Stojni val na žici gitare

Žigmundić, Mladen

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Physics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:160:232676

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

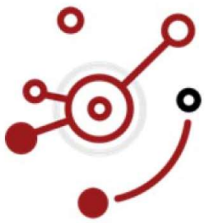
Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-17**

Repository / Repozitorij:

Repository of Department of Physics in Osijek

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA

ODJEL ZA FIZIKU



MLADEN ŽIGMUNDIĆ

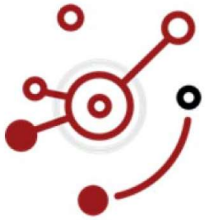
STOJNI VAL NA ŽICI GITARE

Završni rad

Osijek, 2019.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA

ODJEL ZA FIZIKU



MLADEN ŽIGMUNDIĆ

STOJNI VAL NA ŽICI GITARE

Završni rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

radi stjecanja zvanja prvostupnika fizike

Osijek, 2019.

„Ovaj je završni rad izrađen u Osijeku pod vodstvom mentora doc. dr. sc. Denisa Stanića u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.“

Sadržaj

1. Valno gibanje 1
1.1. Zvučni valovi 2
1.2. Intenzitet zvuka 2
1.3. Titranje napete niti 3
1.4. Transverzalni stojni valovi 7
1.5. Složena titranja 8
2. Glazbene ljestvice 11
2.1. Ljestvica harmonijskog niza 11
2.2. Kromatična temperirana ljestvica 13
3. Eksperimentalni dio 14
3.1. Amplituda kao funkcija vremena 15
3.2. Frekvencija kao funkcija vremena 18
4. Zaključak 22
5. Literatura i reference 23
6. Životopis 24

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za fiziku

Završni rad

STOJNI VAL NA ŽICI GITARE

MLADEN ŽIGMUNDIĆ

Sažetak:

U radu je opisano kako žičani glazbeni instrumenti proizvode zvuk. Najprije su uvedeni osnovni pojmovi valnog gibanja i akustike. Zatim je izveden model malih oscilacija napete žice te je dobivena valna jednadžba. Pojašnjena je osnovna ideja složenih valnih gibanja i Fourierove analize. U drugom dijelu govori se o glazbenim intervalima i ljestvicama. Konačno, u eksperimentalnom dijelu su korišteni Soundcard Scope te Overtone Analyzer.

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: amplituda / frekvencija / glazbena ljestvica / složeno valno gibanje / stojni val / zvuk

Mentor: doc. dr. sc. Denis Stanić

Ocjenjivači:

Rad prihvaćen:

University Josip Juraj Strossmayer Osijek
Department of Physics

Bachelor of Physics Thesis

STANDING WAVE ON GUITAR STRING

MLADEN ŽIGMUNDIĆ

Abstract:

In this work it is described how string instruments produce sound. Firstly, general therms of wave motion and accoustic are introduced. Afterwards, model of small oscillations is presented and wave equation is derived. Basic idea of complex wave motion and Fourier analysis is explained. In second part are discussed ideas of music intervals and scales. Finally, Soundcard Scope and Overtone Analyzer are used in experimental section.

Thesis deposited in Department of Physics library

Keywords: amplitude / frequency / complex waveforms / frequency / music scale / sound / standing wave

Supervisor: Assistant Professor Denis Stanić

Reviewers:

Thesis accepted:

1. Valno gibanje

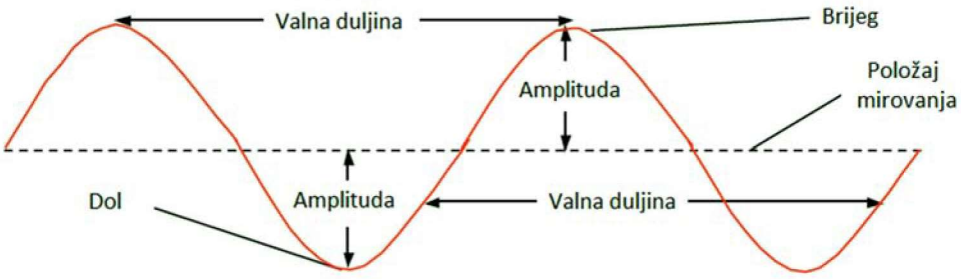
Uzburkanost vode na površini jezera, zvukovi glazbe, seizmička podrhtavanja uzrokovana potresima, sve su to valovi. Valovi se pojavljuju svaki put kad se sustav poremeti iz ravnotežnog položaja i kad se poremećaj može širiti kroz sredstvo s jednog mjesta na drugo. Kako se val širi, on prenosi energiju. Pri samom prijenosu energije, nema prijenosa tvari. [6]

Valove možemo podijeliti na:

Mehaničke valove - šire se medijem čije su čestice međusobno povezane elastičnim silama.

Elektromagnetske valove - za njihovo širenje nije potreban medij, tj. mogu se rasprostirati i kroz vakuum.

Prema načinu titranja valovi se dijele na transverzalne i longitudinalne. Transverzalnim valovima nazivamo one valove u kojima čestice medija titraju okomito na smjer širenja vala. Na transverzalnom valu postoje valna uzvišenja koja se nazivaju brjegovi i valna udubljena koja se nazivaju dolovi. Čestica na vrhu brijega ili dnu dola postiže svoj ekstremni pomak od ravnotežnog položaja koji se naziva amplituda. Udaljenost između dva uzastopna brijega ili dva uzastopna dola naziva se valna duljina.



Slika 1: Transverzalni val

Longitudinalni valovi su oni u kojima čestice titraju u smjeru širenja vala. Zgusnuti dijelovi vala su brjegovi, a razrijeđeni dijelovi vala su dolovi. Zvuk spada u longitudinalne valove.

Slika 2: Longitudinalni val [1]

1.1. Zvučni valovi

Kad se palicom udari po bubnju tada membrana naglo stlači volumen zraka. Poremećaj se u prostoru zbog svoje elastičnosti širi i sabija okolni volumen zraka. Kada stigne do uha, val udara u bubnjić i stvara osjećaj koji se zove zvuk. Zvuk je longitudinalni mehanički val. Ljudsko uho može registrirati frekvencije od 20 Hz do 20 000 Hz. Valovi zvuka frekvencija manjih od 20 Hz nazivaju se infrazvuk, a valovi zvuka frekvencija većih od 20 000 Hz ultrazvuk. Iako se ne mogu čuti, ti valovi mogu se detektirati na druge načine i primijeniti u tehnici i medicini. [7]

1.2. Intenzitet zvuka

Veličina koja opisuje energiju zvučnog vala u nekom vremenskom intervalu, po jedinici površine valne fronte naziva se intenzitet zvuka. Mjerna jedinica je W/m^2. Najmanji intenzitet zvuka koji ljudsko uho može čuti je prag čujnosti i iznosi $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$.

Uobičajeno je mjeriti zvuk u obliku razine intenziteta čija je skala prilagođena ljudskoj percepciji glasnoće. Razina intenziteta mjeri se u decibelima (dB). Relacija koja povezuje intenzitet i razinu intenziteta glasi:

$$I(dB) = 10\ log_{10}\frac{I}{I_0}$$

Vidimo da je razina intenziteta logaritamska skala.

Vrsta zvuka	Razina intenziteta (dB)
Prag čujnosti	0
Šum lišća	10
Šapat	20
Tiho sviranje radija u kući	40
Razgovor u kući	60
Prometna ulica	70
Disko glazba	110
Uzlijetanje aviona (30 m)	140

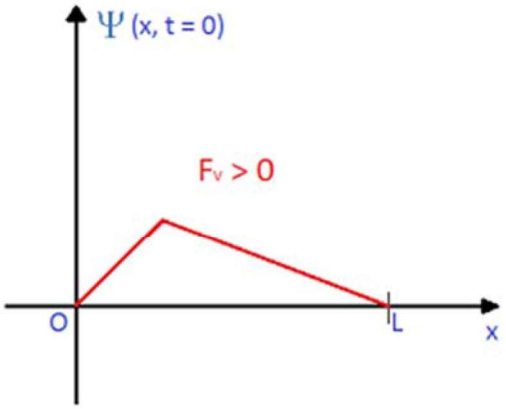
Tablica 1: Neki zvukovi uz pripradajuće intenzitete [2]

1.3. Titranje napete niti

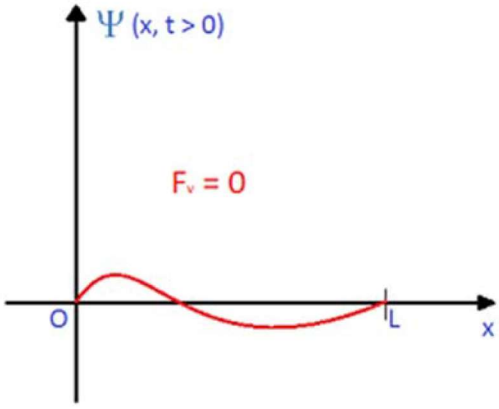
Promatra se napeta elastična nit, položena duž osi x i učvršćena u točkama $x = 0$ i $x = L$. Neka je linijska masena gustoća niti konstantna i jednaka λ_0. U ravnoteži, sve čestice niti leže na osi x. U trenutku $t = 0$ (slika 3), vanjska sila iznosa F_v trenutno izbaci nit iz položaja ravnoteže, tj. promjeni položaj i/ili brzine svih ili samo nekih čestica niti. Kasnije, za $t > 0$ (slika 4), sila više ne djeluje. Nit će (ako se zanemari trenje) nastaviti titrati oko svog ravnotežnog položaja. Transverzalni (okomiti) otklon od položaja ravnoteže u točki x niti, u trenutku t, je

$$\vec{\Psi}(x, t)$$

Ovaj otklon je vektor u ravnini okomitoj na os x, no govorit će se samo o iznosu tog vektora.



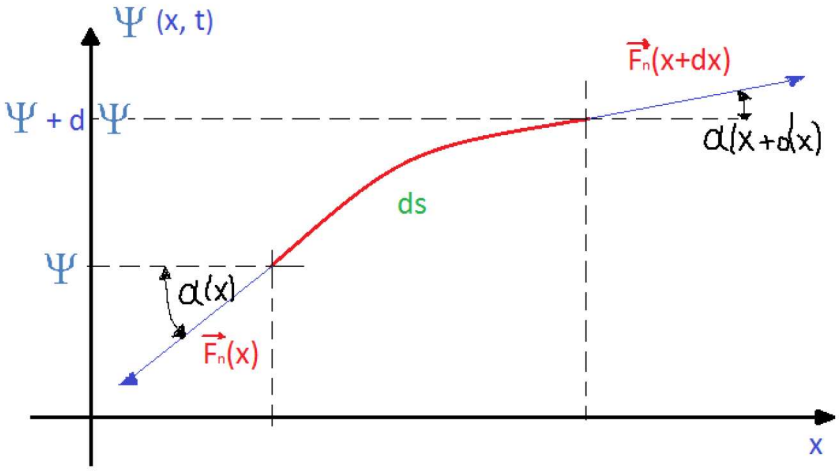
Slika 3: Napeta nit za vrijeme djelovanja vanjske sile [3]



Slika 4: Napeta nit poslije djelovanja vanjske sile [3]

Osim transverzalnih, pojedini elementi niti će izvoditi i longitudinalne (uzdužne) pomake, koje ćemo smatrati po svom iznosu puno manjima od iznosa transverzalnih pomaka i zato će ih se zanemarivati. Za jedan element niti duljine ds i mase vrijedi

$$dm = \lambda_0 ds.$$



Slika 5: Rezultat djelovanja sile napetosti na element niti duljine *ds*

Promatraju se sile napetosti kojima susjedni elementi niti djeluju na promatrani element (slika 5). Na element djeluje i gravitacijska sila, koja će se zanemariti (pretpostavlja se da je ona po iznosu puno manja od sila koje uzimamo u račun). Sile napetosti u rubovima promatranog elementa su iznosa $F_n(x,t)$ i $F_n(x+dx,t)$. Ukupna sila u vodoravnom, tj. x smjeru je

$$F_x = F_n(x+dx,t)\cos\alpha\,(x+dx,t) - F_n(x,t)\cos\alpha\,(x,t) = 0.$$

To je sila koja djeluje na promatrani element u vodoravnom smjeru. Budući da se pomaci u vodoravnom smjeru zanemaruju, gornji je izraz izjednačen s nulom. U skladu s definicijom derivacije funkcije, za male vrijednosti *dx*, gornji izraz je

$$F_x = dx\frac{d}{dx}[F_n(x,t)\cos\alpha\,(x,t)] = 0.$$

No, za male okomite pomake i kut $\alpha(x,t)$ je mali pa je

$$\cos\alpha\,(x,t) = 1 - \mathcal{O}[\alpha^2(x,t)]$$

Što znači da je s točnošću od $\mathcal{O}[\alpha^2(x,t)]$

$$F_x = dx\frac{d}{dx}F_n(x,t) + \mathcal{O}[\alpha^2(x,t)] = 0,$$

$$F_n(x,t) = (const.u\ x) = F_n(t), \qquad (1)$$

tj. napetost je približno konstantna unutar intervala dx i može ovisiti samo o vremenu.

Ukupna sila u okomitom smjeru je

$$F_y = F_n(x+dx,t)\sin\alpha\,(x+dx,t) - F_n(x,t)\sin\alpha\,(x,t)$$

$$= F_n(t)[\sin\alpha\,(x+dx,t) - \sin\alpha\,(x,t)]. \qquad (2)$$

To je sila koja izaziva okomite pomake niti, pa Newtonova jednadžba gibanja za promatrani element niti mase $dm = \lambda_0 ds$, koji se giba u okomitom smjeru, glasi

$$\lambda_0 ds \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = F_n(t)[\sin\alpha\,(x+dx,t) - \sin\alpha\,(x,t)], \qquad /\cdot\frac{1}{dx}$$

$$\lambda_0 \frac{ds}{dx}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = F_n(t)\frac{[\sin\alpha\,(x+dx,t) - \sin\alpha\,(x,t)]}{dx}$$

U granici kada $dx \to 0$, razlomak na desnoj strani gornje jednadžbe prelazi u derivaciju po x od $\sin\alpha\,(x,t)$, dok je na lijevoj strani

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (d\Psi)^2}}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2}.$$

Sve zajedno, uvršteno u jednadžbu gibanja, daje

$$\lambda_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = F_n(t)\frac{\partial}{\partial x}\sin\alpha\,(x,t). \qquad (3)$$

Iz trigonometrije je

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \qquad (4)$$

a sa slike 5 je

$$\tan\alpha \simeq \frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Kombiniranjem gornja dva izraza, dobiva se

$$\sin\alpha = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\left[1 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u jednadžbu gibanja, dobiva se

$$\lambda_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = F_n(t)\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left[1 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}.$$

Za male otklone od ravnoteže, kvadrat derivacije Ψ je puno manji od jedinice

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 \ll 1,$$

pa se kvadratni članovi u gornjoj jednadžbi mogu zanemariti. Tako se dolazi do jednadžbe

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} - v^2(t)\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{5}$$

To je homogena linearna parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda koja se zove jednodimenzijska valna jednadžba. Linearna je zato jer se nepoznata funkcija Ψ pojavljuje linearno, a parcijalna je zato jer se pojavljuju derivacije i po x i po t. Veličina

$$v(t) \equiv \sqrt{\frac{F_n(t)}{\lambda_0}}$$

koja se pojavljuje u gornjoj jednadžbi ima dimenziju fazne brzine.

Rješenje diferencijalne jednadžbe pretpostavlja se u obliku

$$\Psi = \gamma(vt - x) + \varphi(vt + x), \tag{6}$$

gdje su funkcije $f(x,t)$ i $\varphi(x,t)$ neke derivabilne funkcije (imaju derivacije 1. i 2. reda po x i t). Navedena pretpostavka ($\Psi(x,t)$ je rješenje jednadžbe) provjerava se pomoću derivacija funkcije $\Psi(x,t)$, koja se uvrštava u valnu jednadžbu

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\gamma'(vt - x) + \varphi'(vt + x) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = v\gamma'(vt - x) + v\varphi'(vt + x)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \gamma''(vt - x) + \varphi''(vt + x) \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2\gamma''(vt - x) + v^2\varphi''(vt + x)$$

Izjednačavanjem se dobije

$$v^2\gamma''(vt - x) + v^2\varphi''(vt + x) = v^2\gamma''(vt - x) + v^2\varphi''(vt + x).$$

Dakle, funkcija $\Psi = \gamma(vt - x) + \varphi(vt + x)$ je rješenje diferencijalne jednadžbe valnog gibanja. Ona je zbroj dviju funkcija od kojih $\Psi_1 = \gamma(vt - x)$ označuje funkciju valnog gibanja u pozitivnom smjeru osi x, dok je $\Psi_2 = \varphi(vt + x)$ funkcija valnog gibanja u negativnom smjeru osi x.

Rubni uvjet za refleksiju na nepomičnom kraju je $\Psi = 0$. Od upadnog vala $\Psi_1 = \varphi(vt + x)$ nakon refleksije nastaje val $\Psi_2 = -\varphi(vt - x)$. Refleksija transverzalnog vala vrši se promjenom predznaka valne funkcije.

Funkcija kao opći integral ili rješenje diferencijalne jednadžbe valnog gibanja može imati oblik periodične sinusne funkcije.

$$\Psi_1 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\Psi_2 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \tag{7}$$

Ovdje je T vremenski period sinusne funkcije u kojem čestica izvede cijeli titraj. Frekevencija ~~se definira~~ kao $1/T$ i označava se s f. Kako se val giba stalnom brzinom v, onda će na udaljenosti $vT = \lambda$ čestica biti u istom stanju titranja. Dakle λ je prostorni period funkcije i naziva se valna duljina. Amplituda titranja je A.

Superponiranjem valova $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ može se pisati

$$\Psi = A\left(\cos 2\pi\frac{t}{T}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} - \sin 2\pi\frac{t}{T}\sin 2\pi\frac{x}{\lambda} + \cos 2\pi\frac{t}{T}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} + \sin 2\pi\frac{t}{T}\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T} \tag{8}$$

gdje se prva funkcija uobičajeno označuje kao amplituda stojnog vala,

$$a = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda},$$

i koja predstavlja sustav čvorova i trbuha uzduž osi x, s prostornim periodom od $\lambda/2$ (čvorovi nastaju na mjestima gdje je $a = 0$, trbusi za $a = 2A$).

1.4. Transverzalni stojni valovi

Neka je elastična žica učvršćena na oba kraja, gdje su onda i čvorovi stojnog vala za neki transverzalni pomak (slika 6). Ako je na žici duljine L:

a) za samo jedan trbuh i dva čvora ($k = 1$), pripadna osnovna frekvencija je:
$$f_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_n}{\mu}}$$

b) dva trbuha i tri čvora ($k = 2$) daju frekvenciju drugog harmonik:
$$f_2 = \frac{v}{\lambda} = 2f_1$$

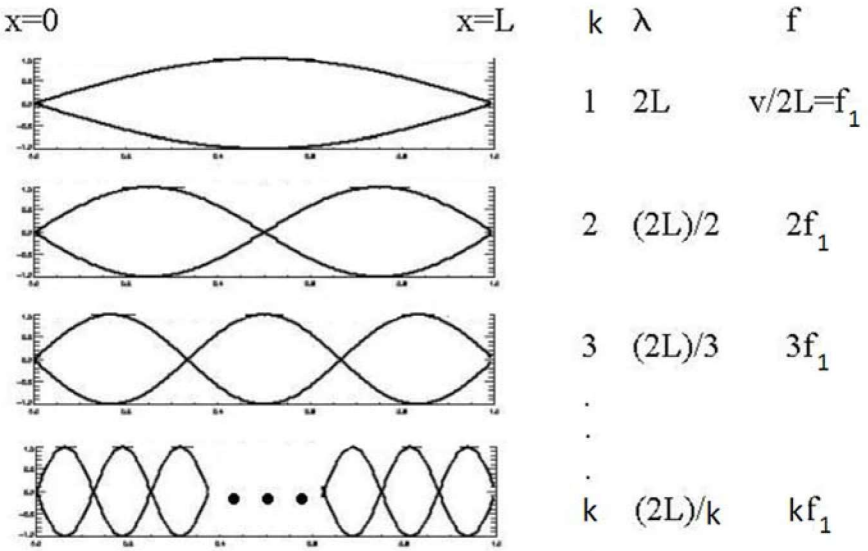
c) tri trbuha i četiri čvora na žici $k = 3$ daju frekvenciju trećeg harmonika:

$$f_3 = 3f_1$$

itd.

Harmonici čine potpuni niz cijelih brojeva, što se naziva Galilejev zakon za žice koje titraju:

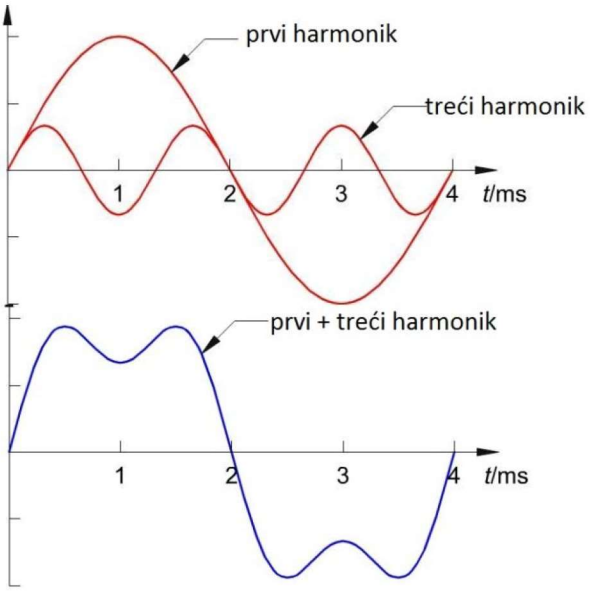
$$f_k = kf_1; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$



Slika 6: Stojni val za $k = 1, 2, 3, \ldots$ [4]

1.5. Složena titranja

Sustav može istovremeno titrati različitim frekvencijama. Ako se žica na jednom kraju uzbudi tako da nastane transverzalni stojni val (Ψ_1), ali i na drugom kraju istovremeno na neki harmonik (Ψ_2), onda sustav nema više sinusni transverzalni val nego se dobije neki oblik poremećaja koji odgovara zbroju transverzalnih pomaka Ψ_1 i Ψ_2 stojnih valova danog sustava. Na primjer, ako je sustav pobuđen na prvi i treći harmonik (slika 7).



Slika 7: Složeno titranje sustava (prvi i treći harmonik)

$$2A_1 \cos\frac{2\pi x}{\lambda_1}\cos\frac{2\pi t}{T_1}; \qquad 2A_3 \cos\frac{2\pi x}{\lambda_3}\cos\frac{2\pi t}{T_3}$$

$$f_3 = kf_1; \qquad \lambda_3 = \frac{\lambda_1}{3}; \qquad T_3 = \frac{T_1}{3}$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_3 = 2A_1 \cos\frac{2\pi x}{\lambda_1}\cos\frac{2\pi t}{T_1} + 2A_3 \cos\frac{2\pi x}{\lambda_3}\cos\frac{2\pi t}{T_3}$$

Rezultantni pomaci određeni su gornjom jednadžbom. Općenito, titranje sustava može biti puno složenije od navedenog primjera s dva harmonika. Periodična složena valna gibanja mogu se uglavom prikazati kao zbroj harmoničih valova, postupkom harmoničke ili Fourierove analize.

Fourirerova analiza izvodi se za periodične funkcije tako da se neka funkcija $p(t)$, s periodom T, rastavi u zbroj sinusnih i kosinusnih funkcija. Tada se periodična funkcija $p(t) = p(t+T)$ može prikazati pomoću beskonačnog Fourierovog reda:

$$p(t) = a_0 + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + a_m \cos m\omega t + \ldots + b_0 + b_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots + b_n \sin n\omega t + \ldots \qquad (10)$$

gdje su koeficijenti reda:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt; \qquad a_m = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\cos m\omega t\, dt; \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\sin n\omega t\, dt$$

Prvi član $p_1(t) = a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t$ Fourierovog reda predstavlja fundamentalni ton, dok su ostali članovi viši harmonici. Oznaka za kutnu frekvenciju je ω i iznosi $2\pi/T$. Temeljni

period funkcije p_1 je T, s pripadnom frekvencijom $1/T$, što je zapravo frekvencija početnog zvučnog vala. Frekvencije viših harmonika su cjelobrojni višekratnici fundamentalnog tona i redom iznose: $3/T$, $4/T$, $5/T$, ...

2. Glazbene ljestvice

Da bi se mogle proučavati ljestvice (skale) i melodije, potrebno je upoznati se s pojmom glazbenog intervala. Interval dvaju tonova je omjer f_2/f_1 njihovih frekvencija.

Mjere li se frekvencije $f_1, f_2, \dots, f_n$, slijeda n tonova koji tvori neku melodiju, a zatim se izračunaju intervali $f_2/f_1, f_3/f_2, \dots$, za istu se melodiju uvijek može naći isti slijed intervala. To znači da je za danu melodiju karakterističan slijed intervala, a ne frekvencija tonova. Glazbeni intervali su stoga invarijante melodija.

Melodije se mogu svrstati u grupe ovisno o tome koji se intervali pojavljuju u njima. Uzme li se jedan proizvoljan ton frekvencije f_1 kao osnovni, i poreda li se intervale izračunate u odnosu na taj ton po sve većim izosima $f_2/f_1 < f_3/f_1 < f_4/f_1 \dots$, dobije se niz intervala $f_1/f_1 < f_2/f_1 < f_3/f_1$ koji tvori glazbenu ljestvicu, karakterističnu za tu grupu melodija. Intervali između dvaju uzastopnih tonova ljestvice, $f_2/f_1, f_3/f_2, f_4/f_3, \dots$, također su karakteristični za tu ljestvicu.

Neki intervali zvuče ugodno, a neki neugodno uhu. Za one koji zvuče ugodno kaže se da su konsonantni, a za one neugodne disonantni. Dva su tona konsonantna ako im frekvencije stoje u odnosu malih prirodnih brojeva. Tako je, na primjer, interval s omjerom $3/2$ konsonantan, a interval $26/25$ disonantan. Najkonsonantniji intervali su oblika $n/1$ (za $= 1,2,3 \dots$) i ljudsko uho ih doživljava kao najsrodnije. Iako tonova u ljestvici može biti proizvoljan broj, zato što ih u ljestvici najčešće ima sedam, redom se imenuju intervali ljestvice: prima, sekunda, terca, kvarta, kvinta, seksa, septima, oktava. Prima je interval omjera $1/1$, oktava $2/1$, a svi ostali intervali su negdje između ta dva omjera.

2.1. Ljestvica harmonijskog niza

Niz frekvencija Galilejevog zakona definira najvažnije intervale moderne glazbe. Uzme li se npr. za osnovnu frekvenciju 100 Hz, pomoću formule $f_k = kf_1$, može se napisati niz frekvencija s pripadajućim intervalima, između fundamentalne frekvencije i svakog od njih. Stupanj označava funkciju svakog tona u odnosu na osnovni ton - toniku (u ovom slučaju tonalni centar je ton frekvencije 100 Hz). Prijeđe li se nizanjem u novu oktavu, fundamentalna frekvencija f_1 se redefinira frekvencijom tonike nove oktave.

Frekvencija	f_k/f_1	Stupanj
$f_1 = 100$ Hz	1/1	Tonika
$f_2 = 200$ Hz	1/1	Tonika
$f_3 = 300$ Hz	3/2	Dominanta
$f_4 = 400$ Hz	1/1	Tonika
$f_5 = 500$ Hz	5/4	Medijanta
$f_6 = 600$ Hz	3/2	Dominanta

$f_7 = 700\ Hz$	7/4	Subtonika
$f_8 = 800\ Hz$	1/1	Tonika
$f_9 = 900\ Hz$	9/8	Supertonika
$f_{10} = 1000\ Hz$	5/4	Medijanta
$f_{11} = 1100\ Hz$	11/8	Subdominanta
$f_{12} = 1200\ Hz$	3/2	Dominanta
$f_{13} = 1300\ Hz$	13/8	Submedijanta
$f_{15} = 1400\ Hz$	7/4	Subtonika
$f_{16} = 1500\ Hz$	15/8	Vodeći ton
$f_{17} = 1600\ Hz$	1/1	Tonika

Nizanje frekvencija može se nastaviti do beskonačnosti, no previše tonova u ljestvici nepotrebno bi zakompliciralo stvari . Frekvencije ovih tonova u rasponu su od 4 oktave. Kako bi se dobili tonovi u jednoj oktavi (100 Hz do 200 Hz) i tako napisali preglednijima, svaku frekvenciju izvan prve oktave možemo jednom ili više puta podijeliti brojem 2. Posloži li se frekvencije od najmanje prema najvećoj, dobije se skala od 8 tonova u jednoj oktavi. Općenito ili subtonika ili vodeći ton poprimi ulugu septime (da bi se smanjila disonantonst susjednih intervala).

Frekvencija	f_k/f_1	f_k/f_{k-1}	Stupanj	Interval
$f_1 = 100.0\ Hz$	1/1	-	Tonika	Prima
$f_2 = 112.5\ Hz$	9/8	9/8	Supertonika	Sekunda
$f_3 = 125.0\ Hz$	5/4	10/9	Medijanta	Terca
$f_4 = 137.5\ Hz$	11/8	11/10	Subdominanta	Kvarta
$f_5 = 150.0\ Hz$	3/2	12/11	Dominanta	Kvinta
$f_6 = 162.5\ Hz$	13/8	13/12	Submedijanta	Seksta
$f_7 = 175.0\ Hz$	7/4	14/13	Subtonika	Septima (mala)
$f_8 = 187.5\ Hz$	15/8	15/14	Vodeći ton	Septima (velika)
$f_9 = 200.0\ Hz$	2/1	16/15	Tonika	Oktava

Izvedena ljestvica ima intervale relativno velike konsonantnosti. Na temelju ovih vrijednosti može se napraviti instrument koji kroz više oktava na neki način generira ove frekvencije (tipke na glasoviru, polja na gitari, itd...) i taj instrument može koristiti za konstrukciju svih melodija koji koriste tu ljestvicu.

Međutim, kada bi instrument bio podešen tako da može davati samo tonove ovih frekvencija, pojavio bi se problem: nemogućnost transponiranja (osim za interval oktave). Intervali f_k/f_{k-1} su različitih vrijednosti (npr., kvarta f_4/f_1 i kvarta f_5/f_2nisu iste) i zbog toga bi neku melodiju koja koristi tonove skale harmonijskog niza na ovom instrumentu bilo moguće odsvirati samo ako se kreće od tona frekvencije 100 Hz i njegovih oktava.

2.2. Kromatična temperirana ljestvica

Kako bi se riješio problem različitosti susjednih intervala, uvodi se uvjet

$$\frac{f_k}{f_{k-1}} = const. = \sqrt[12]{2}; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Ovim postupkom oktava je podijeljena na 12 međusobno jednakih intervala. Niti jedan od tonova nema neko posebno značenje pa se kromatičnu ljestvicu s istim pravom može početi od bilo kojeg tona. Interval $f_{k+1}/f_k = \sqrt[12]{2} = 1.05946$ naziva se poluton i označava se znakom h (*halftone*). Interval $f_{k+2}/f_k = 1{,}1225$ naziva se cijeli ton i ozncava se znakom w (*whole tone*).

Interval	$\mathbf{f_k/f_1}$	**Interval**	$\mathbf{f_k/f_1}$
Prima	$2^0/_{12}$	Umanjena kvinta	$2^6/_{12}$
Mala sekunda	$2^1/_{12}$	Čista kvinta	$2^7/_{12}$
Velika sekunda	$2^2/_{12}$	Mala seksta	$2^8/_{12}$
Mala terca	$2^3/_{12}$	Velika seksta	$2^9/_{12}$
Velika terca	$2^4/_{12}$	Mala septima	$2^{10}/_{12}$
Čista kvarta	$2^5/_{12}$	Velika septima	$2^{11}/_{12}$
Uvećana kvarta	$2^6/_{12}$	Oktava	$2^{12}/_{12}$

Tablica 2: Intervali u temperiranoj kromatičnoj ljestvici [5]

Uvećana kvarta i umanjena kvinta zvuče isto, no ovisno o kontekstu koriste se različito.

Imena tonova su

$$A, A\#, H, C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#,$$

ili

$$A, H_b, H, C, D_b, D, E_b, E, F, G_b, G, A_b,$$

gdje su $x\#$ i x_b oznake za povisilicu i snizilicu (crne tipke na klaviru). Internacionalnim dogovorom danas se uzima da A_4 ima frekvenciju 440 Hz.

Temperirana dur-ljestvica definirana je slijedom intervala:

$$w\ w\ h\ w\ w\ w\ h. \tag{12}$$

Praktično je krenuti od tona C, jer se dobiju tonovi koji nisu povišeni (#) niti sniženi (b):

$$C, D, E, F, G, A, H, (C_{+1}).$$

Polazeći od referentnog tona $A_4 = 440\ Hz$, mogu se izračunati frekvencije tonova C_i:

Ton	**C_0**	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C_6**	**C_7**	**C_8**
f(Hz)	16.3	32.7	65.4	130.8	261.6	523.2	1046.5	2093.0	4186.0

Tablica 3: Frekvencije tonova C_i [5]

Koristeći uvjet 11 mogu se izračunati i ostali tonovi.

Ton	**f(Hz)**	**Ton**	**f(Hz)**	**Ton**	**f(Hz)**
C_3	130.8	C_4	261.6	C_5	523.2
$C\#_3$	138.5	$C\#_4$	277.1	$C\#_5$	554.3
D_3	146.8	D_4	293.6	D_5	587.3
$D\#_3$	155.5	$D\#_4$	311.1	$D\#_5$	622.2
E_3	164.8	E_4	329.6	E_5	659.2
F_3	174.6	F_4	349.2	F_5	698.4
$F\#_3$	185.0	$F\#_4$	369.9	$F\#_5$	739.9
G_3	196.0	G_4	392.0	G_5	783.9
$G\#_3$	207.6	$G\#_4$	415.3	$G\#_5$	830.6
A_3	220.0	A_4	440.0	A_5	880.0
$A\#_3$	233.1	$A\#_4$	466.1	$A\#_5$	932.3
H_3	246.9	H_4	493.8	H_5	987.7

Tablica 4: Frekvencije C_3-C_6 [8]

3. Eksperimentalni dio

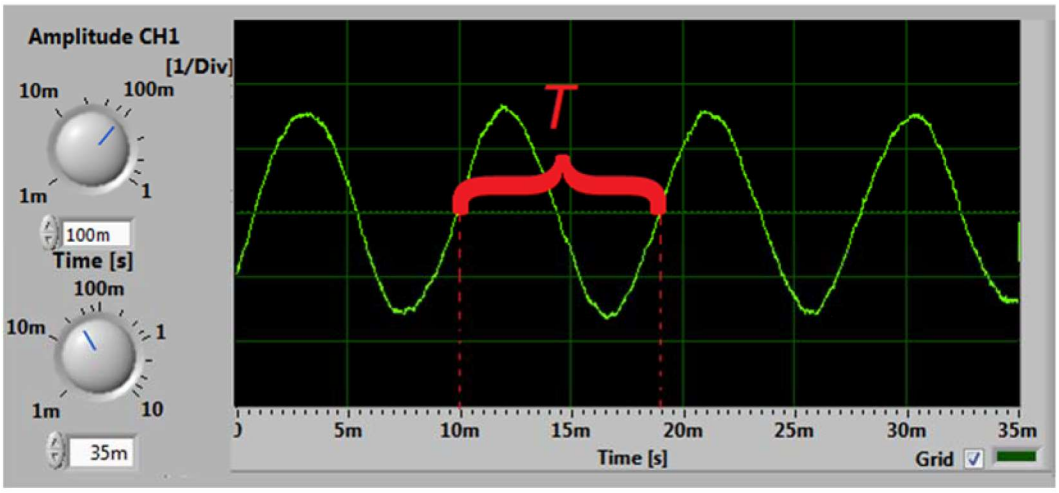
U nastavku je pomoću dva programa na prijenosnom računalu i mikrofona prikazano valno ponašanje različitih zvukova. Korištene su akustična i električna gitara te pojačalo s distorzijom. Radi usporedbe su korišteni zvukovi fundamentalne frekvencije jednog te istog tona (A_2, 110 Hz) ili njegovih višekratnika (A_3, A_4).

3.1. Amplituda kao funkcija vremena

Soundcard Scope oponašanjem osciloskopa prikazuje amplitudu zvuka kao funkciju vremena. Vremenski period čistog tona frekvencije 110 Hz je

$$T = \frac{1}{f} = 9.09 \ldots \text{ ms}$$

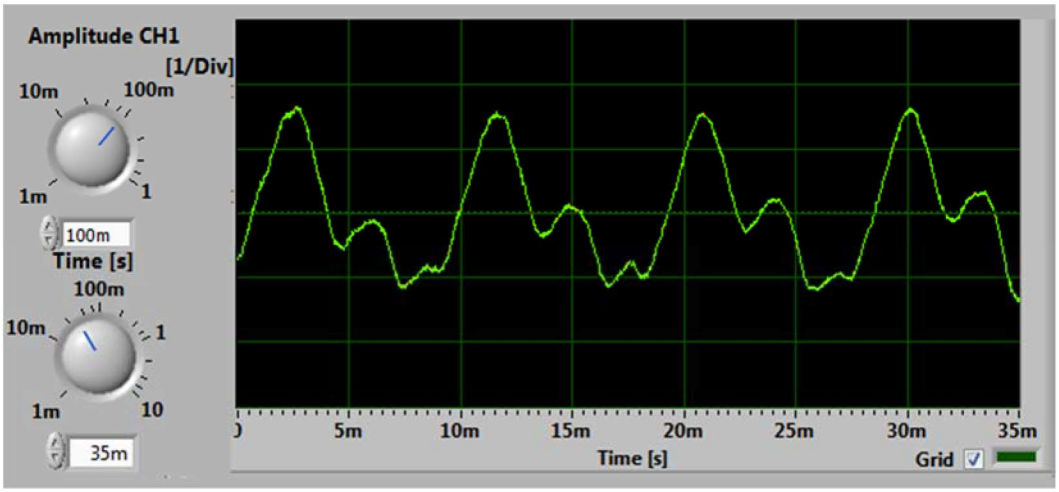
te se može vidjeti na virtualnom osciloskopu. Amplituda je prikazana u proizvoljnim jedinicama podjele na vertikalnoj skali, a na horizontalnoj osi je vrijeme u milisekundama. Slika 8 prikazuje čisti ton frekvencije 110 Hz na osciloskopu.



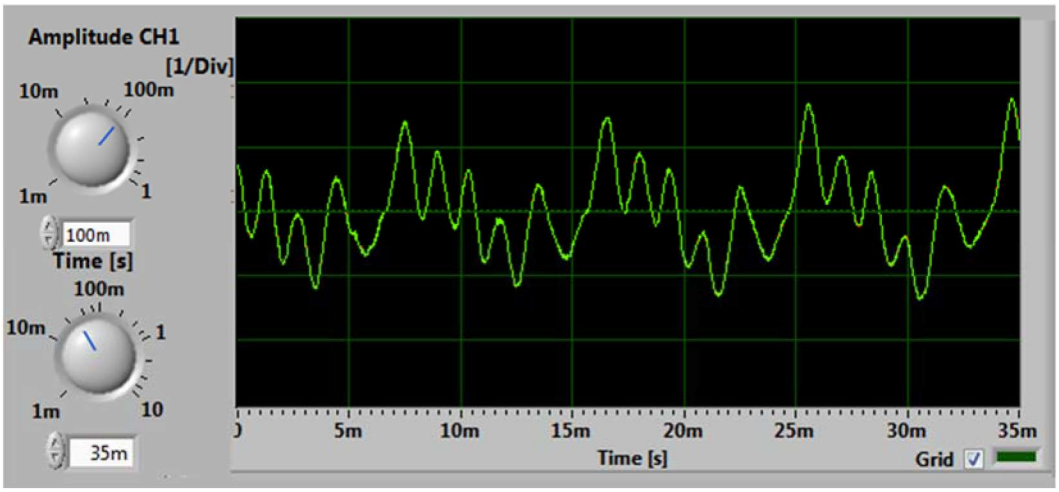
Slika 8: Čisti ton frekvencije 110 Hz na osciloskopu

Kao što je pokazano u poglavlju 1.5, sustav može istovremeno titrati različitim frekvencijama. Kada glazbeni instrument proizvodi neki ton, on zapravo proizvodi skup frekvencija koji se sastoji od fundamentalnog tona te od viših harmonika koji su cjelobrojni višekratnici toga tona. Uho taj ton čuje kao ton određene visine koji ima neku boju. Jedinstvena boja zvuka instrumenta nastaje zbog specifičnog skupa harmonika različitih amplituda. Kada dva različita instrumenta proizvode isti ton, njihove su fundamentalne frekvencije jednake, ali su specifične amplitude njihovih harmonika različite, što ih ralikuje po boji zvuka. Svaki od harmonika koji proizvodi instrument ima jednostavan sinusoidalan oblik, no njihovom se superpozicijom dobije ton složenog oblika. Može se vidjeti da su valni oblici tona A_2 slični jer imaju istu fundamentalnu frekvenciju, no viši su im harmonici različiti pa je oblik vala drugačiji. Oktava A_3 ima dva puta manji vremenski period u odnosu na ton A_2, druga oktava A_4 ima dva puta manji vremenski period u odnosu na ton A_3, itd.

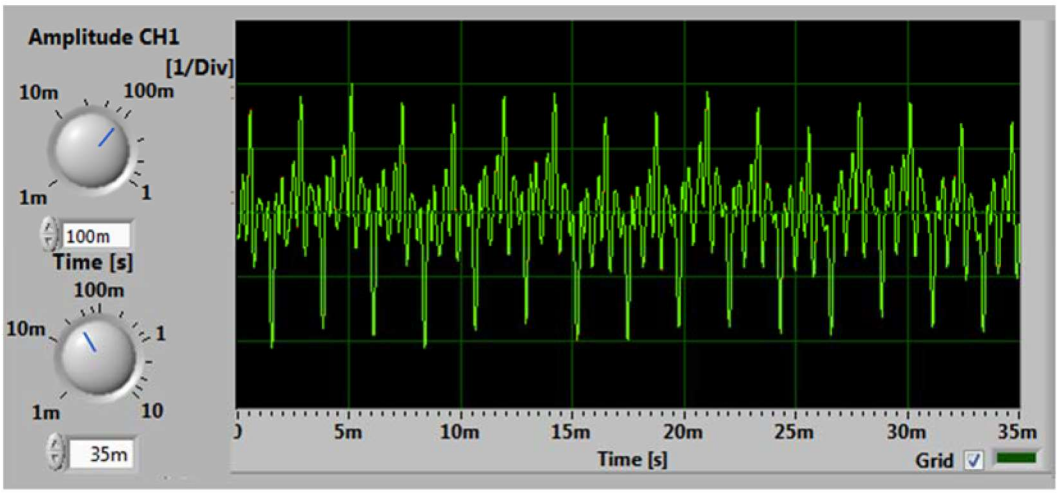
Na slikama 9, 10, 11, 12, 13, 14 i 15 prikazi su tonova na osciloskopu fundamentalne frekvencije 110 Hz dobiveni s različitih izvora zvuka.



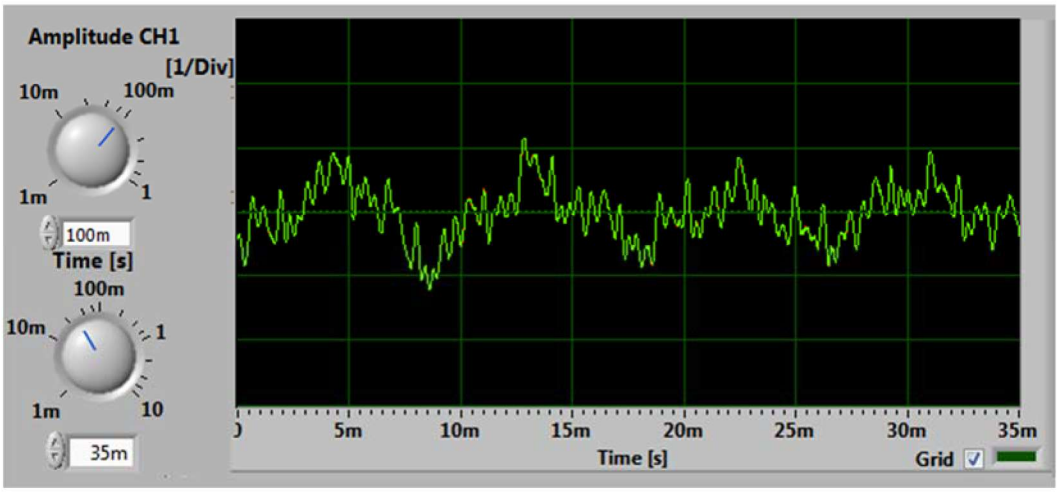
Slika 9: Ton A_2 na akustičnoj gitari (otvorena 5. žica)



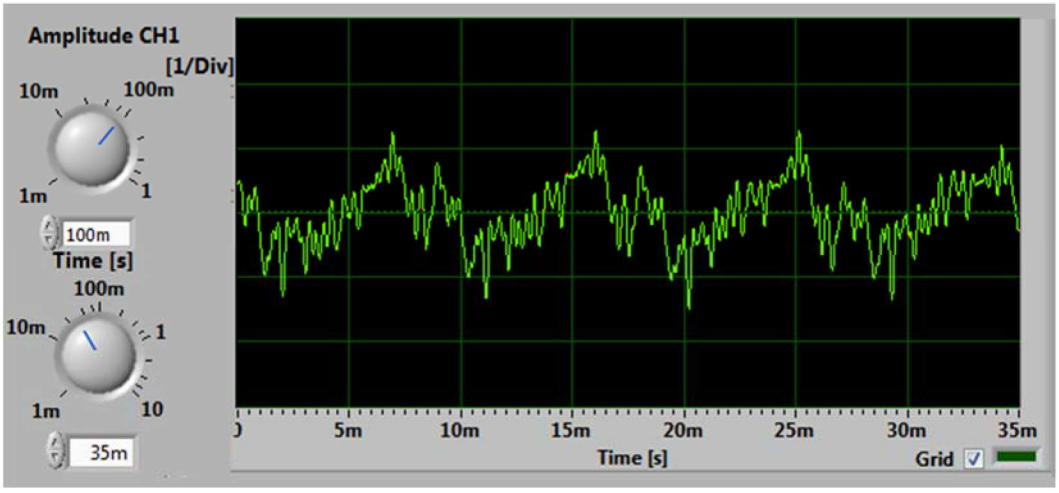
Slika 10: Ton A_2 (otvorena 5. žica) na električnoj gitari (*clean*)



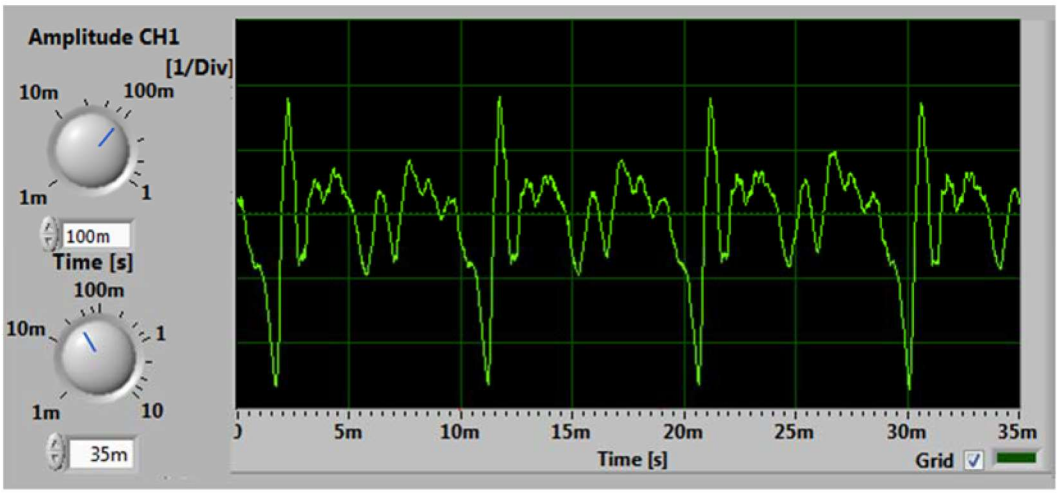
Slika 11: Ton A_4, 440 Hz (10. polje na 2. žici) na električnoj gitari (*clean*)



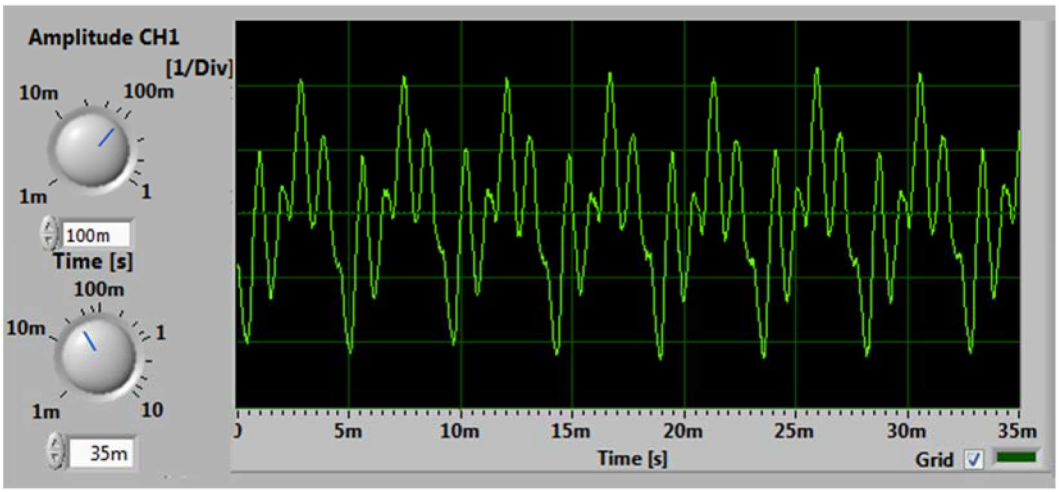
Slika 12:Tonovi $A_2, E_3, A_3, C\#_4$ (A dur) na električnoj gitari (*clean*)



Slika 13: Ton A_2 (otvorena 5. žica) na električnoj gitari (*distorzija*)



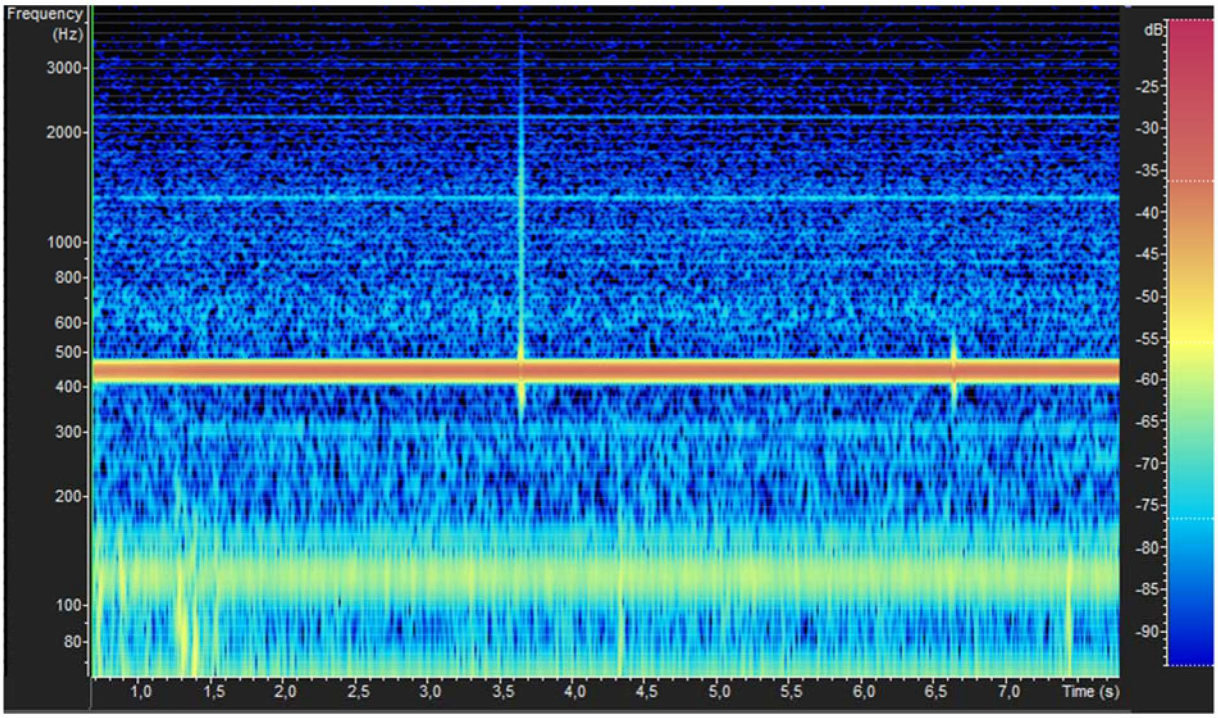
Slika 14:Ton A_2 otpjevano



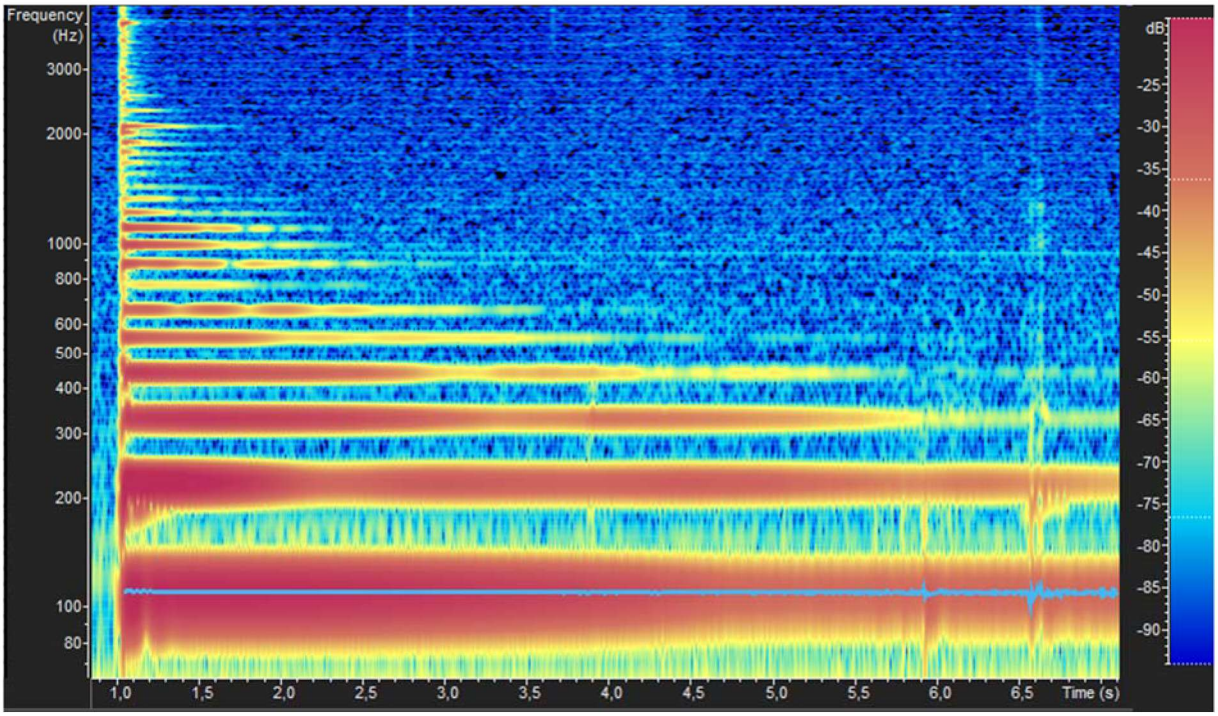
Slika 15:Ton A_3, 220 Hz otpjevano

3.2. Frekvencija kao funkcija vremena

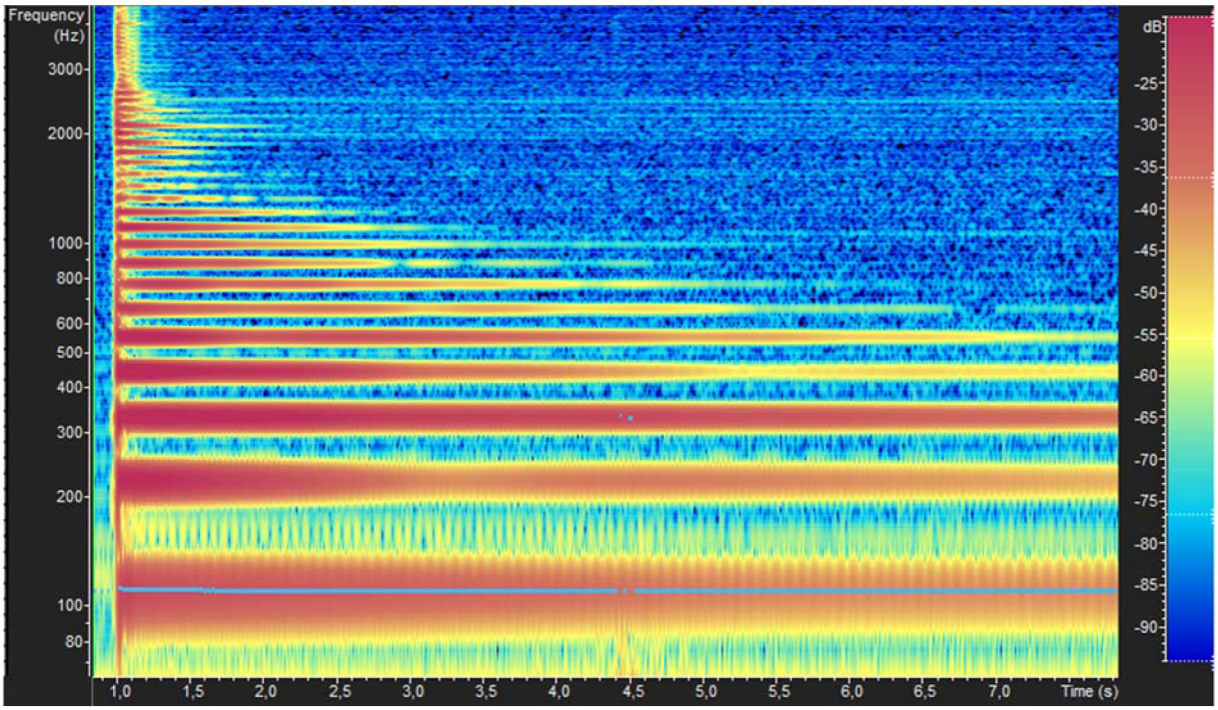
Za razliku od Soundcard Scope-a kojim je prikazana amplituda kao funkcija vremena, Overtone Analyzer se koristi za prikaz intenziteta zvuka rastavljenog prema frekvencijama kao funkcija vremena. U nastavku su uz pomoć programa prikazani neki zvukovi. Prisutan je i pozadinski zvuk (šum) s najistaknutijom frekvencijom od ~130 Hz koji je proizveo hladnjak računala.



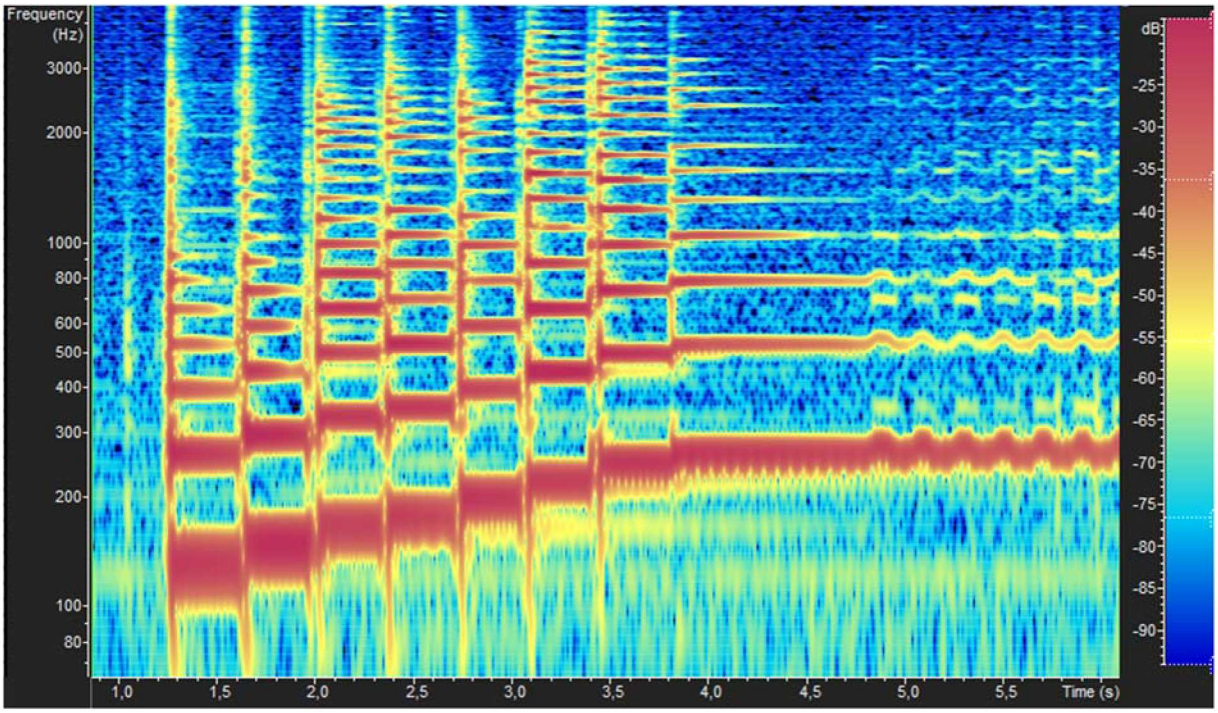
Slika 16: Čisti ton 440 Hz



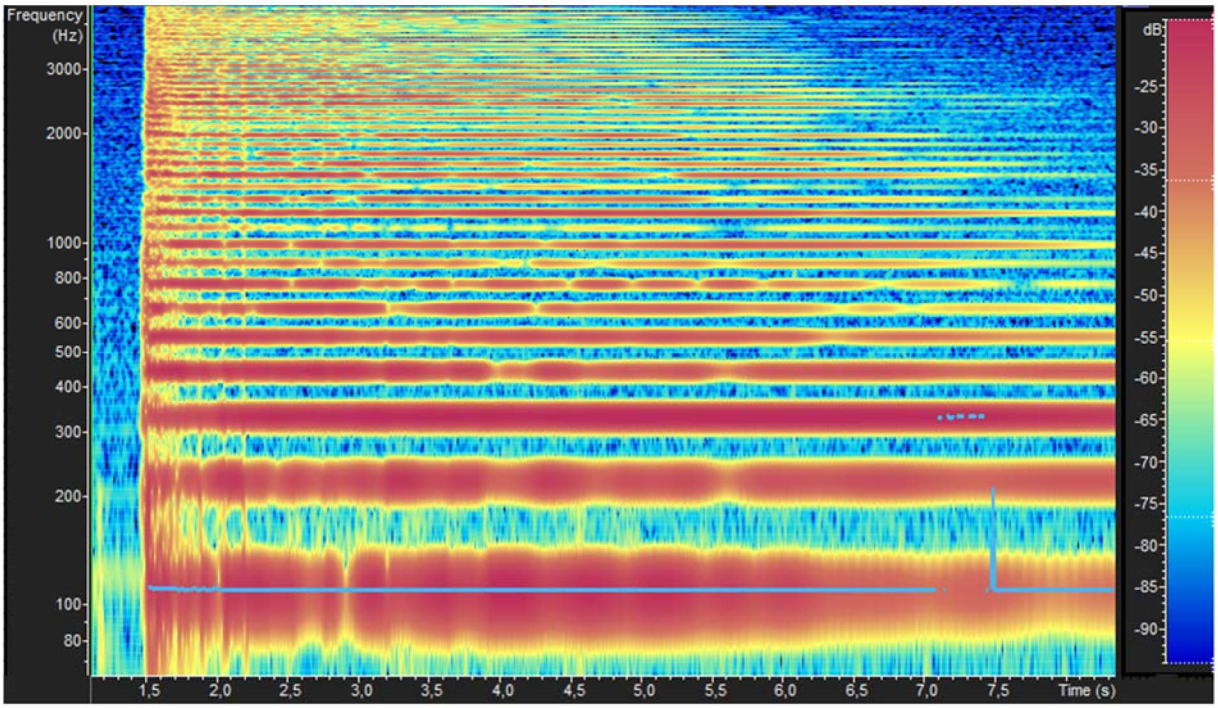
Slika 17:Ton A_2 na akustičnoj gitari (otvorena 5. žica)



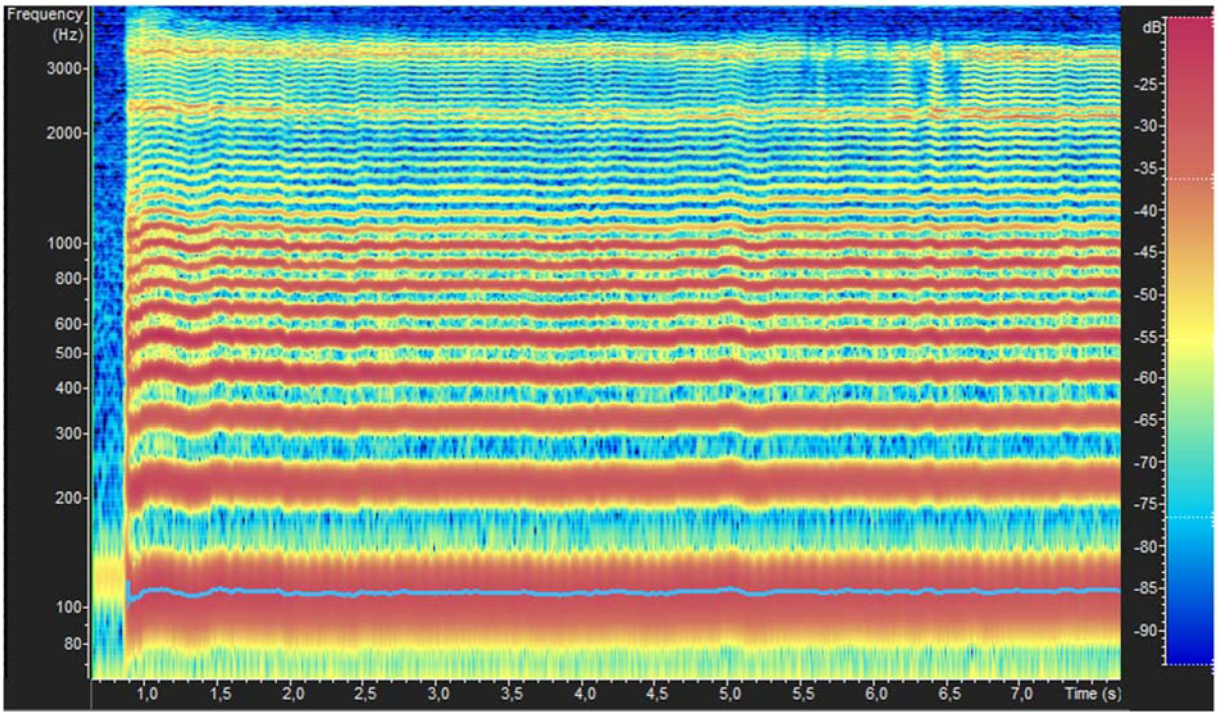
Slika 18: Ton A_2 na električnoj gitari (otvorena 5. žica) (*clean*)



Slika 19: Tonovi C_3, D_3, E_3, F_3, G_3, A_3, H_3, C_4 (C dur skala) na električnoj gitari (*clean*)



Slika 20: Ton A_2 (otvorena 5. žica) na električnoj gitari (*distorzija*)



Slika 21: Ton A_2 otpjevano

Kao što je prikazano i u prethodnom dijelu, složeni zvukovi sastavljeni su od više frekvencija.

4. Zaključak

Nakon što je pokazan osnovni model titranja napete niti, pokazano je kako žica može titrati na više načina u isto vrijeme. Boja tona ovisi o zastupljenosti viših harmonika pri samom titranju. Tako će akustična i električna gitara davati različite zvukove, a pri tome se za električnu gitaru signal može na pojačalu modificirati, mijenjati kvaliteta i intenzitet zvuka. Polja na gitari postavljana su tako da se pritiskom žica proizvode tonove kromatične temperirane ljestvice od 12 tonova, jer je time omogućeno transponiranje glazbe u različite tonalitete.

5. Literatura i reference

[1] https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/a743968a-901e-4aa4-9117-d7d5dedac0d5/html/7180_Opis_vala.html

[2] *Paul G. Hewitt, Conceptual Physics, 12th Edition, City College of San Francisco, 2015.*

[3] *Zvonko Glumac, Klasična mehanika,* http://gama.fizika.unios.hr/~zglumac/utm.pdf

[4] https://brilliant.org/wiki/applying-boundary-conditions-to-standing-waves/

[5] *Mladen Paić, Gibanja, sile, valovi, Školska knjiga, 1997.*

[6] *Hugh D. Young, University Physics, 13th Edition, University of California, 2012.*

[7] *Josip Planinić, Osnove fizike 3 (Valovi – akustika – optika – uvod u atomsku fiziku), Filozofski Fakultet Osijek, 2005.*

[8] http://pages.mtu.edu/~suits/notefreqs.html

[9] *Overtone Analyzer*: *https://www.sygyt.com/en/*

[10] *Soundcard Oscilloscope: https://www.zeitnitz.eu/scope_en*

6. Životopis

Mladen Žigmundić rođen je 20.9.1991. godine u Virovitici. Pohađao je Osnovnu školu Augusta Harambašića u Donjem Miholjcu. Opću gimnaziju završio je u Donjem Miholjcu 2010. godine nakon čega upisuje integrirani studij fizike i informatike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2013. prebacuje se na Odjel za fiziku, Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, gdje trenutno studira.