varphi p\psi' \Big|_0^L - \int_0^L \varphi \frac{d}{dx}(p\psi')dx = -\int_0^L \varphi \frac{d}{dx}(p\psi')dx$$

tako da koristeći diferencijalnu jednadžbu zadovoljenu od strane ψ, dobivamo:

$$\int_0^L (p\psi'\varphi' + s\psi\varphi + f\varphi)dx = \int_0^L \varphi \left[-\frac{d}{dx}(p\psi') + s\psi + f\right] dx = 0$$

stoga

$$\Delta J = \int_0^L (p\varphi'^2 + s\varphi^2)\, dx$$

očigledno, $\Delta J \geq 0$, povrh toga, $\Delta J = 0$ implicira $\varphi = 0$. Drugim riječima, bilo koji prihvatljiv y(x) koji nije identičan ψ(x) će dati veću vrijednost *J* nego vrijednost koja odgovara ψ(x), kao što je navedeno.

6. Rayleigh-Ritz metoda

Razmotrimo ponovno problem rješavanja diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] - s(x)y = f(x),$$

gdje je $p(x) > 0$, $s(x) \geq 0$, uz odgovarajuće rubne uvjete. Konkretno, pretpostavimo $y(0) = y(L) = 0$. Znamo da postoje kompletni skupovi funkcija takvih da se naše rješenje može izraziti kao:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \varphi_n(x).$$

Iz prethodnog poglavlja znamo da je naš problem ekvivalentan minimizaciji funkcionala

$$J = \int_0^L \{p(x)[y'(x)]^2 + s(x)[y(x)]^2 + 2f(x)y(x)\}dx.$$

Supstitucijom našeg izraza za y(x) u integral, slijedi

$$p(x)[y'(x)]^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} Y_m Y_n p(x)\, \varphi'_m(x)\varphi'_n(x).$$

Uz pretpostavku da se integracija može provesti član po član i definiranje

$$\int_0^L p(x)\varphi'_m(x)\varphi'_n(x)\, dx = C_{mn}$$

dobivamo

$$\int_0^L p(x)[y'(x)]^2 dx = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} Y_m Y_n.$$

Tretirajući ostale članove u integralu na sličan način, utvrđujemo da je

$$J = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} Y_m Y_n + 2\sum_{n=1}^{\infty} F_n Y_n,$$

gdje je

$$F_n = \int_0^L f(x)\varphi_n(x)dx,$$

$$A_{mn} = \int_0^L [p(x)\varphi'_m(x)\varphi'_n(x) + s(x)\varphi_m(x)\varphi_n(\varphi)]dx.$$

Za koeficijente A_{mn} i F_n se pretpostavlja da su poznati, zato što je poznat skup funkcija φ_n. Nepoznanice su sada koeficijenti Y_n. Prema teoremu u prethodnom poglavlju, možemo odrediti te koeficijente iz uvjeta da J mora biti minimalan. Taj uvjet zahtjeva da

$$\frac{\partial J}{\partial Y_k} = 0 \qquad (\forall k).$$

Izvršimo li deriviranje i koristimo li očitu činjenicu da $A_{mn} = A_{nm}$, dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} Y_n + F_k = 0 \quad (\forall k).$$

Ovo je sustav beskonačnog broja spregnutih nehomogenih jednadžbi.

Rješenje je jednostavno ako se dogodi da je sustav raspregnut, što je slučaj kada je matrica koeficijenta A_{kn} dijagonalna. To će se dogoditi ako su funkcije $\varphi_n(x)$ svojstvene funkcije operatora

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] - s(x),$$

što se može lako provjeriti. Ako su svojstvene funkcije poznate onda se koeficijenti Y_n mogu jednostavno izračunati bez ikakvih poteškoća (osim, možda spore konvergencije). Pretpostavimo da svojstvene funkcije nisu poznate ili da se metoda njihovog proračuna smatra previše teškom iz drugih razloga, kao što je vrednovanje integrala, u tom slučaju varijacijska formulacija dozvoljava aproksimativni izračun y(x) tehnikom poznatom kao Rayleigh-Ritz metoda. Odabiremo konačan broj N funkcija $\varphi_n(x)$, koje ne moraju biti dio nekog poznatog kompletnog skupa, ali bi trebale biti linearno neovisne. Pretpostavimo da je za neki izbor koeficijenta Y_n izraz

$$\bar{y}(x) = \sum_{n=1}^{N} \bar{Y}_n \varphi_n(x)$$

bliska aproksimacija pravog rješenja y(x). Onda će odgovarajuća vrijednost J, dana kao prije izrazom

$$J\{\bar{y}\} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\bar{Y}_m\bar{Y}_n + 2\sum_{n=1}^{\infty} F_n\bar{Y}_n$$

aproksimirati pravi minimum $J\{y\}$. S druge strane, od svih linearnih kombinacija funkcija $\varphi_n(x)$, možemo, na neki način, tretirati kao najbolju aproksimaciju y(x) onu kombinaciju koja daje J što je bliže moguće vrijednosti $J\{y\}$. To očito znači da moramo odabrati najmanju moguću vrijednost $J\{\bar{y}\}$. U ovoj fazi važnost teorema u prethodnom poglavlju postaje očigledna: kada ne bi znali karakter stacionarne točke J, ne bi mogli reći kako poboljšati bilo koju aproksimaciju $\bar{y}(x)$. Problem minimiziranja $J\{\bar{y}\}$ reducira se na skup jednadžbi

$$\sum_{n=1}^{N} A_{kn}\bar{Y}_n + F_k = 0$$

(k=1,2,...,N).

Ovaj će nehomogeni sustav imati jedinstveno rješenje ako determinanta matrice A nije nula. Međutim, to mora biti slučaj zato što je A pozitivno definitna matrica budući da za svaki netrivijalan izbor $\bar{Y}_n$ imamo

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\bar{Y}_m\bar{Y}_n \;=\; \int_0^L (p\bar{y}'^2 + s\bar{y}^2)\, dx > 0$$

Stoga, sve svojstvene vrijednosti od A su pozitivne i det $A \neq 0$.

Napomena: Kvaliteta Ritzove aproksimacije presudno ovisi o izboru funkcija $\varphi_n(x)$. U praksi, to znači da je potrebno napraviti pretpostavku o obliku rješenja y(x).

7. Varijacijski problemi s ograničenjima

Problemi maksimuma i minimuma često uključuju i određena ograničenja. Na primjer, ekstrem od $F = F(x, y)$ može se tražiti uz ograničenje da su x i y povezani prema jednadžbi oblika

$$G(x, y) = C = \; const.$$

Pretpostavimo da je nezgodno riješiti tu jednadžbu po y, pa je potrebno zamijeniti rezultat u $F(x, y)$, i reducirati problem na ekstrem po jednoj varijabli. U tom slučaju možemo koristiti metodu Lagrange-ovih multiplikatora koja se temelji na sljedećem teoremu.

Teorem. Problem određivanja stacionarnih vrijednosti funkcije $F(x, y)$, uz ograničenje $G(x, y) = C$ ekvivalentan je problemu određivanja stacionarnih vrijednosti, bez ograničenja, funkcije

$$H(x, y) = F(x, y) + \lambda G(x, y)$$

za neku konstantu λ, pod uvjetom da barem jedna parcijalna derivacija $\frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial x}$ ne nestane u točki ekstrema.

Ovaj se teorem može generalizirati na proizvoljan broj varijabli i ograničenja a također ima i svoj analog u varijacijskom računu. Pogledajmo sada ideje i za njega.

Prvo, ako je F stacionarna u bilo kojoj točki (x_0, y_0), onda je $dF = 0$ ili

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \qquad (u\; x_0, y_0).$$

Ovo novo svojstvo uvedeno kroz ograničenje je da dx i dy više nisu samostalni, i ne slijedi da je $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Iz $G(x, y) = C$, proizlazi da vrijedi

$$\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy = 0.$$

Gornja relacija određuje dy u odnosu na dx, ili obrnuto, pod pretpostavkom da je $\partial G/\partial y \neq 0$ ili $\partial G/\partial x \neq 0$. Konkretnije, uz pretpostavku $\partial G/\partial y \neq 0$ pišemo

$$dy = -\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y}dx \quad (u\, x_0, y_0).$$

Zamjenom u $dF = 0$, dobivamo

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx = 0.$$

Kako je $dx \neq 0$ (inače $dy = dx = 0$), imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Međutim, onda mora postojati jedinstven λ takav da

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (u\, x_0, y_0).$$

I doista, takav λ je eksplicitno dan izrazom

$$\lambda = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial G/\partial y}$$

i zadovoljava obje jednadžbe. Prema tome uspostavili smo nužnost ovih jednadžbi za "uvjetnu stacionarnu točku" $F(x,y)$. Naravno, one također karakteriziraju stacionarnu točku $H = F + \lambda G$. Primijetimo da smo morali pretpostaviti da je $\partial G/\partial y \neq 0$ ili $\partial G/\partial x \neq 0$ kako bi nastavili izvod.[2] Za dokaz dovoljnosti Lagrange-ove jednadžbe

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

nema potrebu za uvjetom $\partial G/\partial y \neq 0$ ili $\partial G/\partial x \neq 0$. Doista, pretpostavimo da su gornje jednadžbe točne za neki λ i neku točku (x_0, y_0) takvu da je $G(x_0, y_0) = C$. Promjene dx i dy koje su konzistentne s ograničenjem moraju zadovoljiti

$$\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy = 0 \quad (u\, x_0, y_0)$$

Pomnožimo li prvu Lagrange-ovu jednadžbu s dx, drugu s dy, i zbrojimo, dobivamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \quad (u\, x_0, y_0)$$

što znači da je točka (x_0, y_0) doista stacionarna točka $F(x,y)$ uz dano ograničenje.

Što se tiče varijacijskih problema s ograničenjima, možda najjednostavniji od njih je takozvani *izoperimetrični* problem. On se može opisati na sljedeći način:

Pronađimo stacionarne točke funkcionala

[2]To su situacije u kojima Lagrange-ova metoda ne uspijeva, ali postoji stacionarna vrijednost F uz ograničenje G= konstanta. U takvim slučajevima stacionarnoj točki vrijedi: $\partial G/\partial x = \partial G/\partial y = 0$.

$$J = \int_0^L F(y, y', x)dx$$

u odnosu na varijacije δy koje nestaju u x = a i x = b, ali ostavljaju integral

$$N = \int_0^L G(y, y', x)dx$$

invarijantan na nekoj poznatoj konstantnoj vrijednosti C.

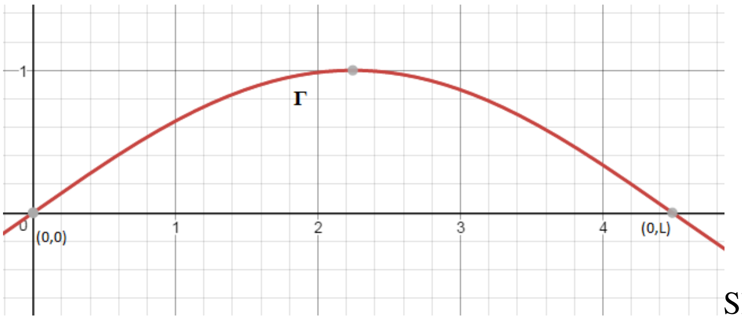
Ime izoperimetričan vuče porijeklo od jednog od najranijih problema ovog tipa. Krivulja Γ (slika 2.) zadane dužine C mora biti nacrtana između točaka $(0,0)$ i $(0, L)$ tako da je površina između krivulje i x-osi maksimalna. Pretpostavimo li da je Γ zadana funkcija jedne varijable y = y(x), problem se svodi na iskaz:

Maksimiziraj

$$J = \int_0^L y dx$$

uz ograničenje

$$\int_0^L \sqrt{1 + y'^2} dx = C.$$



Slika 2. Krivulja Γ

Pojam izoperimetričan koristi se jer varijacije u obliku Γ moraju biti takve da je rub (perimetar koji omeđuje područje ispod krivulje) konstantne duljine, jednake C+L.

Razumno je pretpostaviti da se izoperimetrički problem može riješiti tehnikom analognoj tehnici Lagrange-ovih multiplikatora, to jest tako što se integral

$$K = \int_0^L (F + \lambda G)dx = J + \lambda N$$

Učiniti stacionarnim (za neke λ). To implicira da funkcija y(x) koju tražimo mora zadovoljavati jednadžbu

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] + \lambda \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right] = 0.$$

Lako je pokazati da je ovo dovoljan uvjet (za prikladni λ) za rješenje izoperimetričkog problema. Ako pomnožimo ovu jednadžbu nekom varijacijom δy(x) i integriramo na intervalu$(0, L)$ slijedi:

$$\int_0^L \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \delta y(x) dx + \lambda \int_0^L \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right] \delta y(x) dx = 0.$$

Ovo vrijedi za proizvoljne varijacije δy(x). U izoperimetričkom problemu dopuštene su pak samo one varijacije koje zadržavaju N invarijantnim, odnosno varijacije za koje vrijedi

$$\delta N = \int_0^L \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right] \delta y(x) dx = 0.$$

Slijedi da će za takve varijacije također vrijediti

$$\int_0^L \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right] \delta y(x) dx = 0$$

ili δJ = 0, što znači da je J stacionaran i naša funkcija y(x) rješava izoperimetrički problem. Kako bi dokazali nužnost stacionarnih karaktera K=J+ λN, očekujemo neko ograničenje na y(x). Ispostavlja se da je dotično ograničenje

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right) \neq 0$$

to jest, y(x) ne bi trebala biti takva da čini N stacionarnim samim za sebe.

Teorem. Funkcija y(x) koja čini J stacionarnim za sve varijacije δy i zadržava N konstantnim također čini stacionarnim funkcional K=J+ λN, za neki λ, pod pretpostavkom da $\partial N/\partial y$ ne iščezava za y(x); to jest, y(x) ne zadovoljava Euler-Lagrange jednadžbu za N.

Primjer. Teški lanac dužine C je obješen između točaka $(0, a)$ i (L, b). Pronađimo njegov uravnoteženi oblik.

Iz mehanike, znamo da uravnoteženi oblik mora biti takav da je potencijalna energija minimalna, ili, što je isto, centar gravitacije mora biti najniži mogući. To znači da moramo minimizirati funkcional

$$J = \rho g \int_0^L y ds = \rho g \int_0^L y\sqrt{1 + y'^2} dx,$$

gdje je ρ·ds masa elementa luka ds. Funkcija y je ograničena uvjetom

$$N = \int_0^L ds = \int_0^L y\sqrt{1 + y'^2} dx = C$$

koje predstavlja činjenicu da je dužina lanca C konstantna.

Prema prethodnoj analizi, možemo formirati funkciju

$$H(y, y', x) = y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$$

faktor ρg je irelevantan i može se izbaciti za naš primjer. Sada moramo riješiti Euler-Lagrange jednadžbu za *H*. Pošto *H* ne ovisi eksplicitno o x, možemo koristiti tehniku koju smo koristili prije (stranica 9.) i odmah pisati

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = k = konstanta.$$

Nakon tog dobivamo

$$(y+\lambda)\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = k$$

$$\frac{dx}{dy} = \pm\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{k}\right)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - k^2}} = \frac{dx}{k}.$$

Integrirajući postavljanjem $y+\lambda = k\cosh\theta$ ili jednostavno koristeći tablicu integrala, dobivamo

$$y+\lambda = k\,cosh\frac{x+h}{k},$$

gdje je *h* druga konstanta integracije. Tri konstante *k*, *h*, i λ definirani su sljedećim uvjetima

$$a+\lambda = k\,cosh\frac{h}{k}, \qquad (1)$$

$$b+\lambda = k\,cosh\frac{L+h}{k}, \qquad (2)$$

$$\int_0^L \sqrt{1+y'^2}\,dx = C. \qquad (3)$$

To uključuje rješavanje nekih transcendentalnih jednadžbi, ali detalji su relativno jednostavni. Prvo,

$$y' = sinh\frac{x+h}{k}$$

i integral u (3) se jednostavno izračuna. Koristeći $\sqrt{1+\sinh^2\alpha} = \cosh\alpha$, dobivamo

$$k\,sinh\frac{x+h}{k}\Big|_0^L = C.$$

Osim toga, koristeći

$$\sinh\alpha - \sinh\beta = 2\cosh\frac{\alpha+\beta}{2}\sinh\frac{\alpha-\beta}{2}$$

reduciramo (3) na formu

$$C = 2k\cosh\frac{L+2h}{2k}\sinh\frac{L}{2k}. \qquad (4)$$

Dalje, oduzimanjem (1) i (2) i koristeći

$$\cosh\alpha - \cosh\beta = 2\sinh\frac{\alpha+\beta}{2}\sinh\frac{\alpha-\beta}{2}$$

utvrđujemo

$$b - a = 2k\sinh\frac{L+2h}{2k}\sinh\frac{L}{2k}. \qquad (5)$$

Dijeljenjem posljednje dvije jednadžbe, dobivamo

$$\frac{b-a}{C} = \tanh\frac{L+2h}{2k}$$

iz čega se jednostavno pronalazi vrijednost $(L+2h)/2k$. Također, kvadriranjem i oduzimanjem (4) i (5), vidimo da

$$C^2 - (b-a)^2 = 4k^2\sinh^2\frac{L}{k}$$

ili

$$\frac{\sinh\frac{L}{k}}{L/k} = \frac{\sqrt{C^2-(b-a)^2}}{L}$$

što daje vrijednost L/k. Ostatak je trivijalan.

8. Varijacijska formulacija svojstvenih problema

U ovom ćemo dijelu razmotriti problem varijacijske formulacije diferencijalne jednadžbe svojstvenih vrijednosti, kao što je Sturm-Liouville jednadžba

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - s(x)y = -\lambda r(x)y$$

gdje y(x) mora zadovoljiti odgovarajuće rubne uvjete. Ograničit ćemo se na slučaj homogenih Dirichlet uvjeta na konačnom intervalu, recimo $(0, L)$:

$$y(0) = y(L) = 0$$

Koristeći dosadašnja iskustva, možemo utvrditi bez velikih poteškoća da će funkcional

$$K = \int_0^L (py'^2 + sy^2 - \lambda r y^2)dx$$

posjedovati Euler-Lagrangeovu jednadžbu u obliku koji je nama potreban. Također je vrijedno opaziti da se, s obzirom na rubne uvjete, gornji funkcional može pisati u obliku [3]

$$K = \int_0^L [-y\mathcal{L}y + ysy - y\lambda r y]dx$$

[3]Naravno, prvi se član mora parcijalno integrirati i moraju se koristiti granični uvjeti.

gdje je $\mathcal{L} = (d/dx)[p(x)(d/dx)]$. Ovaj izraz pokazuje da je K sastavljen od skalarnih produkata u prostoru y-funkcija:

$$K = -(y, \mathcal{L}y) + (y, sy) - (y, \lambda ry),$$

gdje je y vektor a $\mathcal{L}$, s, i λr su operatori u prikladnom linearnom prostoru.

Međutim, ako pogledamo originalni integral za *K*, pošto je λ još nepoznat parametar, logično je povezati naš funkcional s razvojima od prije i tretirati problem svojstvenih vrijednosti kao varijacijski problem s ograničenjima. Konkretno, y(x) je funkcija koja čini stacionarnim integral

$$J = \int_0^L (py'^2 + sy^2)\, dx$$

uz ograničenje

$$N = \int_0^L ry^2\, dx = konstanta.$$

Pretpostavili smo da su sve korištene funkcije realne. Međutim, generalizacija do kompleksnih prostora je izravna. Varijacijska formulacija za svojstvene vrijednosti sada dozvoljava korištenje Rayleigh-Ritz tehnike. Prvo, ako proširimo y(x) u smislu nekog kompletnog skupa $\{\varphi_n(x)\}$ u našem linearnom prostoru funkcija

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n\, \varphi_n(x)$$

i zamijenimo u *K*, onda dobivamo

$$K = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} - \lambda R_{mn}) Y_m\, Y_n,$$

$$R_{mn} = \int_0^L r(x)\, \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx.$$

Za odabrani skup $\{\varphi_n(x)\}$, koeficijenti A_{mn} i R_{mn} su fiksni i stacionarne vrijednosti K su određene uvjetima

$$\frac{\partial K}{\partial Y_j} = 0 \quad (\forall j)$$

koji rezultira sustavom jednadžbi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} - \lambda R_{mn}) Y_n = 0 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Ovo je sada beskonačni skup homogenih algebarskih jednadžbi i teže ih je riješiti nego originalnu Sturm-Liouville diferencijalnu jednadžbu.

Najveća vrijednost Rayleigh-Ritz metode leži u aproksimaciji rješenja y(x) a ne u točnom izračunu. Ova karakteristika vrijedi i za problem određivanja svojstvenih vrijednosti. Odaberimo konačan skup N linearno neovisnih funkcija $\{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_N\}$ u našem prostoru i formirajmo linearnu kombinaciju

$$\bar{y}(x) = \sum_{n=1}^{N} \bar{Y}_n \bar{\varphi}_n(x).$$

Izmjenjujući $\bar{y}(x)$ u integral za K i izvršavajući iste operacije kao prije, dobivamo konačan skup algebarskih jednadžbi

$$\sum_{n=1}^{N} (\bar{A}_{mn} - \bar{\lambda}\bar{R}_{mn}) \bar{Y}_n = 0$$

Gdje su $\bar{A}_{mn}$ i $\bar{R}_{mn}$ definirani na isti način kao A_{mn} i R_{mn} osim što je φ_n zamijenjen s $\bar{\varphi}_n$. Kako bi postojao netrivijalan skup $\bar{Y}_n$, determinanta sustava mora nestati, što daje N vrijednosti (koje ne moraju sve biti različite) za $\bar{\lambda}$. Nakon tog se mogu odrediti pridružene funkcije $\bar{y}(x)$.

Kako bi se vidjela relacija između $\bar{\lambda}$ i pravih λ, primijetimo da u slučaju kada je y(x) rješenje Sturm-Liouville jednadžbe, onda K zapravo nestaje i možemo pisati

$$\lambda = \frac{\int_0^L (py'^2 + sy^2)\, dx}{\int_0^L ry^2\, dx} = \frac{J\{y\}}{N\{y\}}.$$

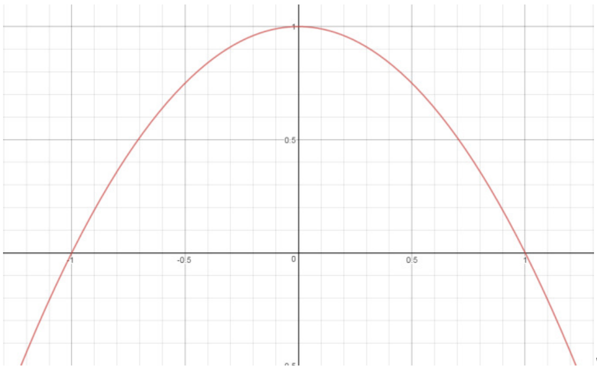
Slična relacija vrijedi između $\bar{\lambda}$ i $\bar{y}(x)$. Iz jednadžbi za $\bar{Y}_n$, slijedi (kada se svaka pomnoži s $\bar{Y}_m$ i rezultati zbroje):

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \bar{A}_{mn}\, \bar{Y}_m\, \bar{Y}_n}{\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \bar{R}_{mn}\, \bar{Y}_m\, \bar{Y}_n} = \frac{\int_0^L (p\bar{y}'^2 + s\bar{y}^2)\, dx}{\int_0^L r\bar{y}^2\, dx} = \frac{J\{y\}}{N\{y\}}.$$

Stoga, ako je $\bar{y}(x)$ "blizu" prave svojstvene funkcije y(x), onda će $\bar{\lambda}$ biti blizu λ. U praksi, metoda je najuspješnija u aproksimiranju najmanje svojstvene vrijednosti. Primijetimo da pod uobičajenim pretpostavkama $p > 0, s \geq 0$ uvijek imamo $J > 0$. Zahtijevat ćemo, zbog praktičnosti, da je $N = 1$. To znači da je spektar svojstvenih vrijednosti omeđen odozdo. Razumno je pretpostaviti da za neku funkciju $y_1(x)$, integral J doista ostvaruje svoju donju granicu, što je onda najmanja svojstvena vrijednost λ_1. Ako imamo uvid u to „kako funkcija $y_1(x)$ izgleda“, možemo odabrati skup $\bar{\varphi}_n$ takav da će neke njegove linearne kombinacije biti „blizu“ funkcije $y_1(x)$. Ta se linearna kombinacija onda dobiva opisanom procedurom kao ona koja daje najmanju vrijednost $\bar{\lambda}$.

Primjer. Riješi jednadžbu. $y'' = -\lambda y$ uz rubne uvjete $y(\pm 1) = 0$.

Pretpostavimo da ne znamo najmanju svojstvenu funkciju [$y_1(x) = \cos(\pi x/2)$] ali očekujemo da je slična krivulji prikazanoj na slici 3. Mi tražimo aproksimaciju te funkcije parabolom $\bar{y}(x) = \bar{Y}(1 - x^2)$, gdje je parametar $\bar{Y}$ ostavljen neodređen. Koristeći $\bar{y}'(x) = -2\bar{Y}x$, formiramo integral $(p = 1,\ s = 0,\ r = 1)$


Slika 3.

$$K = \int_{-1}^{+1} \bar{Y}^2[4x^2 - \lambda(1 - x^2)^2]dx = \bar{Y}^2\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\lambda\right).$$

Budući da je $\bar{Y} \neq 0$, utvrđujemo odmah iz $\partial K/\partial \bar{Y} = 0$ da je $\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\bar{\lambda} = 0$ ili $\bar{\lambda} = 2.5$. Dobivena vrijednost je dosta blizu s točnoj svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = \pi^2/4 = 2.467...$

U ovom smo se slučaju ograničili na skup $\{\bar{\varphi}_n\}$ koji se sastoji od samo jedne funkcije. Bolja je aproksimacija moguća s dvije funkcije. Odaberimo

$$\bar{\varphi}_1 = 1 - x^2, \qquad \bar{\varphi}_2 = x^2(1 - x^2)$$

i tražimo $\bar{y}(x)$ kao linearnu kombinaciju

$$\bar{y}(x) = \bar{Y}_1\bar{\varphi}_1 + \bar{Y}_2\bar{\varphi}_2 = (1 - x^2)(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2x^2)$$

Onda

$$\bar{y}' = -2x^2(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2x^2) + 2\bar{Y}_2x(1 - x^2).$$

Pronalazimo da zamjenom u integral K daje

$$K = \frac{8}{315}\left[\left(105 - 42\bar{\lambda}\right)\bar{Y}_1^{\ 2} + \left(42 - 12\bar{\lambda}\right)\bar{Y}_1\bar{Y}_2 + (33 - 2\bar{\lambda})\bar{Y}_2^{\ 2}\right].$$

Iz uvjeta $\partial K/\partial \bar{Y}_1 = 0$ i $\partial K/\partial \bar{Y}_2 = 0$, dobivamo

$$\left(35 - 14\bar{\lambda}\right)\bar{Y}_1 + \left(7 - 2\bar{\lambda}\right)\bar{Y}_2 = 0, \qquad \left(21 - 6\bar{\lambda}\right)\bar{Y}_1 + \left(33 - 2\bar{\lambda}\right)\bar{Y}_2 = 0.$$

Ova karakteristična jednadžba $\bar{\lambda}^2 - 28\bar{\lambda} + 63 = 0$ daje korijene

$$\bar{\lambda}_1 = 2.46744\ ...$$

$$\bar{\lambda}_2 = 25.6\ ...$$

Prva od ovih vrijednosti se razlikuje od λ_1 za manje od 0.002%. Zanimljivo je primijetiti da druga vrijednost aproksimira treću najmanju svojstvenu vrijednost, radije nego drugu, iako s manjom točnošću nego prije, pošto je točna vrijednost $\lambda_3 = 9\pi^2/4 = 22.2\ ...$. Nije teško objasniti razlog zašto smo preskočili drugu najmanju svojstvenu vrijednost. Prava svojstvena funkcija $y_2(x) = \sin \pi x$ je neparna funkcija, dok su oba $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$ parne funkcije te stoga ne mogu biti iskorištene da aproksimiraju y_2. Ovaj primjer pokazuje jasno važnost pravog izbora skupa $\{\bar{\varphi}_n\}$.

Primjer. Izračunaj najmanji korijen Basselove funkcije $J_3(x)$. Poznato je da su korijeni $J_m(x)$ povezani sa svojstvenim vrijednostima. Basselova diferencijalna jednadžba m-tog reda

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$$

ima rješenje $y(x) = J_m(kx)$. Ako se postavi rubni uvjet $y(1) = 0$, onda k mora biti korijen $J_m(x)$. Ako napišemo Basselovu jednadžbu u Sturm-Liouville obliku,

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - \frac{m^2}{x}y = -\lambda xy$$

tako da $p(x) = x$, $s(x) = m^2/x$, $r(x) = x$, i $\lambda = k^2$. Poznato je da $J_3(x)$ ima nulu trećeg reda u ishodištu. Stoga probna funkcija oblika

$$\bar{y}(x) = \bar{Y}x^3(1-x)$$

može biti razumna aproksimacija. Slijedi

$$K = \int_0^L (p\bar{y}'^2 + s\bar{y}^2 - \bar{\lambda}r\bar{y}^2)\,dx =$$

$$= \bar{Y}^2 \int_0^L \left\{x[9x^4(1-x)^2 - 6x^5(1-x) + x^6] + \frac{9}{x}[x^6(1-x)^2)] - \bar{\lambda}xx^6(1-x)^2\right\}dx.$$

Ovo se reducira na $K = \bar{Y}^2\left(\frac{1}{8} - \bar{\lambda}/360\right)$ i daje $\bar{\lambda} = 45$ tako da je $k = \sqrt{45} = 6.70$.

Pošto je točni korijen 6.379, postoji razlika od oko 5%.

9. Varijacijski problemi u više dimenzija

Do sada smo se bavili s funkcionalima koji su sadržavali samo jednu neovisnu varijablu x. Nije teško proširiti teoriju na više neovisnih varijabli. Razmotrimo, na primjer, funkcional

$$J = \iint_D F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right) dxdy,$$

ovisno o nepoznatoj funkciji $u(x,y)$ s dvije variable. Pretpostavlja se da je D omeđeno područje u (xy)-ravnini s propisanim vrijednostima $u(x,y)$ na svojoj granici S. Zadatak je odrediti $u(x,y)$ takav da je J stacionaran uzevši u obzir male promjene u funkcionalnoj formi u.

Koristimo tehniku analognu onoj korištenoj u poglavlju 3. . Zamijenimo funkciju $u(x,y)$ s funkcijom $u(x,y)+\epsilon v(x,y)$, gdje je $v(x,y)$ proizvoljna funkcija lijepog ponašanja (engl. well-behaved), koja nestaje na granici S. Za male vrijednosti ϵ promjene δJ mogu se ograničiti na članove prvog reda po ϵ. Za stacionarnu vrijednost J ovi članovi prvog reda iščezavaju što odgovara uvjetu[4]:

$$\left(\frac{dJ}{d\epsilon}\right)\Bigg|_{\epsilon\,=\,0}=0.$$

Zbog praktičnosti u nastavku pišemo $\partial u/\partial x=u_x$,$\partial v/\partial x=v_x$, itd. Slijedi

$$\frac{dJ}{d\epsilon}=\iint\limits_D\left[\frac{\partial F}{\partial u}v+\frac{\partial F}{\partial u_x}v_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}v_y\right]dxdy.$$

Parcijalnom integracijom dobije se:

$$\iint\limits_D\left(\Phi\frac{\partial v}{\partial x}+\psi\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=\oint_S\ v(\Phi\mathrm{dy}-\psi\mathrm{dx})-\iint\limits_D v\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy,$$

što se može dobiti iz Greenovog teorema

$$\oint_S\ (Pdx+Qdy)=\iint\limits_D\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

nakon postavljanja $P=v\phi$ i $Q=-v\psi$.

U našem problemu identificiramo $\phi=\partial F/\partial u_x$ i $\psi=\partial F/\partial u_y$ i utvrđujemo

$$\frac{dJ}{d\epsilon}=\oint_S\ v\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{dx}-\frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{dy}\right)+\iint\limits_D\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{D}{Dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{D}{Dy}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right]dxdy.$$

Ovdje se uvodi nova notacija, D/Dx i D/Dy. Da bi ju jasno razumjeli, ističemo da za $F=F\big(u,u_x,u_y,x,y\big)$, općenito imamo

$$\frac{\partial F}{\partial u_x}=\Phi\big(u,u_x,u_y,x,y\big).$$

Značenje Greenovog teorema zahtjeva da deriviramo ϕ zadržavajući y konstantnim, ali vodeći pri tom računa da su u, u_x, i u_y su također funkcije x. Ova je operacija eksplicitno definirana kao

$$\frac{D\Phi}{Dx}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_x}\frac{\partial^2\mathrm{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

[4]Ranije smo pokazali da je $\delta J=\epsilon J'$ i zahtijevali $J'=0$. Međutim, J' nije ništa drugo nego $(dJ/d\epsilon)\big|_{\epsilon=0}$.

i može se nazvati totalna parcijalna derivacija, za razliku od eksplicitne parcijalne derivacije $\partial\phi/\partial x$. Vraćajući se na jednadžbu za $dJ/d\epsilon$, uočavamo da prvi član nestaje pošto je $v = 0$ na S. Pošto je v proizvoljan, nestajanje drugog člana rezultira s Euler-Lagrangovom jednadžbom[5]

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{D}{Dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{D}{Dy}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0.$$

Proširenje ove tehnike na tri ili više dimenzija je jednostavno.

Za većinu uobičajenih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi matematičke fizike, možemo konstruirati potrebni funkcional J bez većih poteškoća jednostavnim uvidom. Na primjer, funkcional

$$J = \iiint \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dxdy\, dz$$

dovodi do Laplace-ove parcijalne diferencijalne jednadžbe u tri dimenzije,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

kao njene Euler-Lagrangeove jednadžbe.

Primjer. Rastegnuto uže može se smatrati kao sustav s beskonačno mnogo stupnjeva slobode, svaki element dx se tretira kao djelić mase *ρ·dx*. Stoga formula za kinetičku energiju u sustavu čestica

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{q}_i^2,$$

postaje integral,

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\int_0^L (\rho dx)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

Potencijalna energija deformiranog užeta se najlakše izračunava kao rad odrađen protiv sile napetosti T. Dužina deformiranog užeta je malo veća nego originalna dužina L i dana je sa sljedećim izrazom

$$L' = \int_0^L ds = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx.$$

Za male deformacije, imamo

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

[5] Uvjet $\epsilon = 0$ u $(dJ/d\epsilon)\big|_{\epsilon=0}$ je ekvivalentan zamjenom *u* u integralu sa stvarnim rješenjem *u*, koje čini *J* stacionarnim.

Stoga, istegnutost ΔL užeta je približno

$$\Delta L = L' - L = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

dok je potencijalna energija (rad izvršen na T) određen s

$$E_{pot} \cong T\Delta L \cong \frac{T}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

Ova analiza dozvoljava da pišemo Lagranžijan za naš sustav

$$\mathcal{L} = E_{kin} - E_{pot} = \int_0^L \left[\frac{p}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx.$$

Prema Hamilton-ovom principu kretanje užeta mora biti takvo da integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^L \left[\frac{p}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx\, dt$$

gdje su t_0 i t_1 dva proizvoljna trenutka u vremenu, stacionarna. Euler-Lagrangeova jednadžba za J onda uzima oblik

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \Lambda}{\partial u_t} + \frac{D}{Dx}\frac{\partial \Lambda}{\partial u_x} = 0$$

gdje se vrijednost

$$\Lambda = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

uobičajeno naziva gustoća lagranžijana. Uvrštavanjem gustoće lagranžijana u gornju jednadžbu, možemo reducirati našu Euler-Lagrangeovu jednadžbu na poznati oblik

$$-T\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

10. Formulacija svojstvenih vrijednosti metodom omjera

Teorem. Omjer dva funkcionala

$$\omega = \frac{(\mathbf{x}, \mathcal{L}\mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathcal{R}\mathbf{x})}$$

će biti stacionaran za male varijacije $\delta\mathbf{x}$ vektora $\mathbf{x}$ ako i samo ako $\mathbf{x}$ zadovoljava poopćenu jednadžbu svojstvenih vrijednosti

$$\mathcal{L}\mathbf{x} = \lambda\mathcal{R}\mathbf{x},$$

gdje su svojstvene vrijednosti λ stacionarne vrijednosti funkcionala ω.

Prije nego krenemo s dokazivanjem teorema, ilustrirajmo ga s nekoliko primjera.

Primjer. *Sturm-Liouville problem s homogenim Dirichletovim uvjetima.* U ovom se slučaju linearni prostor sastoji od dvostruko (dva puta) diferencijabilnih funkcija na (0,L) koje iščezavaju u x=0 i x=L. Izraz za ω glasi

$$\omega = \frac{\int_0^L y(x)\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - s(x)y\right\}dx}{\int_0^L r(x)\,[y(x)]^2 dx}$$

Primjer. *Helmholtz-ova jednadžba u omeđenom području u tri dimenzije*,

$$\nabla^2\psi(x,y,z) + \lambda\psi(x,y,z) = 0 \qquad (\text{u } V)$$

s graničnim uvjetima

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} + h\psi = 0 \qquad (\text{na } S),$$

gdje je S zatvorena površina koja ograđuje V, $\partial\psi/\partial n$ je normalni gradient ψ na S, i h je konstanta. Varijacijska formulacija je karakterizirana s

$$\omega = -\frac{\iiint_V \psi\nabla^2\psi dV}{\iiint_V \psi^2\, dV} \qquad (\psi\ je\ realan).$$

Pomoću prve Green-ove formule i rubnih uvjeta, ovaj izraz se također može pisati kao

$$\omega = -\frac{-\iiint_V (grad\,\psi\ grad\,\psi)dV + \oiint_S \psi(grad\,\psi\ dS)}{\iiint_V \psi^2\, dV}$$

$$= \frac{\iiint_V (grad\,\psi\ grad\,\psi)dV + h\oiint_S \psi^2\, dS}{\iiint_V \psi^2\, dV}.$$

Primjer. *Algebarski problem svojstvenih vrijednosti u N-dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru,*

$$Ax = \lambda x,$$

gdje je x N-torka dok je A N x N simetrična matrica. U ovom slučaju, eksplicitno,

$$\omega = -\frac{\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N a_{ij}x_ix_j}{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Primjer. *Schrödingerova jednadžba*

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + U(x,y,z)\psi = E\psi$$

u prostoru kvadratno integrabilnih kompleksnih funkcija tj onih za koje

$$\iiint_{prostor} \psi^*\psi\, dV < \infty.$$

Izraz za ω glasi

$$\omega = -\frac{\iiint_{prostor}\left\{\frac{h^2}{2M}(grad\,\psi^* \;\; grad\,\psi) + U\psi^*\psi\right\}dV}{\iiint_{prostor}\psi^*\psi\,dV}$$

gdje se ponovno koristi prva Greenova formula.

Vratimo se dokazu teorema. Zamjenjujući $\mathbf{x}$ s proizvoljnom varijacijom $\delta\mathbf{x}$ i računajući promjenu $\delta\omega$, koristeći linearnost i hermitičnost $\mathcal{L}$ i svojstva skalarnog umnoška, zaključujemo

$$\big(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\mathcal{L}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})\big) = (\mathbf{x},\mathcal{L}\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x},\mathcal{L}\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x},\mathcal{L}\mathbf{x})^* + (\delta\mathbf{x},\mathcal{L}\delta\mathbf{x}),$$

a slično i za $\mathcal{R}$. Stoga, ispuštanjem članova drugog reda po δx u brojniku izraza, imamo

$$\omega = \frac{\big(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},\mathcal{L}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})\big)}{\big(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})\big)} - \frac{(\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x})}$$

$$= \frac{[(\delta\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x}) + (\delta\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x})^*](\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x})[(\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x}) + (\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x})^*]}{\big(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})\big)(\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x})}$$

Sada ako $\mathcal{L}x = \lambda\mathcal{R}x$ vrijedi, onda je poznato da je λ realan.[6] Brojnik se reducira na

$$[\lambda(\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x}) + \lambda(\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x})^*](\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x}) - \lambda(\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x})[(\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x}) + (\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x})^*] = 0$$

i dovoljnost jednadžbe svojstvenih vrijednosti je utvrđena.

S druge strane, ako pretpostavimo da je $\delta\omega = 0$ i označavajući stacionarnu vrijednost ω sa λ, tako da $(\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x})$. Iz $\delta\omega = 0$, tada slijedi da

$$[(\delta\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x}) + (\delta\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x})^*] - \lambda[(\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x}) + (\delta\boldsymbol{x},\mathcal{R}\boldsymbol{x})^*] = 0$$

ili

$$(\delta\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x} - \lambda\mathcal{R}\boldsymbol{x}) + (\delta\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x} - \lambda\mathcal{R}\boldsymbol{x})^* = 0.$$

Ovo mora biti točno za sve δx. Zamijenimo li δx s $i\delta x$, jednostavno zaključujemo da

$$(\delta\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x} - \lambda\mathcal{R}\boldsymbol{x}) - (\delta\boldsymbol{x},\mathcal{L}\boldsymbol{x} - \lambda\mathcal{R}\boldsymbol{x})^* = 0$$

i iz $(\delta\boldsymbol{x}, L\boldsymbol{x} - \lambda R\boldsymbol{x}) = 0$, slijedi da $L\boldsymbol{x} = \lambda R\boldsymbol{x}$, što uspostavlja nužnost jednadžbe svojstvenih vrijednosti.

Razumljivo ograničenja na $\mathbf{x}$ se ovdje ne pojavljuju. Inače bi Euler-Lagrangeova jednadžba za N glasila $\mathcal{R}\boldsymbol{x}$=0, što je nemoguće za $\boldsymbol{x} \neq 0$ pošto je R definitivno pozitivan.

Formulacija problema svojstvenih vrijednosti pomoću izraza $\omega = J/N$ jako je pogodna u analizi spektra svojstvenih vrijednosti. Također se može koristiti kao početna točka aproksimacije Ritz tipa. Ilustrirat ćemo to tretirajući problem razvučenog užeta koje nosi diskretnu masu na sredini dužine. Ovaj problem zahtjeva rješenje Sturm-Liouville jednadžbe

[6] Brzi generalni dokaz: utvrdimo da je $(\boldsymbol{x}, L\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, R\boldsymbol{x})$, uzimamo kompleksno konjugirane parove $(L\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda^*(R\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, koristimo hermiticitet od L i R kako bi dobili $(\boldsymbol{x}, L\boldsymbol{x}) = \lambda^*(\boldsymbol{x}, R\boldsymbol{x})$, i oduzimamo. Pošto je R definitivno pozitivan, rezultat je $\lambda - \lambda^* = 0$. QED

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2\left[1 + \frac{m}{p}\delta(x)\right]y \quad \left(k^2 = \frac{w^2 p}{T}\right)$$

uz rubne uvjete $y(-L/2) = y(+L/2) = 0$. Svojstvene vrijednosti $k^2 = \lambda$ su stacionarne vrijednosti za

$$\omega = -\frac{\int_{-L/2}^{+L/2} y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx}{\int_{-L/2}^{+L/2}\left[1 + \left(\frac{m}{p}\right)\delta(x)\right]y^2 dx}.$$

Parcijalnom integracijom razlomaka, pronalazimo da se taj izraz može transformira u

$$\omega = \frac{\int_{-L/2}^{+L/2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}{\int_{-L/2}^{+L/2} y^2 dx + \left(\frac{m}{p}\right)[y(0)]^2 dx}.$$

Sada je očito da su sve svojstvene vrijednosti pozitivne i da je najmanja svojstvena vrijednost apsolutni minimum ω.

Ako je $m = 0$, najniža svojstvena funkcija je $\cos(\pi x/L)$; ako je $m \neq 0$, očekujemo da će svojstvena funkcija imati brijeg na $x = 0$.[7] Uvodimo probnu funkciju spajanjem dviju parabola kako bi simulirali takav oblik:

$$y(x) = \begin{cases} \left(x + \frac{L}{2}\right) + \alpha\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 & (x < 0) \\ \left(\frac{L}{2} - x\right) + \alpha\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 & (x > 0), \end{cases}$$

gdje je α prilagodljiv parametar. Problem sada je odrediti takav α da ω ima minimum i pronaći taj minimum. Imamo

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1 + 2\alpha\left(x + \frac{L}{2}\right) & (x < 0) \\ -1 - 2\alpha\left(\frac{L}{2} - x\right) & (x > 0), \end{cases}$$

i računamo

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = L\left(1 + \alpha L + \frac{\alpha^2 L^2}{3}\right),$$

$$\int_{-L/2}^{+L/2} y^2 dx = \frac{L^3}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha L}{4} + \frac{\alpha^2 L^2}{20}\right)$$

$$[y(0)]^2 = \frac{L^2}{4}\left(1 + \alpha L + \frac{\alpha^2 L^2}{4}\right)$$

Zapisujući $\alpha L = \xi$, dolazimo do izraza

[7] Inercija mase m može proizvesti silu koja pravi brijeg

$$\omega = \frac{4}{L^2}\frac{1+\xi+\frac{\xi^2}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{\xi}{4}+\frac{\xi^2}{20}+\frac{m}{pL}\left(1+\xi+\frac{\xi^2}{4}\right)}$$

Radi ilustracije, pretpostavimo da $m/\rho L = 4/\pi$, za ovaj odabir točno rješenje je $\lambda = \pi^2/4L^2$.[8] Nakon jednostavne algebarske manipulacije, dolazimo do

$$\omega = \frac{80\pi}{L^2}\frac{3+3\xi+\frac{\xi^2}{3}}{a+b\xi+c\xi^2},$$

gdje $a = 20(15+\pi)$, $b = 15(16+\pi)$, $a = 3(20+\pi)$. Postavimo li $d\omega/d\xi = 0$, dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$(3c-b)\xi^2 + 2(3c-a)\xi + 3(b-a) = 0$$

ili, sa dovoljnom preciznosti

$$3{,}942\xi^2 + 9{,}453\xi + 2{,}355 = 0$$

Korijeni su $\xi_1 = -2.11$ i $\xi_2 = -0.283$, i jednostavno je provjeriti da drugi korijen daje minimalni ω jednak

$$\omega_{min} = \frac{2{,}37}{L^2}$$

Postoji nedosljednost od oko 4% između ovih rezultata i prave svojstvene vrijednosti $\lambda = \pi^2/4L^2$.

11. Zaključak

Varijacijske metode su matematičke metode koje se koriste za rješavanje problema kod kojih treba minimizirati ili maksimizirati određeni integral, čiji su članovi funkcije nezavisnih ili zavisnih varijabli i kod kojih su zavisne varijable derivabilne jednom ili više puta. Jedan od najjednostavnijih problema koji je riješen varijacijskim metodama je minimizacija puta između dvije točke. Kao što smo pokazali u ovom radu, varijacijske metode imaju veliku i široku primjenu. Veliki značaj ostvaruju u području kvantne fizike. Zadnje studije koriste varijacijske metode da bi riješile probleme vezane uz ravnotežu i vibracije.

[8] Jednadžba za svojstvenu vrijednost $\tan\gamma = \frac{\rho L}{m}\frac{1}{\gamma}$, za $\gamma = \frac{\pi}{4}$

12. Literatura

[1] Zvonko Glumac, Matematičke metode fizike
URL: http://gama.fizika.unios.hr/~zglumac/ummf.pdf

[2] Eugene Butkov, Mathematical physics
URL: http://www.uic.unn.ru/~krnv100/pub/physics/butkov_mathematical-physics.pdf

[3] Brachistochrone problem
URL: http://www.daviddarling.info/encyclopedia/B/brachistochrone_problem.html

[4] G. Allaire, Numerical Analysis and Optimization, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[5] H.Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1983.

[6] Salih Suljagić, Matematika 3
URL: http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat3/node111.html

13. Životopis

Josip Živković rođen je 01.08.1994 godine u Vinkovcima u Hrvatskoj. Osnovnu školu je završio u Kostrču i Tolisi, Općina Orašje, Bosna i Hercegovina. Po završetku osnovne škole upisao je Opću gimnaziju u Orašju. Nakon srednje škole upisao se na Preddiplomski studij fizike na Odjelu za fiziku u Osijeku.