Problem triju tijela

Balić, Mihaela

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Physics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:160:328754

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**



Repository / Repozitorij:

Repository of Department of Physics in Osijek







SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU



MIHAELA BALIĆ

PROBLEM TRIJU TIJELA

Završni rad

Osijek, 2017.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU



MIHAELA BALIĆ

PROBLEM TRIJU TIJELA

Završni rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

radi stjecanja naziva prvostupnice fizike

Osijek, 2017.

„Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom doc.dr.sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.“

Sadržaj

UVOD 1

GENERALNI PROBLEM TRIJU TIJELA 2

TROKUTASTA RJEŠENJA 3

KOLINEARNA RJEŠENJA 5

REDUCIRANI PROBLEM TRIJU TIJELA 6

RAVNOTEŽNE TOČKE 9

STABILNOST LAGRANGEOVIH TOČAKA 10

ZAKLJUČAK 17

LITERATURA 18

ŽIVOTOPIS 18

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku Završni rad

Odjel za fiziku

PROBLEM TRIJU TIJELA

MIHAELA BALIĆ

Sažetak

Tema ovog rada je generalni problem triju tijela. Općenito, taj problem nije analitički rješiv stoga se stavlja naglasak na reducirani problem triju tijela. Reducirani problem riješio je Lagrange, koji je rekao da treće tijelo zanemarive mase može nesmetano opstati u sustavu na položaju pet točaka koje su po njemu dobile naziv Lagrangeove točke ($L_1 - L_5$).

U radu ću detaljno opisati stabilnost tih točaka te se uvjeriti da su tri točke nestabilne (L_1, L_2, L_3), a preostale dvije stabilne (L_4, L_5). Te točke od velike su praktične važnosti, a potvrda njihova postojanja su grupa asteroida poznati pod nazivom „Trojanci“.

(17 stranica, 6 slika)

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: Problem triju tijela/reducirani problem/Lagrangeove točke

Mentor: doc.dr.sc. Zvonko Glumac

Ocjenjivač: doc.dr.sc. Zvonko Glumac

Rad prihvaćen:

University Josip Juraj Strossmayer Osijek
Department of Physics

Bachelor of Physics Thesis

THE THREE BODY PROBLEM

MIHAELA BALIĆ

Abstract

The theme of this thesis is the general problem of three bodies. Generally, this problem is not analytically solved, therefore we emphasize the reduced problem of the three bodies. Reduced problem was solved Lagrange, who said that a third body of negligible mass can freely exist in the system at the position of five points that are named after him, Lagrange point ($L_1 - L_5$).

I will describe the stability of these points in detail and indicate that the three points are unstable (L_1, L_2, L_3), and the remaining two are stable (L_4, L_5). These points are of great practical significance, and proof of their existence is a group of asteroids known as "Trojans".

(17 pages, 6 figures)

Thesis deposited in Department od Physics library

Keywords: Three-body problem/Reduced problem/Lagrange points

Supervisor: Zvonko Glumac, Ph.D., Assistant professor

Thesis accepted:

UVOD

Klasični gravitacijski problem triju tijela bio je predmetom mnogih istraživanja u 18. i 19. stoljeću. Zainteresiranost za ovaj problem proživjela je obnovu u posljednjim desetljećima. Opći problem triju tijela ostaje neriješen i danas, ali je omogućen važan napredak pojavom naprednih računalnih hardvera i metoda.

Razvojem nebeske mehanike riješen je problem dvaju tijela. Isaac Newton pokazao je da se tijelo giba oko središta gravitacijske sile po jednoj od čunjosječnica, ovisno o početnoj brzini. U tom problemu tijela se vladaju po Keplerovim zakonima. Prvo i najjednostavnije periodično egzaktno rješenje problema triju tijela je gibanje po kolinearnim elipsama koje je pronašao Euler (1767). Također je promatrao gibanje Mjeseca uz pretpostavku da Zemlja i Sunce orbitiraju jedno oko drugog po kružnim orbitama, dok je za Mjesec smatrao da je zanemarive mase. Ovaj pristup je danas poznat kao reducirani problem triju tijela. Otprilike u isto vrijeme Lagrange (1772) je otkrio rješenje pomoću jednakostraničnog trokuta. Za treće je tijelo Joseph Louis de Lagrange našao da može neporemećeno ostati u sustavu na položaju pet točaka u ravnini u kojoj se gibaju sva tijela. Te točke nazivaju se Lagrangeove točke i označavaju oznakama $L_1 - L_5$.

Temelje za modernu teoriju reduciranog problema triju tijela razvili su Jacobi (1836), Delaunay (1860) i Hill (1878). Poincare je 1889. godine nagrađen za prvu osobu koja je riješila problem n-tijela. Iako, strogo govoreći, on nije riješio ni opći problem triju tijela, a kamoli njih n, no njegovi su uvidi uvelike pomogli u poslu koji je uslijedio.

U ovom radu dati ću uvid u neka od poznatih točnih rješenja koja vrijede za posebne slučajeve te skicirati nekoliko aspekata reduciranog problema triju tijela.

GENERALNI PROBLEM TRIJU TIJELA

Slučaj triju tijela nije samo najjednostavniji neriješeni problem mnogo tijela, nego je to i problem od najveće praktične važnosti. Prema tome, to je i najviše temeljito proučavano i razumljivo. Problem triju tijela je najuspješnije napadnut analizom mogućnosti da se smanji na problem dvaju tijela. Apsorbiranjem gravitacijske konstante G u definiciju mase, za tri tijela jednadžbe

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} = -G \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{(\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_j})}{|\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_j}|^3} \tag{1}$$

se mogu zapisati

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} &= -m_2 \frac{\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}}{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|^3} - m_3 \frac{\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_3}}{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_3}|^3} \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} &= -m_3 \frac{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_3}}{|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_3}|^3} - m_1 \frac{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}}{|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}|^3} \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{3}} &= -m_1 \frac{\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_1}}{|\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_1}|^3} - m_2 \frac{\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_2}}{|\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_2}|^3} \end{aligned} \tag{2}$$

Sa središtem mase kao ishodištem, radij-vektori povezani su relacijom

$$m_1 \boldsymbol{x}_1 + m_2 \boldsymbol{x_2} + m_3 \boldsymbol{x_3} = 0. \tag{3}$$

Jednadžbe gibanja triju tijela imaju najsličniji oblik kada se izražavaju u terminu relativnih radij-vektora $\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, \boldsymbol{s_3}$ definiranih kao

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s_1} &= \boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{s_2} &= \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{s_3} &= \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} \end{aligned} \tag{4}$$

koji su povezani relacijom

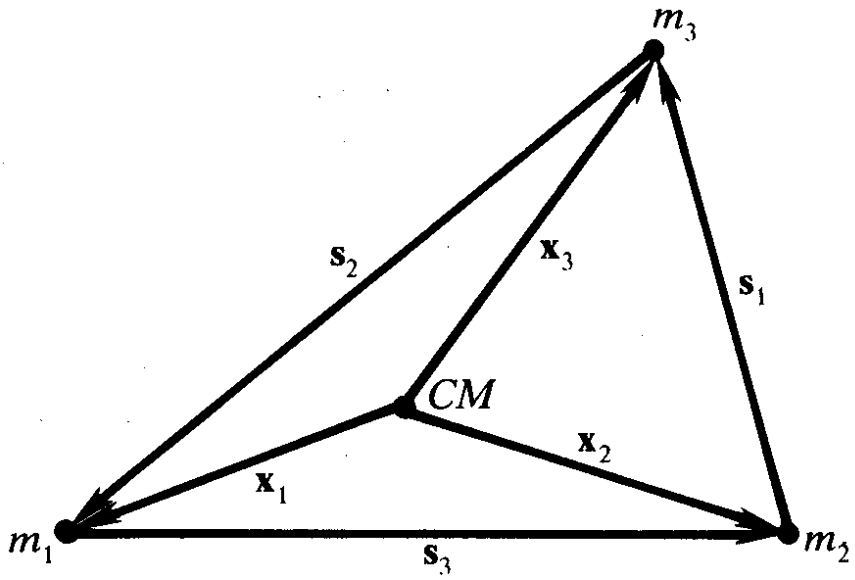
$$\boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{s_2} + \boldsymbol{s_3} = 0 \tag{5}$$

(Slika 1). Rješavanjem (3) i (4) za $\boldsymbol{x_k}$, dobiva se

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{x_1} &= m_3 \boldsymbol{s_2} - m_2 \boldsymbol{s_3} \\ m\boldsymbol{x_2} &= m_1 \boldsymbol{s_3} - m_3 \boldsymbol{s_1} \\ m\boldsymbol{x_3} &= m_2 \boldsymbol{s_1} - m_1 \boldsymbol{s_2} \end{aligned} \tag{6}$$

gdje je

$$m = m_1 + m_2 + m_3. \tag{7}$$



Slika 1. Radij-vektori problema triju tijela

Trebamo (6) da povežemo rješenja u terminima simetričnih varijabli $\boldsymbol{s_k}$ do fiksnog centra mase. Supstitucijom (4) u (2), dobivamo jednadžbe gibanja u simetričnoj formi

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{s}}_1 &= -m\frac{\boldsymbol{s_1}}{{s_1}^3} + m_1\boldsymbol{G} \\ \ddot{\boldsymbol{s}}_2 &= -m\frac{\boldsymbol{s_2}}{{s_2}^3} + m_2\boldsymbol{G} \\ \ddot{\boldsymbol{s}}_3 &= -m\frac{\boldsymbol{s_3}}{{s_3}^3} + m_3\boldsymbol{G} \end{aligned} \tag{8}$$

gdje je $s_k = |\boldsymbol{s_k}|$, i

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{s_1}}{{s_1}^3} + \frac{\boldsymbol{s_2}}{{s_2}^3} + \frac{\boldsymbol{s_3}}{{s_3}^3}. \tag{9}$$

Značajnu jednostavnost ove formulacije najprije su naglasili Broucke i Lass 1973. godine. Očigledno je to predviđeno u dva stoljeća istraživanja problema triju tijela. Kasnije ćemo vidjeti kako ona pružaju izravan put do poznatih točnih rješenja ovoga problema.

TROKUTASTA RJEŠENJA

Sustav jednadžbi (8) odvaja se u tri skupine, gdje su dvije jednadžbe slične ukoliko je G=0. Uspoređujući (5) i (9) vidi se da će to biti zadovoljeno ako je

$$\boldsymbol{s_1}^2 = \boldsymbol{s_2}^2 = \boldsymbol{s_3}^2\,, \tag{10}$$

odnosno ako su čestice smještene na vrhovima jednakostraničnog trokuta. Tada se dvije stranice trokuta mogu izraziti u terminima treće

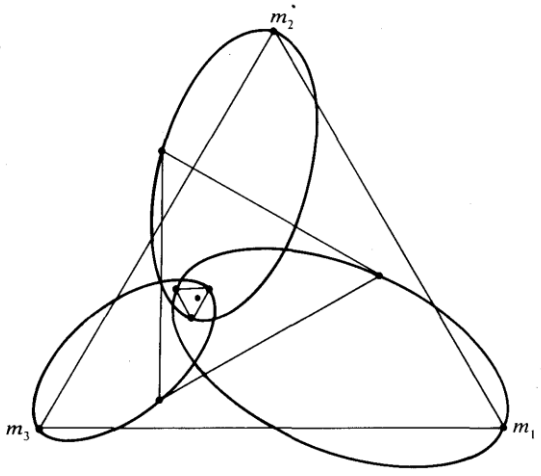
$$\begin{aligned} \boldsymbol{s_1} &= \boldsymbol{s_3} e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2}\left(1 + \boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\boldsymbol{s}_3, \\ \boldsymbol{s_2} &= \boldsymbol{s_3} e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2}\left(1 - \boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\boldsymbol{s}_3, \end{aligned} \tag{11}$$

gdje je **i** imaginarna jedinica. Trokutasti odnos će se održati ako je **i** konstantan pa $\boldsymbol{s_1}$ i $\boldsymbol{s_2}$ određuju $\boldsymbol{s_3}$ cijelo vrijeme. To je konzistentno s G=0 u (8). Tako smo pronašli cijelu familiju rješenja koja reduciraju na rješenja Keplerova problema dvaju tijela. Kao što je izraženo pomoću (11), tri čestice ostaju na vrhovima jednakostraničnog trokuta, ali trokut može promijeniti veličinu i orijentaciju u ravnini dok se čestice kreću. Rješenje jednakostraničnog trokuta otkrio je Lagrange. Treba imati na umu da je potpuno neovisno o masama čestica.

Kako bi se opisale orbite čestica obzirom na središte mase, treba napraviti zamjenu (11) u (6) te se dobiva

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{x}}_1 &= \frac{1}{2}\left[-2m_2 - m_3 + \boldsymbol{i}m_3\sqrt{3}\right]\boldsymbol{s_3} \\ m\ddot{\boldsymbol{x}}_2 &= \frac{1}{2}\left[2m_1 + m_3 + \boldsymbol{i}m_3\sqrt{3}\right]\boldsymbol{s_3} \\ m\ddot{\boldsymbol{x}}_3 &= \frac{1}{2}\left[m_1 - m_2 - \boldsymbol{i}(m_1 + m_2)\sqrt{3}\right]\boldsymbol{s_3}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Ovo pokazuje da čestice slijede orbite slične onima dva tijela, s razlikom jedino u veličini i orijentaciji određenoj masama. Treba napomenuti da je vektor ubrzanja svake čestice usmjeren prema središtu mase. Orbite eliptičnog gibanja prikazane su na Slici 2. Slične orbite, za hiperbolično i parabolično gibanje, vrlo lako se konstruiraju.



Slika 2. Lagrangeov jednakostranični trokut kao rješenje za mase omjera $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 2 : 3$

KOLINEARNA RJEŠENJA

Euler je pronašao još jedno točno rješenje jednadžbi triju tijela gdje sve čestice leže na liniji te se nalaze na udaljenostima fiksnog omjera. Da bi se utvrdili opći uvjeti za takvo rješenje, pretpostavlja se da se čestica 2 nalazi između druge dvije čestice. Tada je uvjet (5) zadovoljen pisanjem

$$s_1 = \lambda s_3\,, s_2 = -(1+\lambda)s_3 \tag{13}$$

gdje je λ proizvoljni pozitivni skalar. Sada se može eliminirati **G** iz jednadžbe (8) kako bi dobili

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{s}}_1 + m\frac{\boldsymbol{s}_1}{{s_1}^3} &= \frac{m_1}{m_3}\left(\ddot{\boldsymbol{s}}_3 + m\frac{\boldsymbol{s}_3}{{s_3}^3}\right), \\ \ddot{\boldsymbol{s}}_2 + m\frac{\boldsymbol{s}_2}{{s_2}^3} &= \frac{m_2}{m_3}\left(\ddot{\boldsymbol{s}}_3 + m\frac{\boldsymbol{s}_3}{{s_3}^3}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Uvrštavanjem (13) u ove jednadžbe kako bi se eliminirali $\boldsymbol{s}_1$ i $\boldsymbol{s}_2$, dobivamo

$$\begin{aligned} [m_2 + m_3(1+\lambda)]\ddot{\boldsymbol{s}}_3 &= -[m_2 + m_3(1+\lambda)^{-2}]\frac{m\boldsymbol{s}_3}{{s_3}^3} \\ (m_1 - m_3\lambda)\ddot{\boldsymbol{s}}_3 &= -(m_1 - m_3\lambda^{-2})\frac{m\boldsymbol{s}_3}{{s_3}^3}. \end{aligned} \tag{15}$$

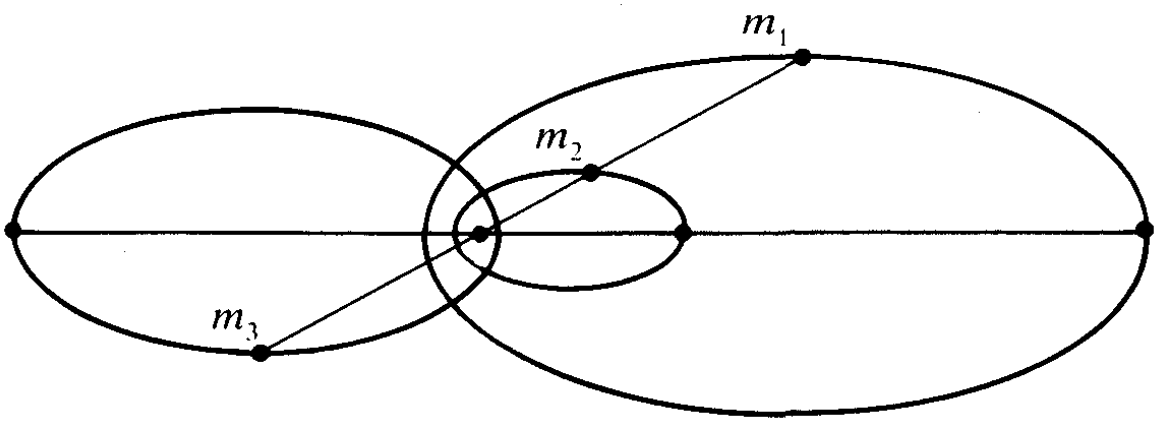
Prema tome,

$$\frac{m_2 + m_3(1+\lambda)}{m_1 - m_3\lambda} = \frac{m_2 + m_3(1+\lambda)^{-2}}{m_1 - m_3\lambda^{-2}}. \tag{16}$$

Stavljajući to u standardni oblik, dobiva se polinom petog stupnja:

$$\begin{aligned} (m_1+m_2)\lambda^5 + (3m_1+2m_2)\lambda^4 + (3m_1+m_2)\lambda^3 - (m_2+3m_3)\lambda^2 \\ -(2m_2+3m_3)\lambda - (m_2+m_3) = 0\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Lijeva strana je negativna za $\lambda = 0$ i pozitivna kada $\lambda \to \infty$; prema tome polinom ima pozitivan pravi korijen. Po Descartesovom zakonu znakova, nema više od jednog pozitivnog korijena. Stoga je λ jedinstvena funkcija mase, a rješenja za dva tijela, (15), određuju cijelu familiju kolinearnih rješenja za tri tijela. Druga dva rješenja dobivena su stavljanjem različitih čestica između preostalih. Dakle, postoje tri različite familije kolinearnih rješenja za problem tri tijela. Rješenje za eliptični slučaj je prikazano na Slici 3.



Slika 3. Eulerovo kolinearno rješenje za mase omjera $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 2 : 3$

REDUCIRANI PROBLEM TRIJU TIJELA

Problem tri tijela može se promatrati kao perturbacija[1] treće čestice zbog gibanja druge dvije koje zovemo primarnima. Za ovu svrhu prikladno je uvesti Jacobijeve koordinate $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{r}$. Vektor $\boldsymbol{r}$ je radij-vektor treće čestice referiran na središte mase primarnih čestica koje se nalaze na

$$\frac{m_1\boldsymbol{x_1} + m_2\boldsymbol{x_2}}{m_1 + m_2} = \frac{-m_3\boldsymbol{x_3}}{m_1 + m_2} \,. \tag{18}$$

Stoga,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_3} + \frac{m_3\boldsymbol{x_3}}{m_1 + m_2} = \frac{m}{\mu}\boldsymbol{x_3} \tag{19}$$

gdje je $m = m_1 + m_2 + m_3$ i $\mu = m_1 + m_2$. Relativni radij-vektor za primarne čestice je

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} \tag{20}$$

U terminima Jacobijevih koordinata, relativni položaj treće čestice u odnosu na primarne je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r_1} &= \boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x} + m_2\mu^{-1}\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r_2} &= \boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x} - m_1\mu^{-1}\boldsymbol{r} \,. \end{aligned} \tag{21}$$

Isto tako, jednadžbe gibanja tri tijela (2) preuzimaju oblik jednadžbe relativnog gibanja primarnih čestica

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + m_3\left(\frac{\boldsymbol{r_2}}{{r_2}^3} - \frac{\boldsymbol{r_1}}{{r_1}^3}\right) \tag{22}$$

[1] Odstupanje od gibanja po Keplerovim zakonima.

povezane s jednadžbom gibanja treće čestice u odnosu na primarne

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{m_1 m}{\mu}\frac{\boldsymbol{r_1}}{{r_1}^3} - \frac{m_2 m}{\mu}\frac{\boldsymbol{r_2}}{{r_2}^3}\,. \tag{23}$$

Ovdje $\boldsymbol{r_1}$ i $\boldsymbol{r_2}$ treba smatrati pomoćnim varijablama definiranim u terminima Jacobijevih varijabli relacijama (21).

Jacobijeve koordinate najprikladnije su kada je masa trećeg tijela puno manja od mase primarnih. Kada je masa m_3 toliko mala da se njezin utjecaj na primarne mase m_1 i m_2 može zanemariti, može se pisati $m = \mu = m_1 + m_2$ i jednadžbe (22) i (23) reduciraju se na

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{24}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -m_1\frac{\boldsymbol{r_1}}{{r_1}^3} - m_2\frac{\boldsymbol{r_2}}{{r_2}^3}\,. \tag{25}$$

Problem rješavanja ovih jednadžbi naziva se reducirani problem triju tijela.

Većina istraživanja vezanih za problem triju tijela koncentriraju se na kružni reducirani problem, koji je ograničen na kružna rješenja jednadžbe primarna dva tijela (24). Osim korisnih matematičkih pojednostavljenja, ovaj specijalni slučaj ima važne praktične primjene. On je dobar model koji opisuje sustav Sunce – Zemlja – Mjesec, ili putovanje svemirske letjelice između Zemlje i Mjeseca. Stoga će se upravo ovaj model opisati malo detaljnije.

Prikladno je napraviti ovu promjenu notacije u (24) i (25):

$$\ddot{\boldsymbol{r}}' = -\mu\frac{\boldsymbol{r}'}{r^3} \tag{26}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}' = -m_1\frac{{\boldsymbol{r_1}}'}{{r_1}^3} - m_2\frac{{\boldsymbol{r_2}}'}{{r_2}^3}\,. \tag{27}$$

Kružno rješenje za (26) s kutnom frekvencijom $\boldsymbol{\omega}$ je

$$\boldsymbol{r}' = R^{\dagger}\boldsymbol{r}R = \boldsymbol{r}R^2\,, \tag{28}$$

gdje je

$$R = e^{1/2i\boldsymbol{\omega}t} \tag{29}$$

i **r** je fiksni vektor, relativni radij-vektor primarnih čestica u rotirajućem sustavu. Kretanje primarnih čestica najlakše se računa jednadžbom (27) ukoliko se ona transformira u rotirajući sustav u kojem primarne čestice miruju. Prema tome je

$$\boldsymbol{x}' = R^{\dagger}\boldsymbol{x}R\,, \qquad {\boldsymbol{r_k}}' = R^{\dagger}\boldsymbol{r_k}R \tag{30}$$

te supstitucijom u (27) dobiva se jednadžba rotirajućeg sustava:

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \tag{31}$$

gdje je

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) - m_1 \frac{\boldsymbol{r_1}}{{r_1}^3} - m_2 \frac{\boldsymbol{r_2}}{{r_2}^3} \tag{32}$$

„efektivna sila“ s $\boldsymbol{r_1}$ i $\boldsymbol{r_2}$ danim jednadžbama (21). Napomenimo da je „efektivna sila“ **F(x)** konzervativna sila s potencijalom

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 - \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}, \tag{33}$$

odnosno,

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U\,. \tag{34}$$

Koristeći $\nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega}$ i $\nabla \boldsymbol{x}^2 = 2\boldsymbol{x}$, pronalazimo da je negativni gradijent „centrifugalnog pseudopotencijala“

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x})^2 = \frac{1}{2}[(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})^2 - \boldsymbol{\omega^2 x^2}] \tag{35}$$

zapravo „centrifugalna pseudosila“

$$-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega^2 x} - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\,. \tag{36}$$

Oznaka ∧ je obični binarni operator koji predstavlja logičko i. Pomnožimo li jednadžbu gibanja (31) s $\dot{\boldsymbol{x}}$ i koristeći (34), lako se dokazuje da se dobiva upravo konstanta gibanja, koja je poznata kao Jacobijev integral.

$$C = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 + U(\boldsymbol{x})\,. \tag{37}$$

Naravno, ovo je samo integral energije za sustav tri tijela s uklonjenim doprinosima primarnih čestica, što je i dopušteno u aproksimaciji reduciranog problema. Prije proučavanja partikularnih rješenja reduciranog problema, možemo pojednostaviti računanje odabirom jedinice duljine tako da je

$$r^2 = 1\,, \tag{38.a}$$

jedinice vremena da je

$$\omega^2 = 1\,, \tag{38.b}$$

i jedinice mase da je

$$\mu = m_1 + m_2 = 1\,. \tag{38.c}$$

Definiranjem parametra razlike u masi $\boldsymbol{\gamma}$ s

$$m_1 - m_2 = \mu\gamma\,, \tag{38.d}$$

imamo

$$m_1 = \frac{1}{2}(1+\gamma), m_2 = \frac{1}{2}(1-\gamma)\,, \tag{38.e}$$

gdje je γ pozitivan za $m_1 > m_2$.

RAVNOTEŽNE TOČKE

Točka x_0 u kojoj funkcija **F(x)** iščezava naziva se ravnotežna točka (stacionarna točka ili točka libracije) diferencijalne jednadžbe (31). Čestica će u početnom trenutku u ravnotežnoj točki mirovati jer njezino ubrzanje iščezava. Ravnotežne točke su „kritične točke“ potencijala U(x) jer iz (34) vidimo

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla U(\boldsymbol{x_0}) = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) = 0\,,$$

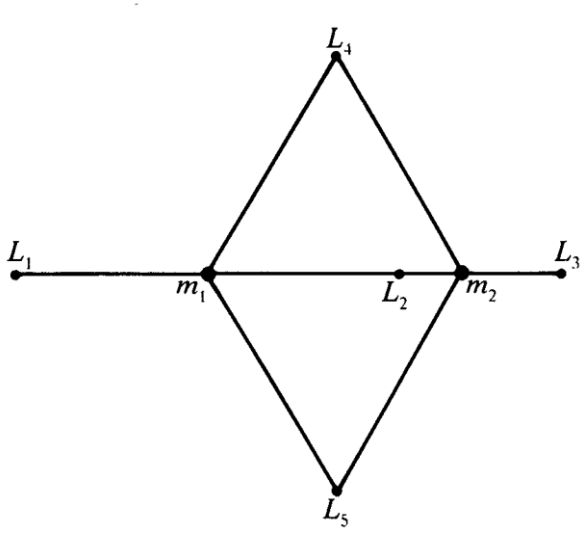
odnosno, u ravnotežnoj točki $\boldsymbol{x_0}$ usmjerena derivacija potencijala iščezava u svakom smjeru **a**. Ravnotežne točke su rješenja jednadžbe

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x_0}) - m_1\frac{\boldsymbol{r_1}}{{r_1}^3} - m_2\frac{\boldsymbol{r_2}}{{r_2}^3} = 0\,, \tag{39}$$

gdje je, prema (21) i (38.c),

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{x_0} + m_2\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{x_0} - m_1\boldsymbol{r}\ . \tag{40}$$

Množenjem (39) i (40) s $\boldsymbol{\omega}$, određujemo da je $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x_0} = 0$. Stoga, sve ravnotežne točke leže u orbitalnoj ravnini primarnih čestica (nazivamo ju primarna ravnina). Rješenja jednadžbe (39) samo su reducirana verzija egzaktnih rješenja Lagrangea i Eulera koje smo pronašli za generalizirani problem triju tijela. Budući da su primarne čestice fiksno razdvojene, postoje dvije ravnotežne točke $\boldsymbol{L_4}$ i $\boldsymbol{L_5}$ koje se nalaze na vrhovima jednakostraničnog trokuta s ${\boldsymbol{r_1}}^2 = {\boldsymbol{r_2}}^2 = \boldsymbol{r}^2$, te tri ravnotežne



Slika 4. Pet Lagrangeovih točaka reduciranog problema triju tijela

točke $\boldsymbol{L_1}$, $\boldsymbol{L_2}$, $\boldsymbol{L_3}$ kolinearne s položajem primarnih čestica (Slika 4). Tih pet ravnotežnih točaka nazivamo Lagrangeove točke. Ove točke imaju veoma veliko značenje u astronomiji. Grupa asteroida poznatih kao „Trojanci“ pronađeni su blizu točaka $\boldsymbol{L_4}$ i $\boldsymbol{L_5}$ u sustavu Sunce – Jupiter. Lagrangeova točka $\boldsymbol{L_4}$ u sustavu Zemlja – Mjesec predložena je kao prikladno mjesto za svemirsku koloniju.

STABILNOST LAGRANGEOVIH TOČAKA

Smatra se da je ravnotežna točka stabilna ukoliko čestica ostaje u blizini te točke prilikom djelovanja malih smetnji. Kako bi se istražila stabilnost točke $\boldsymbol{x_0}$, računamo kako sila $\boldsymbol{F(x)}$ varira ukoliko postoji mali pomak ε iz točke $\boldsymbol{x_0}$. Taylorov razvoj funkcije nam daje

$$\boldsymbol{F(x_0 + \varepsilon) = F(x_0) + \varepsilon \cdot \nabla F(x_0) + \cdots} \tag{41}$$

gdje se mogu zanemariti uvjeti višeg reda. Uvažavajući notaciju $\boldsymbol{F'(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \nabla F(x_0)}$ te diferenciranjem (32) dobivamo

$$\boldsymbol{F'(\varepsilon) = -\omega \times (\omega \times \varepsilon) - \left(\frac{m_1}{{r_1}^3} + \frac{m_2}{{r_2}^3}\right)\varepsilon + 3\left(m_1 r_1 \frac{r_1 \cdot \varepsilon}{{r_1}^5} + m_2 r_2 \frac{r_2 \cdot \varepsilon}{{r_2}^5}\right)} \tag{42}$$

gdje su $\boldsymbol{r_1}$ i $\boldsymbol{r_2}$ dani s (40). Supstituiramo li $\boldsymbol{F(x_0) = 0}$ u jednadžbu (41) i $\boldsymbol{x(t) = x_0 + \varepsilon(t)}$ u jednadžbu gibanja (31), dobiva se linearna varijacijska jednadžba

$$\boldsymbol{\ddot{\varepsilon} + 2\omega \times \dot{\varepsilon} = F'(\varepsilon)}\,. \tag{43}$$

Ovo je linearna jednadžba gibanja u blizini ravnotežne točke. Kažemo da je linearna zbog toga što je $\boldsymbol{F'(\varepsilon)}$ linearna aproksimacija sile $\boldsymbol{F(x_0 + \varepsilon)}$. Jednadžba se zove varijacijska jer opisuje odstupanje (varijacije) iz referentne orbite, odnosno kružne orbite ravnotežne točke u primarnoj ravnini.

Težak matematički problem je dokazati da je stabilnost linearne jednadžbe dovoljna za stabilnost nelinearne. To je riješeno samo za pojedine slučajeve, stoga se treba zadovoljiti rezultatima linearne analize, proučavanja rješenja linearne jednadžbe (43). Stabilnost različitih Lagrangeovih točaka mora biti ispitana odvojeno. No, prvo je bitno utvrditi kvalitativne značajke varijacijske jednadžbe koje pridonose stabilnosti.

Za komponentu pomaka $\varepsilon_3 = \boldsymbol{\omega \cdot \varepsilon}$ u smjeru vektora $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ okomitom na primarnu ravninu, množenjem (42) i (43) s $\boldsymbol{\omega}$ dobivamo jednadžbu

$$\ddot{\varepsilon_3} = -\left(\frac{m_1}{{r_1}^3} + \frac{m_2}{{r_2}^3}\right)\varepsilon_3 \,. \tag{44}$$

Budući da je koeficijent pozitivan, ε_3 je ograničen na male oscilacije. Dakle, ravnotežne točke su stabilne obzirom na pomake okomite na primarnu ravninu. U ostatku analize ograničavamo se na gibanje unutar primarne ravnine.

Iz (42) vidimo da je $\boldsymbol{F'(\varepsilon)}$ simetrična linearna funkcija. Štoviše, za pomake u primarnoj ravnini,

$$\boldsymbol{\varepsilon \cdot F'(\varepsilon)} = \left(1 - \frac{m_1}{{r_1}^3} - \frac{m_2}{{r_2}^3}\right)\boldsymbol{\varepsilon^2} + 3\left(\frac{m_1}{{r_1}^5}(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^2\right) + 3\left(\frac{m_2}{{r_2}^5}(\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^2\right) \tag{45}$$

Vidjet ćemo da prvi koeficijent nestaje kada se procjenjuje na Lagrangeove točke L_4 i L_5 pa je $\boldsymbol{\varepsilon \cdot F'(\varepsilon)} > 0$ za $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$. Ovo nam govori da je $\boldsymbol{F'(\varepsilon)}$ odbojna sila koja se linearno povećava s udaljenosti. Možemo to izraziti na drugi način umetanjem (44) u (45) da dobijemo

$$(\boldsymbol{\varepsilon \cdot \nabla})^2 U(\boldsymbol{x_0}) = -\boldsymbol{\varepsilon \cdot F'(\varepsilon)} < 0\,, \tag{46}$$

koja se drži za bilo koji smjer $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ u primarnoj ravnini. Ovo nam govori da je efektivni potencijal U(x) maksimalan u ravnotežnim točkama. Drugim riječima, Lagrangeove točke L_4 i L_5 su vrhovi potencijalnih brda primarne ravnine. Štoviše, L_4 i L_5 su stabilne točke ako je zadovoljen određeni uvjet na masu primarnih masa.

Da bismo vidjeli kako je moguća stabilnost na potencijalnom brdu, uzmemo česticu u mirovanju te ju gurnemo s vrha. Kako se brzina čestice povećava, prema (43) Coriolisova sila povećava se, a čestica je skrenuta u desno. Ukoliko je skretanje dovoljno, čestica se počinje gibati uzbrdo i usporava dok ne počne padati ponovno dolje, ponovivši postupak. Dakle, Coriolisova sila može vezati česticu do „pseudopotencijalnog" maksimuma, stvarajući stabilnost. Skretanje udesno Coriolisove sile je suprotno u smislu rotacije primarnih masa što izražavamo rekavši da je gibanje čestica retrogradno. Kako bismo vidjeli jesu li uvjeti za stabilnost Lagrangeovih točaka zadovoljeni, moramo kvantitativno ispitati rješenja varijacijske jednadžbe (43).

Za točke , L_4 i L_5 vrijedi ${r_1}^2 = {r_1}^2 = r^2 = 1$, stoga se (42) reducira na strogo odbojnu silu

$$\boldsymbol{F'(\varepsilon)} = 3(m_1\boldsymbol{r_1 r_1 \cdot \varepsilon} + m_2\boldsymbol{r_2 r_2 \cdot \varepsilon}) = \frac{3}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} + m_1\boldsymbol{r_1 \varepsilon r_1} + m_2\boldsymbol{r_2 \varepsilon r_2}) \tag{47}$$

U L_4, stranice trokuta povezane su s

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r_1} &= \boldsymbol{r e^{i\pi/3}} = \boldsymbol{r}\frac{1}{2}\left(1 + \boldsymbol{i}\sqrt{3}\right), \\ \boldsymbol{r_2} &= \boldsymbol{r e^{i2\pi/3}} = \boldsymbol{r}\frac{1}{2}\left(-1 + \boldsymbol{i}\sqrt{3}\right) \end{aligned} \tag{48}$$

gdje je $\boldsymbol{i} = i\boldsymbol{\omega}$ jedinični bivektor primarne ravnine. Primjetimo da $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ implicira $\boldsymbol{i\varepsilon} = -\boldsymbol{i\varepsilon}$, stoga supstitucija (48) i (38) u (47) vodi do sljedećeg eksplicitnog oblika linearne jednadžbe:

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{3}{2}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{r\varepsilon r}\frac{3}{4}\left(-1 + \boldsymbol{i}\gamma\sqrt{3}\right). \tag{49}$$

Ovo možemo pojednostaviti izražavanjem $\boldsymbol{F}'$ u terminima njegovih svojstvenih vektora. To je najjednostavnije učiniti pisanjem

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e_1}e^{\boldsymbol{i}\Phi}, \tag{50}$$

gdje je $\boldsymbol{e_1}$ svojstveni vektor koji se može dobiti iz $\boldsymbol{r}$ ukoliko je poznat Φ.

Sada,

$$\boldsymbol{r\varepsilon r} = \boldsymbol{e_1\varepsilon e_1}e^{\boldsymbol{i}2\Phi}\ ,$$

i to će pojednostaviti zadnji izraz u (49) ako

$$\tfrac{3}{4}\left(-1 + \boldsymbol{i}\gamma\sqrt{3}\right) = \beta e^{-\boldsymbol{i}2\Phi}. \tag{51}$$

To podrazumijeva da

$$\tan(2\Phi) = \gamma\sqrt{3}\ , \tag{52}$$

stoga možemo (49) staviti u generalnu formu

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{\varepsilon}) = \alpha\boldsymbol{\varepsilon} + \beta\boldsymbol{e_1\varepsilon e_1}\ , \tag{53}$$

gdje su

$$\alpha = \frac{3}{2} \quad i \quad \beta = -\frac{3}{4}(1 + 3\gamma^2)^{1/2} \tag{54}$$

u ovom partikularnom rješenju. Iz (53)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{e_1}) &= (\alpha + \beta)\boldsymbol{e_1}\ , \\ \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{e_2}) &= (\alpha - \beta)\boldsymbol{e_2}\ , \end{aligned} \tag{55}$$

pokazuje se da su $\boldsymbol{e_1}$ i $\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_1 i}$ svojstveni vektori od $\boldsymbol{F}'$ sa svojstvenim vrijednostima $\alpha \pm \beta$.

Koristimo (53) kako bismo (43) stavili u formu

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{i} = \alpha\boldsymbol{\varepsilon} + \beta\boldsymbol{e_1\varepsilon e_1}. \tag{56}$$

Prikladno je formulirati ovo kao jednadžbu spinora[2]

$$Z = \boldsymbol{e_1\varepsilon} \tag{57}$$

[2] U geometriji i fizici, spinori su elementi kompleksnog vektorskog prostora koji se mogu povezati s Euklidskim prostorom.

koja daje odnos $\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\boldsymbol{e_1}$ s $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{e_1}Z$. Dakle, dobivamo

$$\ddot{Z} + 2\boldsymbol{i}\dot{Z} = \alpha Z + \beta Z^{\dagger}. \tag{58}$$

Problem stabilnosti sveden je na proučavanje rješenja ove jednadžbe. Poznato je da su rješenja te jednadžbe dana u obliku $Z = a\, e^{\boldsymbol{i}\lambda t}$ ako je $\beta = 0$. Međutim, kada je $\beta \neq 0$ rješenja ne mogu biti u ovom obliku jer konjugacija $Z^{\dagger}$ mijenja predznak eksponencijalne funkcije. Ovo sugestira da razmotrimo probno rješenje u obliku

$$Z = ae^{\boldsymbol{i}\lambda t} + be^{-\boldsymbol{i}\lambda t}, \tag{59}$$

gdje su a i b kompleksni koeficijenti koji se računaju iz početnih uvjeta. Parametar λ mora biti realan za stabilna rješenja, jer ako ima imaginarni dio jedan od eksponencijalnih članova će neprestano rasti. Supstituiranjem (59) u (58) i razdvajanjem koeficijenata jednadžbe s različitim eksponencijalnim faktorom, dobiva se

$$\begin{aligned} a(\lambda^2 + 2\lambda + \alpha) &= -\beta b^{\dagger} \\ b(\lambda^2 - 2\lambda + \alpha) &= -\beta a^{\dagger} \end{aligned} \tag{60}$$

Pod pretpostavkom $\lambda = \lambda^{\dagger}$, eliminiramo a i b iz ove jednadžbe da dobijemo

$$(\lambda^2 + \alpha)^2 - 4\lambda^2 = \beta^2$$

Ovo je kvadratna jednadžba za λ^2 s rješenjem

$$\lambda^2 = (2 - \alpha) \pm (\beta^2 - 4\alpha + 4)^{1/2} \tag{61}$$

Za pojedine vrijednosti α i β u (54), ovo postaje

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}(27\gamma^2 - 23)^{1/2}\,. \tag{62}$$

Oba korijena biti će realna ako i samo ako je

$$\gamma = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} > \left(\frac{23}{27}\right)^{1/2} = 0.922958\,, \tag{63}$$

i oba realna korijena će biti pozitivna za $\gamma^2 < 1$. Tako smo pronašli rješenje za masu primarne mase potrebno za stabilnost točke L_4.

Za sustav Sunce – Jupiter omjer masa je oko 1000:1, stoga je $\gamma = 0.999$. Za sustav Zemlja – Mjesec taj omjer je 81.4:1, pa je $\gamma = 0.977$. Ove vrijednosti zadovoljavaju nejednadžbu (63) pa su točke L_4 i L_5 stabilne za oba sustava.

Za realni i pozitivni korijen λ određen s (62), znamo iz razmatranja harmonijskog oscilatora da rješenja (59) opisuju elipsu. Međutim, (59) nije oblik općeg rješenja kao što je to slučaj kod harmonijskog oscilatora, jer koeficijenti a i b nisu međusobno neovisni, nego su povezani s jednadžbama (60). Stoga je zanimljivo utvrditi početne uvjete koji daju takvo posebno rješenje.

Odaberimo početno vrijeme u (59) tako da je a realan i pozitivan. Tada (60) i (54) kažu da

$$\frac{b}{a} = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + \alpha}{-\beta} = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + \alpha}{[(\lambda^2 + \alpha)^2 - 4\lambda^2]^{1/2}} > 1\,. \tag{64}$$

Koristeći (57) i (59), možemo napisati rješenje u obliku

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{e_1}[(a+b)\cos(\lambda t) + \boldsymbol{i}(a-b)\sin(\lambda t)]\,. \tag{65}$$

Ovo nam pokazuje da velika os eliptične orbite mora biti usklađena s glavnom osi $\boldsymbol{e_1}$ sile $\boldsymbol{F'}$. Zatim (64) podrazumijeva da je koeficijent $(a-b)$ negativan, što nam govori da je orbita retrogradna. Za početni položaj $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ na glavnoj osi, konstanta $(a+b)$ određuje se s

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{e_1}(a+b) \tag{66.a}$$

Početna brzina je tada određena s

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \boldsymbol{e_1 i}(a-b)\lambda = \boldsymbol{\varepsilon_0 i}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\lambda \tag{66.b}$$

gdje je konstanta $(a-b)/(a+b)$ određena s (64). Općenito, jednadžba (65) određuje jedinstvenu orbitu preko bilo kojeg specificiranog početnog uvjeta.

Prema (62), dopuštene su dvije jedinstvene pozitivne vrijednosti za λ, recimo λ_1 i λ_2 s tim da je $\lambda_1 > \lambda_2$. Za svaki od njih postoji posebno rješenje oblika (65). Tako kroz bilo koju danu točku prolaze točno dvije retrogradne eliptične putanje; jedna putanja s velikom kutnom frekvencijom λ_1 i jedna s malom frekvencijom λ_2. Svako dopušteno gibanje je superpozicija ova dva, tj. opće rješenje varijacijske jednadžbe (56) ima oblik

$$\varepsilon = e_1\left(a_1 e^{i\lambda_1 t} + b_1 e^{-i\lambda_1 t} + a_2 e^{i\lambda_2 t} + b e^{-i\lambda_2 t}\right), \tag{67}$$

gdje je a_i izraženo preko b_i s (60), te se a_1, a_2 mogu smatrati dvjema nezavisnim kompleksnim koeficijentima koji su određeni početnim uvjetima.

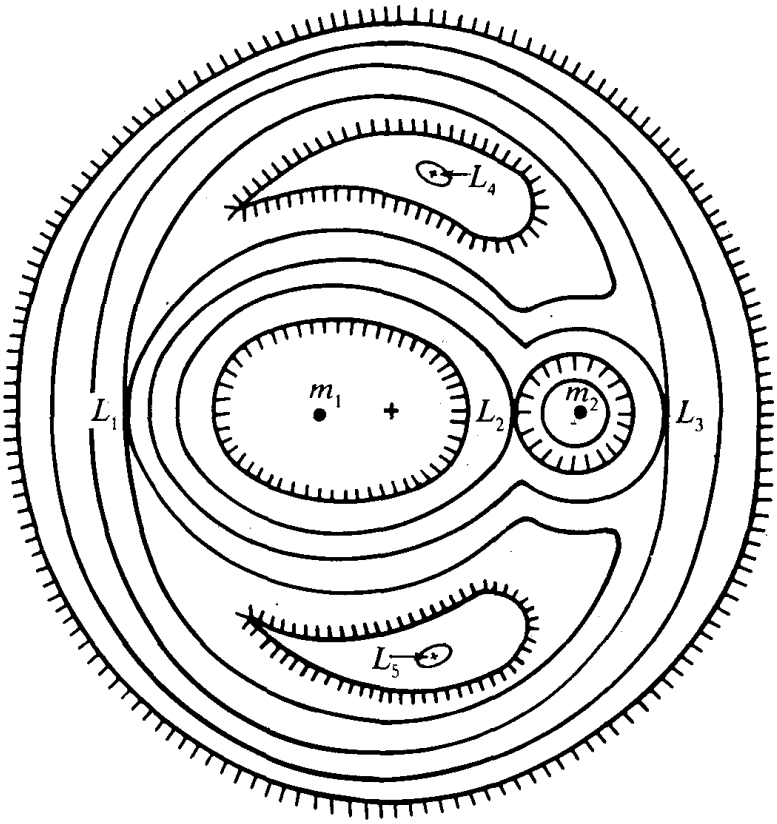
Stabilnost kolinearnih Lagrangeovih točaka L_1, L_2, L_3 može se istražiti na isti način kao i za L_4. Smatra se da linearna sila ima isti opći oblik (53) s $\boldsymbol{e_1} = \hat{\boldsymbol{r}}$, ali sa vrijednostima α i β koji se razlikuju od onih u (54). Oni daju korijene suprotnog predznaka od onog u (61). Pozitivan korijen karakterizira retrogradnu eliptičnu putanju kao u slučaju za L_4. Međutim, negativni korijen sugerira da je λ imaginaran, te to vodi na eksponencijalno divergentno rješenje koje je umetnuto

u (59). Tako specijalni početni uvjeti proizvode ograničeno eliptično gibanje u kolinearnim Lagrangeovim točkama, ali ove ravnotežne točke moraju se smatrati nestabilnima jer opće rješenje (oblika (59)) divergira. U stvarnoj fizikalnoj situaciji gdje je objekt zarobljen u eliptičnoj putanji jedne od kolinearnih točaka, vanjski poremećaji eventualno će ga skrenuti na „neograničenu putanju“ tako da on pobjegne.

Globalna perspektiva mogućih putanja s određenom energijom može se dobiti iz konturnih mapa efektivnog potencijala, koji ima oblik

$$U(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{x}^2 - \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} \tag{68}$$

u primarnoj ravnini.



Slika 5. Konturna karta potencijala sustava Zemlja - Mjesec u sinodičkom (rotirajućem) referentnom sustavu

Na velikim udaljenostima dominira prvi član, tako da se potencijal smanjuje s x^2 i ekvipotencijalne plohe su gotovo kružne. Svaka se masa koncentrira u potencijalni bunar tako da su obližnji ekvipotencijali krugovi oko njih. Lagrangeove točke L_4 i L_5 su maksimumi potencijala, kao što se pokazalo te su prikazane kao kritične značajke na konturnoj mapi. Mapa pokazuje i tri kolinearne Lagrangeove točke kao točke sedla. To se može analitički provjeriti ukoliko se pokaže da u kolinearnim točkama vrijedi

$$(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla})^2 U = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{\varepsilon}) < \mathbf{0} \tag{69.a}$$

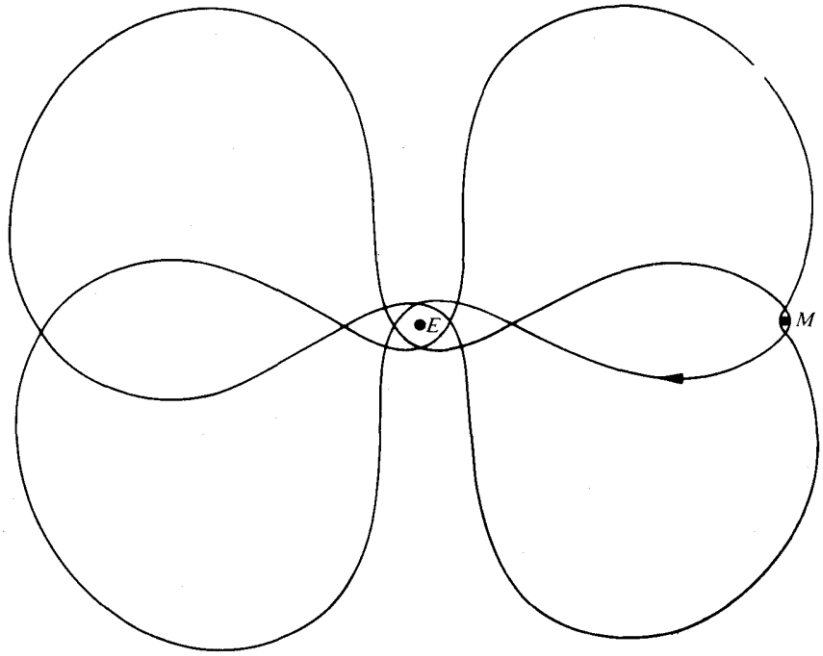
za $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}$, i

$$(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla})^2 U > 0 \tag{69.b}$$

za $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{ri}$.

Energijski integral (37) podrazumijeva da čestica s ukupnom energijom C ne može prijeći konturu određenu jednadžbom $U(x) = C$; njezino gibanje ograničeno je na područje gdje je $U < C$. Dakle, čestica zarobljena u točki L_4 će kružiti vrhom, ali nikad se neće popeti iznad $U = C$.

Važno je napomenuti da se kinetička energija čestice raspršuje u sudarima s plinom, prašinom ili malim tijelima, te će se tada spustiti povećavajući amplitudu oscilacija oko točke L_4. Upravo to je podrijetlo velikih oscilacija amplituda Trojanskih asteroida. Područja koja su isključena zbog očuvanja energije nazivaju se Hillova područja po astronomu G. W. Hillu koji je istaknuo da je stabilnost Mjesečeve putanje osigurala činjenica da se nalazi unutar granične konture koja okružuje Zemlju.



Slika 6. "Staza autobusa" sustava Zemlja - Mjesec u sinodičkom (rotirajućem) referentnom sustavu

ZAKLJUČAK

Ovim završnim radom obrađena je tema problema triju tijela s naglaskom na reducirani problem koji je analitički rješiv. Pokazano je kako upravo u tom problemu postoji pet ravnotežnih točaka koje nazivamo Lagrangeove točke. Potvrda toga je postojanje planetoida Trojanaca koji se nalaze na Jupiterovoj stazi, $60°$ ispred i iza Jupitera, a slično se ponašaju i neki sateliti.

U Zemljinoj točki L_1 nalazi se svemirska letjelica SOHO koja je zaslužna za promatranje Sunca. Upravo ona je od velike važnosti za Zemlju jer šalje informacije o većem zračenju koje može oštetiti elektroniku aviona.

Točke $L_1, L_2\ i\ L_3$ imaju važnu ulogu u razmjeni plinova bliskih dvojnih zvijezda. Tamo plinovi struje s jedne zvijezde na drugu, omotavaju ih ili zauvijek odlaze s dvojne zvijezde. L_4 i L_5 pokazuju se kao točke najveće stabilnosti.

LITERATURA

Goldstein H., Poole C., Safko J. Classical Mechanics. Third Edition. New York: Addison Wesley, 2000.

Hestenes, D. New Foundations for Classical Mechanics. Second Edition. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

Marchal, C. The three – body problem. Amsterdam – Oxford – New York – Tokyo: Elsevier, 1990.

http://eskola.hfd.hr/fizika_svemira/gravitacija/lagrange.html 15.07.2017.

https://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf 15.07.2017.

http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=43187 18.07.2017.

https://hr.wikipedia.org/wiki/Lagrangeove_to%C4%8Dke 09.09.2017.

ŽIVOTOPIS

Ovaj rad napisala je Mihaela Balić. Rođena je u Vinkovcima, 11. 12. 1995. godine. Osnovnu školu pohađala je u Vinkovcima. Po završetku osnovne škole upisala je Zdravstvenu i veterinarsku školu dr. Andrije Štampara, Vinkovci te je tamo nagrađena za najbolju učenicu škole. Trenutno studira na Odjelu za fiziku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.