Plin u gravitacijskom polju

Mudri, Ivan

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA FIZIKU

IVAN MUDRI

PLIN U GRAVITACIJSKOM POLJU

Završni rad

Osijek, 2016.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA FIZIKU

IVAN MUDRI

PLIN U GRAVITACIJSKOM POLJU

Završni rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
radi stjecanja zvanja prvostupnika fizike

Osijek, 2016.

″Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom izv.prof.dr.sc. Ramira Ristić u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. ″

Sadržaj

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku Završni rad
Odjel za fiziku

PLIN U GRAVITACIJSKOM POLJU

IVAN MUDRI

Sažetak

Rad započinje opisom Boltzmannove raspodjele kojom se opisuje stanje plina u gravitacijskom polju. Zatim ću definirati što je to gravitacijsko polje u kojem se promatrani plin nalazi, što je u ovom slučaju zrak. Nakon toga upotrebom Boltzmannove raspodjele dolazim do barometarskih formula kojima se opisuje stanje plina u gravitacijskom polju. Te zatim se opisuje eksperimentalna potvrda Boltzmannove raspodjele, koju nam je omogućio Perrin.

(7 stranica, 4 slike)

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: Boltzmannova raspodjela, gravitacijsko polje, Perrinovi pokusi

Mentor: izv.prof.dr.sc. Ramir Ristić

Ocjenjivači:

Rad prihvaćen:

University Josip Juraj Strossmayer Osijek Bachelor of Physics Thesis
Department of Physics

PLIN U GRAVITACIJSKOM POLJU

IVAN MUDRI

Abstract

Thesis begins with description of the Boltzmann distribution which describes the state of the gas in the gravitational field. Then I will define the gravitational field of the observed gas, which is in this case air . Then I applied the Boltzmann distribution to generate barometric formulas which describes the state of the gas in the gravitational field. And then we have described the experimental confirmation of the Boltzmann's distribution , which was made by Perrin .

(7 pages, 4 figures)

Thesis deposited in Department of Physics library

Keywords: Boltzmann distribution, gravitational field, Perrin's experiments

Supervisor: izv.prof.dr.sc. Ramir Ristić

Reviewers:

Thesis accepted

1. UVOD

U statističkoj fizici, Boltzmannova raspodjela dobro opisuje stanje plina u gravitacijskom polju. Čestice zraka na Zemlji su pod djelovanjem sile teže i stoga neće biti jednako vjerojatno da se čestice nalaze na različitim visinama podjednako.
Teoriju je razvio austrijski fizičar Ludwig Boltzmann, a uz Boltzmannovu raspodjelu razvija i proširuje kinetičku teoriju plinova čime je udario temelje statističke termodinamike.

2. TEORIJSKI DIO

2.1. Boltzmannova raspodjela

Boltzmannova raspodjela je raspodjela koja nam kaže koliki je broj čestica (molekula ili atoma, ili bilo čega što tvori promatrani sustav) u sustavu koji je u toplinskoj ravnoteži (sustav mora biti pri konstantnoj temperaturi), koje imaju određeni iznos energije (kinetičke ili potencijalne). Još se i naziva Maxwell-Boltzmannova raspodjela, a govori i kolika je vjerojatnost da će neka čestica u tom sustavu imati neku energiju. Funkcija

(1) $$\rho(E) = C \cdot e^{-\frac{E}{k_B T}}$$

predstavlja Boltzmannovu funkciju raspodjele čestica prema energijama, gdje je T temperatura sistema, k_B Boltzmannova konstanta koja iznosi 1.38 x $10^{-23} \frac{J}{K}$, E energija za koju nas zanima broj čestica, a ρ(E) broj čestica koje imaju danu energiju. C je konstanta koju određujemo iz uvjeta da ukupni broj čestica mora biti jednak ukupnom broju čestica N u sistemu:

(2) $$\sum_i \rho(E) = \sum_i C \cdot e^{-\frac{E}{k_B T}} = N$$

Pogledamo li koliki je omjer broja čestica u nekom sistemu na dva različita energetska nivoa E_1 i E_2 (E_2>E_1) dobiti ćemo:

(3) $$\frac{n_2}{n_2} = \frac{C \cdot e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{C \cdot e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} = e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{k_B T}} < 1$$

Vidimo da je broj čestica s većom energijom manji. Taj zaključak vrijedi općenito: vjerojatnost da čestica ima neku energiju je manji što je energija veća.
Ako prethodni izraz napišemo u obliku:

(4) $$n_2 = n_1 \cdot e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{k_B T}}$$

dobili smo još jedan oblik definicije Boltzmannove raspodjele koji kaže koliki je broj čestica n_2 neke energije E_2 u odnosu na broj čestica n_1 energije E_1.
Boltzmannova raspodjela se primjenjuje samo na česticama na dovoljno visokim temperaturama i na dovoljno niskim gustoćama tako da kvantni efekti mogu biti ignorirani.
Boltzmannova raspodjela je od iznimne važnosti za razumijevanju cijelog niza spektroskopskih metoda kao što su atomska i molekulska spektroskopija, infracrvena i Ramanova spektroskopija te nuklearna magnetska rezonancija. Također je važna za razumijevanje fizikalne osnove funkcioniranja lasera i masera.

2.2. Gravitacijsko polje

Gravitacijsko polje je potencijalno vektorsko polje. Ono se za svaku točku definira kao sila gravitacije na točkastu česticu u toj točki podijeljena masom te čestice. Gravitacijsko polje oko mase m_1 je dano s:

(5) $$g(\vec{r}) = \frac{F_g}{m_2} = G\,\frac{m_1}{r^3}\vec{r}$$

Ova veličina nam govori kojom silom gravitacijsko polje privlači tijelo u nekoj točki prostora određenoj radijvektorom $\vec{r}$. Mjerna jedinica je njutn po kilogramu ($\frac{N}{kg}$), a lako se može pokazati da je njutn po kilogramu isto što i metar u sekundi na kvadrat ($\frac{m}{s^2}$), što je mjerna jedinica ubrzanja. Gravitacijska akceleracija Zemlje iznosi prosječno 9,80665 $\frac{m}{s^2}$ na površini Zemlje. Stoga je jakost gravitacijskog polja u nekoj točki prostora jednaka gravitacijskom ubrzanju u toj točki.

Potencijalna energija čestice u gravitacijskom polju dana je sa izrazom:

(6) $$E_{pot} = mgx$$

što će nam kasnije poslužiti kod razmatranja plina u gravitacijskom polju.

2.3. Plin u gravitacijskom polju

Poznato nam je da s porastom visine opadaju gustoća i tlak zraka. Pretpostaviti ćemo da je temperatura zraka na svim visinama jednaka, što u realnom slućaju nije tako. Ta pretpostavka omogućit će nam primjenu Boltzmannove raspodjele. Kinetičke energije molekula su tada u svim visinama približno jednake, te iznose:

(7) $$E_{pot} = mgx$$

Promatramo stupac plina presjeka 1 m^2. Volumen stupca visine x do visine x+dx biti će jednak 1 m^2dx.

Vjerojatnost da će se molekula nalaziti na visini između x i x+dx je jednaka:

(8) $$dW = Ce^{\frac{-mgx}{k_BT}},$$

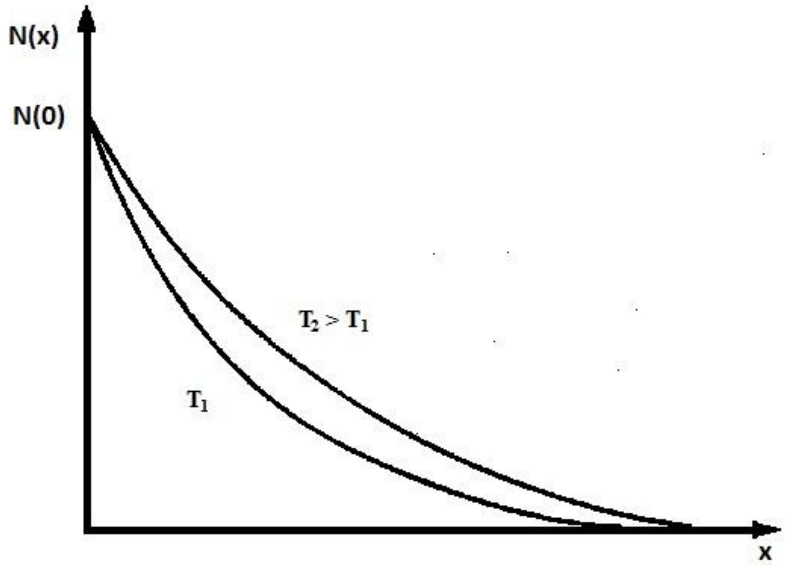
gdje je C konstanta.

Vidimo da će najvjerojatniji položaj čestice biti uz tlo (x=0), a prema gore vjerojatnost eksponencijalno opada.

Broj molekula u 1 m^3 uz tlo ćemo označiti sa N_0. Tada je broj molekula u 1 m^3 na visini x jednak:

(9)
$$N = N_0 e^{\frac{-mgx}{k_B T}}.$$

Stavimo li da je x=0, tada dobijemo broj molekula u 1 m^3 uz tlo. Broj molekula u 1 m^3 pomnožen masom molekula nam daje gustoću plina.

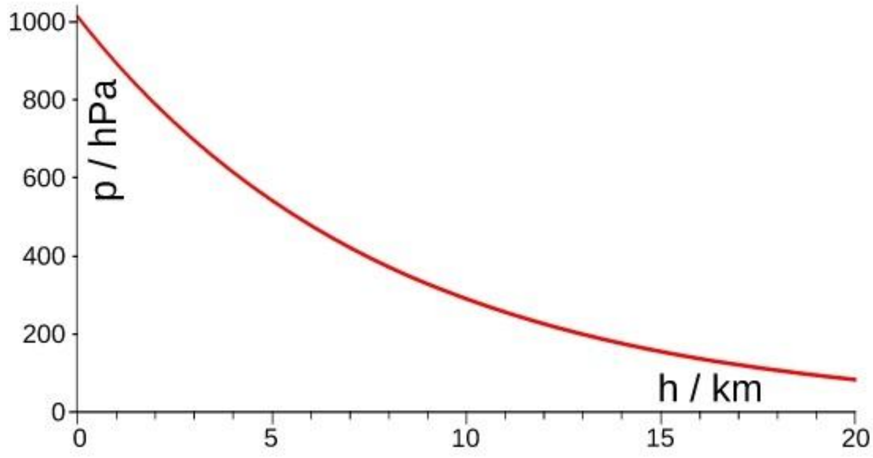


Slika 1. Koncentracija čestica s obzirom na visinu

Vidimo da nam formula (9) ujedno daje i zakon po kojemu opada gustoća plina s visinom. Međutim, gustoća plina je pri konstantnoj temperaturi proporcionalna tlaku. Označimo li gustoću na tlu sa ρ_0 i tlak sa p_0, tada ćemo dobiti baromaterske formule za gustoću i tlak:

(10)
$$\rho = \rho_0 e^{\frac{-mgx}{k_B T}}$$
$$p = p_0 e^{\frac{-mgx}{k_B T}}.$$

Pri primjeni prethodnih formula za zrak, treba uzeti u obzir da se zrak sastoji od različitih plinova.



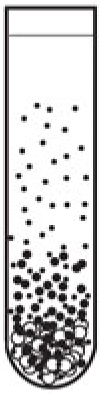
Slika 2. Graf barometarske formule

Za svaki taj plin moramo postaviti zasebnu raspodjelu, u kojoj je masa molekule konstanta. Iz formula (10) se vidi da za teže molekule gustoća i tlak brže opadaju. Prema tome očekujemo da ćemo u visokim slojevima naći sve manje težih plinova.

2.4. Perrinovi pokusi

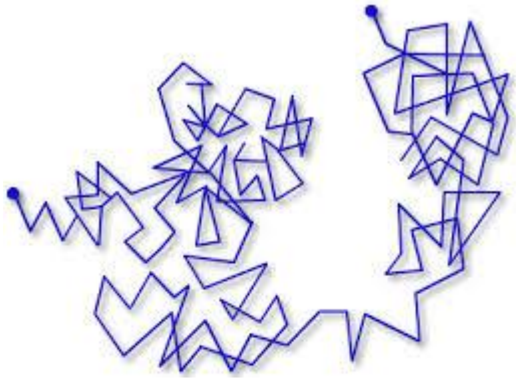
Barometarske formule vrijede pri malim intervalima, te pri konstantnoj temperaturi. Godine 1909., francuski fizičar, Jean Baptiste Perrin je opisao set eksperimenata za čestice u takvim uvjetima, koji prikazuju potvrdu Boltzmannove raspodjele čestica.

Perrin je promatrao „plin od vidljivih čestica". Čestice tog umjetnog plina nisu bile molekule, nego kuglice mastike (lat. *Garcinia morella*). Zatim je kuglice stavio u vodu, jer bi u plinu pale na tlo. Kada se kuglice mastike urone u vodu one tvore svijetlo žutu emulziju, koja pod mikroskopom izgleda kao roj savršeno sferičnih žutih globusa. Kuglice je bilo moguće vidjeti mikroskopski, što mu je omogućilo da ih prebroji.



Slika 3. Sedimentna ravnoteža

Prema Arhimedovu zakonu, težina kuglice je umanjena za težinu istisnute vode, te je padanje kuglica prema dnu vrlo usporeno. Kuglice mastike su lebdjele u vodi, te su izvodile Brownovo gibanje koje se opaža na sitnim česticama na zraku ili tekućini.



Slika 4. Brownovo gibanje

Kako je prosječna energija mikroskopskih čestica bila jednaka prosječnoj energiji molekula, tako je Perrin stvorio jako uvećani plin koji se izvrsno slagao sa zakonima statistike. Tada je broj kuglica mastike u u 1 m^3 dan sa raspodjelom:

(11) $$N = N_0 e^{\frac{-mgx}{k_B T}},$$

a logaritam omjera broja kuglica na visinama x_1 i x_2 jednak je:

(12) $$\ln\frac{N_1}{N_2} = \frac{mg}{k_B T}(x_2 - x_1).$$

Perrin je vrlo precizno odredio broj kuglica na različitim visinama, a pri tome i razliku u visinama. Otprije je znao masu kuglica mastike, a temperatura T je bila sobna. Jedina nepoznata veličina je bila Boltzmannova konstanta k_B. Perrin je tako pronašao vrlo točnu metodu za određivanje Boltzmannove konstante, te kad je poznata ta konstanta, zna se i koliko ima molekula u molu.

Perrinove uvećane „molekule“ ima su promjer $4{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm. Pronašao je i omjer broja kuglica pri visinskoj razlici od $1{,}1 \cdot 10^{-2}$ cm i 293 K, koji iznosi 100:12. Težina *mg* kuglica mastike u vodi iznosila je $7{,}2 \cdot 10^{-12} N$. Uvrstimo li eksperimentalne podatke u formulu (12) dobivamo za k_B približnu istu tabličnoj vrijednosti, koja iznosi 1.38 x $10^{-23}\frac{J}{K}$.

3. ZAKLJUČAK

Izvedene barometarske formule vrijede ukoliko je konstantna temperatura, te ujedno vrijede pri malim intervalima. Međutim, s povećanjem visine u realnim uvjetima razlike u temperaturama su značajne. Tako temperatura na visini od 10 km ljeti iznosi -50°C. Penjemo li se još više temperatura značajno raste, te je na visinama između 40 i 50 km iznosi +50°C. Idući još prema gore temperatura padne na -70°C, te da bi na visini od 220 km značajno narasla.
Ovo promjena temperature s visinom, koje je posljedica miješanja zraka i Sunca, nam pokazuje ograničenja Boltzmannove raspodjele.
No, Perrinova metoda je jedna od glavnih podrški kinetičke teorije čestica. Pokazuje nam koliko dalek sežu statistički zakoni, a osobito Boltzmannova raspodjela.

4. LITERATURA

1. Ivan Supek (1992), *Teorijska fizika i struktura materije I. dio, Školska knjiga, Zagreb*

2. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/thumb/4/44/PerrinPlot2.svg/1280px-PerrinPlot2.svg.png - slika preuzeta 27.7.2015

3. Kevin Davey (2008), *What Is Gibbs' Canonical Distribution?*, članak preuzet s URL: http://philsci-archive.pitt.edu/4282/1/Gibbs.pdf

4. Uwe-Jens Wiese (2010*), Statistical Mehanics, Albert Einstein Center for Fundamental Physics, Institute for Theoretical Physics, Bern University*, članak preuzet s URL: http://www.wiese.itp.unibe.ch/lectures/thermodyn.pdf

5. http://images.tutorvista.com/cms/images/38/brownian-motion1.PNG - slika preuzeta 10.9.2015

5. ŽIVOTOPIS

Ivan Mudri rođen je 09.06.1993.godine u Vinkovcima, Republika Hrvatska. Pohađao je Prirodoslovno-matematičku gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, klasa 2008./2012. Nakon završene srednje škole, upisao je preddiplomski studij fizike na Odjelu za fiziku, Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, gdje trenutno studira.