Fluktuacije oko srednjih vrijednosti

Mršić, Doris

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

DORIS MRŠIĆ

FLUKTUACIJE OKO SREDNJIH VRIJEDNOSTI

Završni rad

Osijek, 2016.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

DORIS MRŠIĆ

FLUKTUACIJE OKO SREDNJIH VRIJEDNOSTI

Završni rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

radi stjecanja zvanja prvostupnice u Osijeku

Osijek, 2016.

Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom doc. dr. sc. Ramira Ristića u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za fiziku

Završni rad

FLUKTUACIJE OKO SREDNJIH VRIJEDNOSTI

DORIS MRŠIĆ

Sažetak :

U ovom radu nastoji se teorijskim putem pobliže objasniti sam pojam fluktuacije srednjih vrijednosti te na koji način ona utječe na broj čestica sustava. Na početku rada objašnjeni su pojmovi koji će nam biti potrebni za razumijevanje rada u cijelosti. Kasnije kroz konkretne primjere dolazimo do krajnjih rezultata i zaključka samog rada.

Kao mjeru koja će pokazivati kolika je raspršenost oko srednje vrijednosti koristiti ćemo se relativnom devijacijom, koja se dobiva dijeljenjem srednje vrijednosti sa standardnom devijacijom. Standardna devijacija označava mjeru raspršenosti podataka u nekom skupu i osnovni je podatak u statističkoj obradi podataka. Grafički, podaci se prikazuju Gaussovom krivuljom.

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: fluktuacija /kanonska raspodjela / standardna devijacija / srednja vrijednost

Mentor: doc.dr.sc Ramir Ristić

Ocjenjivač: doc.dr.sc Ramir Ristić

Rad prihvaćen:

University Josip Juraj Strossmayer
Department of Phisics

Bachelor of Physics Thesis

FLUCTUATIONS AROUND THE AVERAGE VALUE

DORIS MRŠIĆ

Abstract:

In this thesis the term of fluctuation around the average value and its influence on system particle number wil be discussed. Terms required for comprehension of this thesis will be explained in the introduction. Later, final results and conclusion will be introduced through particular examples.

Relative deviation, which is defined as a ratio of mean and standard deviation, will be used as a measure of mean square distribution. Standard deviation is defined as a measure of data set distribution and it is basic information in statistical data processing. Data is shown graphically as Gaussian curve.

Thesis deposited in the library of the Department of Physics

Keywords: fluctuation / canonical distribution / standard deviation / average value

Supervisors: doc.dr.sc Ramir Ristić

Rewievers: doc.dr.sc Ramir Ristić

Thesis accepted:

Sadržaj

Uvod

Očekivana vrijednost neke varijable koja je izračunana statističkim metodama nazivamo srednjom vrijednošću. Ponavljanjem velikog broja određivanja , većina rezultata se gomila oko te srednje vrijednosti. Samo manji broj rezultata značajnije odstupa što nazivamo fluktuacijom. Odnosno točnije definirano, fluktuacija je nasumično odstupanje promatrane fizikalne veličine od srednje vrijednosti . U plinovima s velikim brojem čestica odstupanje od statističkog prosjeka su beznačajno male , dok promatranjem manjeg broja čestica dolazimo do zapaženih rezultata.

1. Fazni prostor plina

Hamiltonove kanonske jednadžbe gibanja dane su slijedećim izrazom :

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \;;\; \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \;;\; \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \;;\; s = 1,2,3, \ldots\ldots, S$$

Gdje smo s H označili Hamiltonovu funkciju koja ovisi o poopćenim koordinatama, poopćenim količinama gibanja i vremenu H = H ($\vec{q}, \vec{p}, t$). Oznaka S predstavlja stupanj slobode tijela tj. broj međusobno nezavisnih skalarnih veličina nužnih za određivanje položaja svih čestica sustava.

Po Hamiltonu možemo gibanje čestice predočiti u poopćenom 2S – dimenzijalnom prostoru s koordinatama $q_s \; i \; p_s$. Taj poopćeni prostor nazivamo fazni prostor. Čestici s određenim položajem i impulsom pripada u faznom prostoru jedna točka .

Promotrimo li plin s S stupnjeva slobode , njegovo stanje u 2S – dimenzijalnom prostoru je određeno poopćenim koordinatama i impulsima cijelog sustava. Diferencijalni element faznog volumena plina označiti ćemo s dΦ = $dq_1, dq_2, \ldots. dq_s dp_1, dp_2, \ldots dp_s$. Fazni prostor plina nazivamo Γ-prostor. Stanje plina predočeno je u svakom trenutku reprezentativnom točkom u Γ-prostoru, a gibanje reprezentativne točke određeno je kanonskim jednadžbama .[1]

[1] dr. Supek, I. Teorijska fizika i struktura materije prvi dio: III. Statistička mehanika. Zagreb: Školska knjiga, 1992., str. 111 . Glumac, Z. Klasična mehanika. 2006., str. 651.

2. Mikrokanonski i kanonski ansambli

Sustavi se mogu nalaziti u raznim mikrostanjima , a da pokazuju ista makroskopska svojstva. Ta množina različitih mikrostanja povezanih s istim makrostanjem tvori statistički ansambl. Odnosno veliki broj ekvivalentnih sustava koji pripadaju različitim mikrostanjima su elementi statističkog ansambla.

Promotrimo razliku između mikrokanonskog i kanonskog ansambla.

Mikrokanonski ansambl opisuje sustave koji su potpuno izolirani od svoje okoline, a energija sustava je točno određena.

Funkcija mikrokanonske raspodjele je slijedeća :

$$f(H) = konst. \quad H = U$$

$$0 \qquad H \neq U$$

Kanonski ansambli sadrže sustave istog broja čestica i iste temperature. Svaki od sustava koji pripadaju kanonskom ansamblu dio je nekog većeg sustava, s kojim se može izmjenjivati energija. Energija sustava kanonskog ansambla nije egzaktno određena. Mikrokanonske i kanonske ansamble uveo je u statistička razmatranja Gibbs (1901.).

Funkcija kanonske raspodijele ima slijedeći oblik :

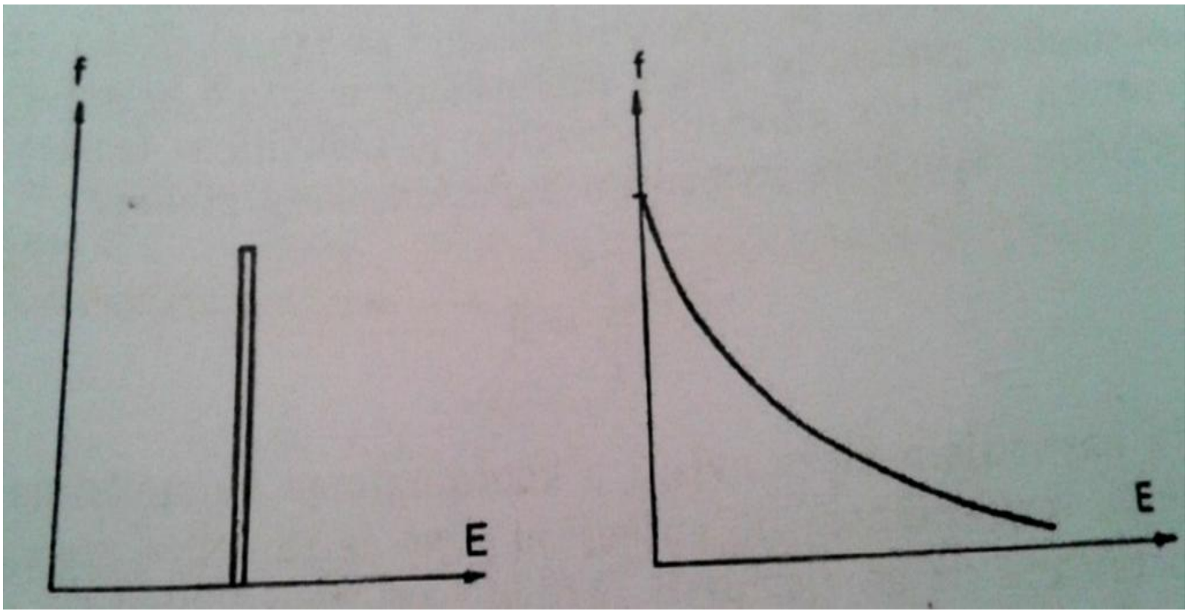
$$f = A\, e^{\frac{\psi - H}{\theta}} \;;\quad \theta = kT \;;\quad b = \frac{1}{k\,T} \;;\quad \psi = F$$

$$f = Ae^{b(F-H)}$$

Oznaka A predstavlja neku konstantu , b konstantu kanonske raspodijele, a oznaka k je Boltzmanova konstanta (k = 1,38*10^{-23} J/K). Parametar ψ jednak je slobodnoj energiji F.

Modul raspodjele θ funkcija je temperature i naziva se također statističkom temperaturom. Što je modul raspodjele veći to je veća vjerojatnost populacije viših energetskih nivoa.

Raspodjela u kanonskom ansamblu mijenja se s energijom sustava po eksponencijalnom zakonu. Njezin istaknuti maksimum je na plohi , a izvan nje naglo iščezava. Na osnovi kanonske raspodjele mogu se proračunati prosječne vrijednosti različitih fizičkih veličina, pa između tih prosjeka tražiti termodinamičke veze. Pomoću te raspodijele računat ćemo fluktuacije oko srednjih vrijednosti.[2]



1.1 Mikrokanonska i kanonska raspodjela

[2] dr. Supek, I. Teorijska fizika i struktura materije prvi dio: III. Statistička mehanika. Zagreb : Školska knjiga, 1992.. str. 136 – 141.

3. Postavljanje problema

Promotrimo neku fizikalnu veličinu G (q,p) koja općenito može ovisiti o generaliziranim koordinatama i impulsima svih molekula u plinu. U statističkoj fizici ta veličina je reprezentirana srednjom vrijednošću statističkog ansambla , a prema kanonskoj raspodjeli ona je jednaka:

$$\bar{G} \; = \int G f d\Phi = \frac{\int G e^{-bH}\, d\Phi}{\int e^{-bH}\; d\Phi} \quad ; \; b = \frac{1}{kT}$$

Stvarne vrijednosti veličine G (q,p) općenito će se razlikovati od G. Ono što želimo pronaći je mjeru koja će pokazivati kolika je disperzija (raspršenost) oko srednje vrijednosti. Odstupanje od prosječne vrijednosti mjerit ćemo pomoću standardne devijacije.

$$(\Delta G)^2 = \overline{(G - \bar{G})}^2 = \bar{G}^{\,2} - 2\bar{G}\,\bar{G} \; + \bar{G}^{\,2} = \bar{G}^{\,2} - (\,\bar{G}\,)^2$$

Kako bi dobili bezdimenzionalnu veličinu, odnosno relativnu devijaciju, standardnu devijaciju ćemo podijeliti s prosječnom vrijednošću:

$$\frac{\Delta G}{\bar{G}} = \frac{\sqrt{\bar{G}^{\,2} - (\,\bar{G}\,)^2}}{\bar{G}}$$

Što je manja relativna devijacija , to će $\bar{G}$ vjernije opisivati veličinu G(q, p).

3.1. Primjer energije plina

Kao konkretni primjer promotrit ćemo energiju plina . Poći ćemo od integralnog uvjeta kanonske raspodjele (uvjeta normiranja) , gdje $d\Phi$ predstavlja diferencijalni element 2S faznog Γ-prostora .

$$\int f d\Phi = 1$$

$$A \int e^{b(F-H)} \; d\Phi = 1$$

$$d\Phi = dq_1, \ldots\ldots d\Phi_s \; dp_1 \ldots . dp_s$$

Parcijalnim deriviranjem uvjeta normiranja po parametru b , držeći volumen konstantnim , dobivamo :

$$(*) \qquad A \int e^{b(F-H)} \left[\left(\frac{\partial bF}{\partial b} \right)_V - H \right] d\Phi = 0$$

U gornjoj jednadžbi prepoznajemo izraz za prosječnu energiju:

$$\overline{U} = -\left(\frac{\partial bF}{\partial b} \right)_{\mathrm{V}}$$

Daljnjim deriviranjem sada (*) izraza ponovno po parametru b dobivamo:

$$A \int e^{b(F-H)} \left[(\overline{U} - H)^2 + \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial b} \right)_V \right] d\Phi = 0$$

Odnosno :

$$\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial b} \right)_V = -\int (H - \overline{U})^2 \; f \; d\Phi = -\left(\overline{H - \overline{U}} \right)^2 = -(\Delta U)^2$$

Uzmemo li u obzir da vrijedi slijedeća relacija :

$$\frac{\partial}{\partial b} = -k\,T^2 \frac{\partial}{\partial T}$$

Za standardnu devijaciju energije dobivamo :

$$\Delta U = \sqrt{k\,T^2 \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}$$

U gornjoj formuli možemo primijetiti izraz za toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

Stoga izraz za relativno odstupanje energije poprima slijedeći oblik:

$$\frac{\Delta U}{\overline{U}} = \frac{T\,\sqrt{k\,C_V}}{\overline{U}}$$

Pogledamo li slučaj monoatomnog idealnog plina, u izraz za prosječnu energiju stavljamo :

$$\overline{U} = \frac{3}{2}\,N\,k\,T$$

Za relativnu fluktuaciju konačno onda dobivamo :

$$\boxed{\frac{\Delta U}{\overline{U}} = \sqrt{\frac{2}{3\,N}}}$$

3.2. Općenito za bilo koju fizikalnu veličinu

Pretpostavljajući da je interakcija dovoljno mala , rastavit ćemo sustav na niz nezavisnih podsustava. Termodinamička veličina G (q,p) sustava jednaka je zbroju doprinosa svih podsustava :

$$G = \sum_{i=1}^{N} g_i$$

U svakom podsustavu standardna devijacija je jednaka :

$$\Delta g_i = \sqrt{\overline{g_i^2} - (\overline{g}_i)^2}$$

A u cijelom sustavu :

$$(**) \quad \Delta G = \sqrt{\overline{G}^2 - (\overline{G})^2} = \sqrt{\left(\sum_i \overline{g_i^2} + \sum_{i\,j}' \overline{g_i g_j}\right) - \left(\sum_i (\overline{g}_i)^2 + \sum_{i\,j}' \overline{g}_i \overline{g}_j\right)} \qquad i \neq j$$

Budući da među podsustavima nema povezanosti za srednju vrijednost produkta vrijedi:

$$\overline{g_i g_j} = \overline{g}_i \overline{g}_j$$

Stoga se izraz (**) može svesti na :

$$\Delta G = \sqrt{\sum_i (g_i)^2}$$

Često se sustav može podijeliti na jednake podsustave. Tada su srednje vrijednosti za sve podsustave iste :

$$\Delta G = \Delta g \sqrt{N}$$

Konačno za relativnu fluktuaciju dobivamo :

$$\boxed{\frac{\Delta G}{\overline{G}} = \frac{\Delta g}{\overline{g}\sqrt{N}}}$$

4. Rezultati i zaključak:

Promatrajući primjer energije plina vidimo da razmazanost energije oko srednje vrijednosti opada s korijenom iz broja čestica u sustavu tj. za dovoljno velike sustave srednja energija kanonskog ansambla dobro opisuje energiju promatranog sustava. Relativno odstupanje od srednje vrijednosti to je manje što je veći broj stupnjeva slobode .

Disperzija energije u kanonskom ansamblu za makroskopska tijela nema značajnu ulogu iz tog razloga jer je temperatura plina određena, a time je ujedno određena i njegova energija .

Izborom proizvoljne ekstezivne veličine došli smo do istog rezultata. Također važno je napomenuti da što je veći broj međusobno nekoleriranih podsustava , to je disperzija oko prosječne vrijednosti manja.

Naposljetku možemo zaključiti da je relativna fluktuacija uvijek obrnuto razmjerna kvadratnom korijenu iz broja čestica za bilo koju proizvoljnu veličinu . [3]

[3] dr. Supek, I. Teorijska fizika i struktura materije prvi dio: III. Statistička mehanika. Zagreb : Školska knjiga, 1992., str. 185. - 188.

5. Literatura:

1. dr. Supek, I. Teorijska fizika i struktura materije prvi dio: III. Statistička mehanika. Zagreb : Školska knjiga, 1992.

2. Glumac, Z. Klasična mehanika. 2006.

3. http://www.atomskaspektrometrija.com/index.php/izvodi-iz-knjige/statisticka-obrada-rezultata (1.9.2016.)

4. http://struna.ihjj.hr/ (4.9.2016.)

6. Životopis

Doris Mršić rođena je 01.10.1993. u Osijeku. Pohađala je Osnovnu školu „Antunovac“ u Antunovcu, te nakon toga upisuje I. gimnaziju u Osijeku. Nakon završene gimnazije upisuje Preddiplomski studij fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

.