SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

ROBERT NEDELJKOVIĆ

# MAXWELLOVE JEDNADŽBE I KOVARIJANTNA FORMULACIJA KLASIČNE ELEKTRODINAMIKE

Završni rad

Osijek, 2019.

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**

**ODJEL ZA FIZIKU**

**ROBERT NEDELJKOVIĆ**

# MAXWELLOVE JEDNADŽBE I KOVARIJANTNA FORMULACIJA KLASIČNE ELEKTRODINAMIKE

**Završni rad**

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

radi stjecanja zvanja prvostupnika fizike

**Osijek, 2019.**

**Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom doc. dr. sc. Darija Hrupeca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studije fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.**

# Sadržaj

1. Uvod ....................................................................................................5
1.1. James Clerk Maxwell ..............................................................................6
2. Teorijski dio ...........................................................................................7
2.1. Maxwellove jednadžbe ...........................................................................7
2.1.1. Prva Maxwellova jednadžba ...............................................................8
2.1.2. Druga Maxwellova jednadžba .............................................................9
2.1.3. Treća Maxwellova jednadžba .............................................................10
2.1.4. Četvrta Maxwellova jednadžba ..........................................................12
3. Maxwellove jednadžbe u materijalima ...................................................14
4. Kovarijantna formulacija klasične elektrodinamike .................................15
4.1. Lorentzove transforamcije ....................................................................16
4.2. Četverovektori .......................................................................................18
4.3. Lorentzova invarijantnost elektrodinamike ..............................................20
5. Zaključak ...............................................................................................24
6. Literatura ...............................................................................................25
Životopis

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Završni rad

Odjel za fiziku

# MAXWELLOVE JEDNADŽBE I KOVARIJANTNA FORMULACIJA KLASIČNE ELEKTRODINAMIKE

**ROBERT NEDELJKOVIĆ**

**Sažetak**

U prvom dijelu ovoga rada opisani su osnovni zakoni klasične elektrodinamike pomoću četiri jednadžbe koje je formulirao James Clerk Maxwell. U njima su sadržana osnovna električna i magnetska svojstva materijala. U drugom dijelu rada matematički je prikazana kovarijantna formulacija klasične elektrodinamike u kojoj, preko Lorentzovih transformacija i kratkog tenzorskog računa, potvrđujemo ispravnost Maxwellovih jednadžbi u bilo kojem inercijalnom referentnom sustavu.

University Josip Juraj Strossmayer Osijek
Bachelor of Physics Thesis

Department of Physics

# MAXWELL EQUATIONS AND COVARIANT FORMULATION OF CLASSICAL ELECTRODYNAMIC

**ROBERT NEDELJKOVIĆ**

## Abstract

The first part of this thesis describes the basic laws of classical electrodynamics using four equations formulated by James Clerk Maxwell. They contain basic electrical and magnetic properties of the material. The second part of this thesis mathematically presents a covariant formulation of classical electrodynamics in which, through Lorentz transformations and a short tensor calculus, we confirm the validity of Maxwell's equations in any inertial reference system.

# 1. Uvod

Svrha ovog završnog rada je prikaz Mawellovih jednadžbi te matematičkog modela kovarijantne formulacije klasične elektrodinamike.

Klasična elektrodinamika opisuje osnovne zakone gibanja i utjecaja nabijenih čestica na druge čestice i njezino poznavanje može se smatrati temeljnom disciplinom potrebnom za napredak u mnogim tehnološkim aspektima. Bez poznavanje električnih i magnetskih svojstava materije razvoj moderne znanosti i put prema modernom dobu ne bi bio moguć. Već su antički narodi otkrili kako neki materijali mogu utjecati na druga tijela bez da ih dodiruju, što je probudilo znatiželju i potrebu da se istražuju njihova svojstva, no tek je u 18. stoljeću ova važna grana fizike postigla svoje prve uspjehe, teorijskim istraživanjima francuskog fizičara Charlesa-Augustina de Coulomba, te neovisno, eksperimentalnim istraživanjima američkog državnika i fizičara Benjamina Franklina.

## 1.1. JAMES CLERK MAXWELL

Prije teorijskog dijela u kojemu će biti razrađena Maxwellova najveća dostignuća, posvetit ću nekoliko rečenica njemu samom. James Clerk Maxwell rođen je 13. lipnja 1831. godine u Edinburghu, Škotska. Formalno obrazovanje započeo je s 10 godina u uglednoj Edinburškoj akademiji, gdje je razvio strast za crtanjem. Također, od rane dobi bio je fasciniran geometrijom, a već u dobi od 14 godina napisao je prvi znanstveni rad u kojemu je opisao mehanički način crtanja matematičkih krivulja s komadom konopa, te opisao svojstva elipsi, Kartezijevih ovala i sličnih krivulja uz pomoć dva žarišta. Akademiju je napustio 1847. godine te počeo pohađati predavanja na Sveučilištu u Edinburghu gdje je imao brojne znamenite predavače, među kojima su bili William Hamilton, Philip Kelland i James Forbes. U listopadu 1850. godine, kao već dokazan matematičar, napustio je Škotsku te nastavio obrazovanje u Cambridgeu, a u studenom 1851. učio je od poznatog profesora Williama Hopkinsa. Značaj dio jednadžbi iz elektromagnetizma potječe iz toga vremena. Godine 1854. diplomirao je matematiku kao drugi u generaciji, a 1855. postao je suradnik na fakultetu Trinity gdje je držao predavanja i ispite iz hidrostatike i optike. Nakon Cambridgea, 1856. zaposlio se kao profesor na fakultetu Mariscalu u Aberdeenu. Godinu dana kasnije tamo se sprijateljio s velečasnim Danielom Dewarom, preko kojeg je upoznao njegovu kćerku Katherine Mary Dewar, s kojom se vjenčao u lipnju 1858. Posljednje godine proveo je kao Cavendish profesor fizike na Cambridgeu, gdje je bio zadužen za opremanje Cavendish labarotorija vrijednim uređajima koje je sponzorirao William Cavendish. Preminuo je 5. studenoga 1879. u dobi od 48 godina od posljedica tumora trbušne šupljine, kao i njegova majka. Iza sebe je ostavio mnoga znanstvena dostignuća među kojima su najpoznatije Maxwellove jednadžbe o kojima ću i govoriti u ovome radu. Osim u elektrodinamici doprinio je i u drugim dijelovima fizike, npr. u optici Maxwellovom relacijom za indeks loma, te u kinetičko-molekularnoj teoriji plinova Maxwellovom raspodjelom. Također je potvrdio da je svjetlost elektromagnetska pojava.

# 2. TEORIJSKI DIO

## 2.1. MAXWELLOVE JEDNADŽBE

Maxwellove jednadžbe osnovne su jednadžbe elektromagnetizma i pomoću njih se opisuje povezanost električnog i magnetskog polja. One nam govore kako promjene u električnom polju uzrokuju promjene u magnetskom polju i obrnuto, te kako je dovoljno u nekom trenutku poznavati električno polje kako bi se jednoznačno mogla odrediti vremenska promjena polja u budućnosti. Koristeći poznate zakone: Amperov zakon, Faradayev zakon indukcije i Gaussov zakon, Maxwell ih je uspio ujediniti u skladbu s jednadžbom kontinuiteta, te one danas čine temelj klasične elektrodinamike i teorijske elektrotehnike. Jednadžbe se mogu prikazati u diferencijalnom i integralnom obliku. U diferencijalnoj formi one imaju oblik:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Pri čemu su:

$\rho$ - gustoća električnog naboja ili količina električnog naboja po jedinici volumena

$\vec{j}$ - gustoća električne struje, tok električnog naboja po jedinici površine u jedinici vremena

$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \cdot 10^{-12}$ F/m - dielektrična konstanta (permitivnost vakuuma)

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \times 10^{-7} \approx 1{,}2566370614 \cdot 10^{-6}$ N/A$^2$ - magnetska konstanta.

U Maxwellovim jednadžbama implicitno se pretpostavlja da vrijedi jednadžba kontinuiteta koja u fizici izražava zakon o neuništivosti materije, tj, da je promjena gustoće u nekoj točki uvijek praćena strujanjem tvari iz te točke ili prema njoj, te je ukupna promjena količine tvari u nekom sustavu upravo jednaka količini tvari koja je u sustav ušla ili iz njega izašla. Konkretno u elektrodinamici ona izražava na analogan način zakon o neuništivosti električnog naboja. Njezin primarni matematički oblik je:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

## 2.1.1. PRVA MAXWELLOVA JEDNADŽBA

Prva Maxwellova jednadžba u integralnom obliku poznata je kao Gaussov zakon čiji je integralni oblik:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S)} \rho(\vec{r}) d^3 r \tag{2.1}$$

gdje je *V(S)* volumen definiran zatvorenom plohom *S*, a govori nam da je tok električnog polja kroz bilo koju zatvorenu plohu upravo proporcionalan količini naboja koji se nalazi u toj plohi. Gaussov zakon ne vrijedi samo za kulonsku silu, već i za svaku drugu silu čije polje opada s kvadratom udaljenosti i za koje vrijedi načelo pridodavanja, npr. za gravitacijsku silu pri čemu $\rho$ predstavlja masenu gustoću, a umjesto konstante $1/\varepsilon_0$ dolazi $4\pi G$ . Ako sada na Gaussov zakon primijenimo Gaussov teorem, odnosno fundamentalni teorem za divergenciju:

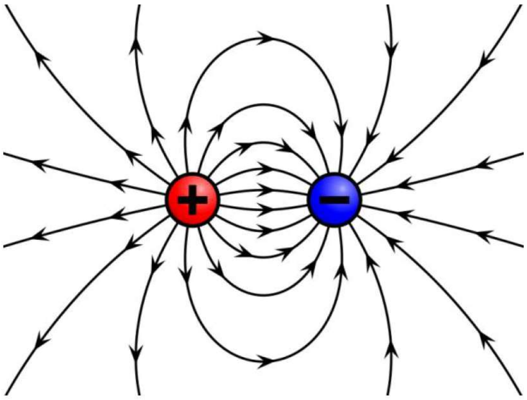
$$\oint_S \vec{f} d\vec{S} = \int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} d^3 V \tag{2.2}$$

koji nam govori o svojstvima polja u različitim točkama prostora, dobit ćemo upravo prvu Maxwellovu jednadžbu u diferencijalnom obliku:

$$\int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3 r = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S)} \rho(\vec{r}) d^3 r \tag{2.3}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \tag{2.4}$$

Dakle, koristeći se Gaussovim teoremom jednu integralnu jednadžbu (Gaussov zakon) koja opisuje svojstva električnog polja unutar jednog dijela prostora, preveli smo u diferencijalnu jednadžbu koja opisuje svojstva električnog polja u nekoj točki prostora. Ona nam omogućava računanje električnog polja ukoliko nam je poznata raspodjela naboja koja to polje stvara i obrnuto. Ukratko, prva Maxwellova jednadžba nam jednostavno govori da je električni naboj upravo taj koji stvara električno polje.



## 2.1.2. DRUGA MAXWELLOVA JEDNADŽBA

Druga Maxwellova jednadžba također proizlazi iz Gaussovog zakona, ali za magnetsko polje i ima osnovni matematički oblik:

$$\oint_V \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{2.5}$$

prema kojemu je magnetski tok kroz bilo koju zatvorenu plohu jednak nuli. Kako bismo dobili drugu Maxwellovu jednadžbu u diferencijalnom obliku potrebno je znati vezu između magnetskog polja $\vec{B}$ i struje $I$ koja prolazi nekim vodičem. Nju su eksperimentalnim putem otkrili Biot i Savart (1820. godine), te formulirali u matematičkom obliku koji danas nazivamo Biot-Savartovim zakonom :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{2.6}$$

gdje je $\vec{r}$ točka u kojoj se računa magnetsko polje. Ako gustoća struje nije konstantna duž cijelog presjeka vodiča, umjesto ukupne struje $I$ koristi se gustoća struje $\vec{j}$ i jednadžba poprima oblik:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \tag{2.7}$$

Također uvodimo još jedan oblik vektorskog polja koji se naziva vektorski potencijal $\vec{A}$, a pomoću čije se rotacije može dobiti magnetsko polje:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \tag{2.8}$$

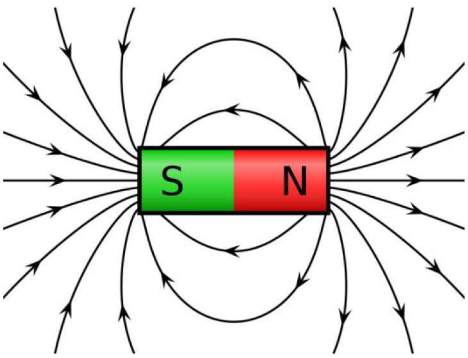
Magnetsko sada možemo pisati kao:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2.9}$$

Prema Helmholtzovu teoremu, svako je vektorsko polje u cijelosti određeno zadavanjem svoje divergencije i rotacije. Ako sada izračunamo divergenciju od magnetske indukcije $\vec{B}$, zapravo računamo divergenciju rotacije vektorskog potencijala, a divergencija rotacije uvijek je nula:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{2.10}$$

Time smo dobili drugu Maxwellovu jednadžbu u diferencijalnom obliku koja se može interpretirati tako da ne postoje magnetski monopoli, tj. ne postoji magnetski naboj iz kojeg bi proizlazio magnetski tok različit od nule. U svakoj točki prostora, broj silnica magnetskog polja koja ulazi u tu točku, jednaka je broju silnica koje iz te točke izlaze. Usporedbom s prvom Maxwellovom jednadžbom, nesimetrija divergencije električnog i magnetskog polja prikazuje temeljnu razliku u podrijetlu električnog (koje nastaje iz naboja) i magnetskog (koje nastaje iz struje) polja. Drugim riječima električne naboje može razdvojiti na pozitivne i negativne, ali je nemoguće razdvojiti sjeverni od južnog magnetskog pola.



## 2.1.3. TREĆA MAXWELLOVA JEDNADŽBA

Treća Maxwellova jednadžba naziva se još i Faradayev zakon elektromagnetske indukcije, a prema kojemu gibanje vodiča u promjenjivom magnetskom polju stvara struju u vodiču, odnosno brzina promjene magnetskog toka kroz petlju jednaka je induciranoj elektromotornoj sili u petlji:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{2.11}$$

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} = \int B \cos\varphi dS \tag{2.12}$$

gdje je $\varphi$ kut između smjera magnetskog polja $\vec{B}$ i okomice na element površine $d\vec{S}$ . Napon, odnosno induciranu elektromotornu silu možemo prikazati kao rad po jedinici naboja:

$$\varepsilon = \oint_K \vec{E} d\vec{s} \tag{2.13}$$

Što uvrštavanjem i usporedbom s jednadžbama (2.11) i (2.12) daje:

$$\oint_K \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S} \tag{2.14}$$

Time smo dobili direktnu vezu između električnog i magnetskog polja. To je ujedno i treća Maxwellova jednadžba u integralnom obliku. Prema njoj integral vektora električnog polja po zatvorenoj krivulji jednak je negativnoj vremenskoj promjeni magnetskog toka obuhvaćenog tom krivuljom. Primijenimo sada na desnu stranu gornjeg izraza Stokesov teorem koji povezuje linijski integral vektorskog polja po zatvorenoj krivulji i površinski integral rotacije tog istog polja po površini definiranoj tom krivuljom:

$$\oint_K \vec{E} d\vec{s} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S} \tag{2.15}$$

Izjednačavanjem podintegralnih funkcija dobivamo treću Maxwellovu jednadžbu u diferencijalnom obliku:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \tag{2.16}$$

Ona nam govori da vremenski promjenjivo magnetsko polje $\vec{B}$ stvara oko sebe kružno električno polje $\vec{E}$.

## 2.1.4. Četvrta Maxwellova jednadžba

Četvrta Maxwellova jednadžba poznata je i kao Amperov zakon. On je magnetski ekvivalent Gaussovog zakona i izražava činjenicu da magnetsko polje nastaje kao posljedica gibanja električnog naboja. U neproširenom obliku Amperov zakon ima oblik:

$$\oint_K \vec{B}d\vec{s} = \mu_0 I \tag{2.17}$$

koji nam govori da je linijski integral magnetskog polja po proizvoljnoj zatvorenoj krivulji razmjeran ukupnoj električnoj struji koju obuhvaća ta krivulja. Ponovnom primjenom Stokesovog teorema, ovoga puta na Amperov zakon (2.17), dobit ćemo četvrtu Maxwellovu jednadžbu u diferencijalnom obliku:

$$\oint_K \vec{B}d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S} \tag{2.18}$$

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B}d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S} \tag{2.19}$$

gdje je $\vec{j}$ gustoća struje. Usporedbom podintegralnih funkcija slijedi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{2.20}$$

Četvrta Maxwellova jednadžba u neproširenom diferencijalnom obliku govori da se oko vodiča kojim teče električna struja inducira magnetsko polje. Ako u sustavu postoji vremenska promjena gustoće naboja, onda gornju jednadžbu moramo proširiti jer prema jednadžbi kontinuiteta (zakona očuvanja količine naboja) vrijedi:

$$\vec{\nabla}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.21}$$

tj. količina naboja opisana gustoćom $\rho$ u nekom dijelu prostora može se smanjiti ili povećati tako što će struja tog naboja opisana gustoćom $\vec{j}$ ući ili izaći iz tog dijela prostora. Primijenimo li divergenciju na četvrtu Maxwellovu jednadžbu (2.20) slijedi:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_0\vec{\nabla}\vec{j} \tag{2.22}$$

a kako je divergencija rotacije uvijek jednaka nuli, imamo nesuglasnost u relacijama (2.21) i (2.22):

$$\vec{\nabla}\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0 \tag{2.23}$$

odnosno, za sustave u kojima je $\rho\neq 0$ Maxwellovu jednadžbu moramo proširiti dodatnim članom. Upotpunjenje jednadžbe opisat ćemo promatranjem strujnog kruga koji se sastoji od pločastog kondenzatora i sklopke. Površina ploča neka je $A$, a naboj na njima $\pm Q$. U početku je sklopka otvorena tako da između ploča postoji približno konstantno električno polje:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0 A}. \tag{2.24}$$

Kada se sklopka zatvori struja će poteći od pozitivne prema negativnoj ploči kondenzatora. Ako sada primjenjujući Stokesov teorem na Amperov zakon u integralnom obliku (2.19) izračunamo cirkulaciju magnetskog polja po nekoj krivulji C, a kako svaka krivulja obuhvaća beskonačno mnogo ploha čiji je ona rub, odabirom dvije plohe $S_1(C)$ i $S_2(C)$ takvim da kroz $S_1$ prolazi struja *I*, a kroz $S_2$ ne prolazi, slijedi:

$$\begin{aligned}\oint_C\vec{B}d\vec{r}&=\int_{S_1(C)}\vec{\nabla}\times\vec{B}d\vec{S}=\mu_0\int_{S_1(C)}\vec{j}d\vec{S}=\mu_0 I\\ \oint_C\vec{B}d\vec{r}&=\int_{S_2(C)}\vec{\nabla}\times\vec{B}d\vec{S}=\mu_0\int_{S_2(C)}\vec{j}d\vec{S}=0\end{aligned} \tag{2.25}$$

Plohom $S_2$ ne prolazi struja *I,* ali prolazi jedna druga struja koja potječe od vremenske promjene električnog polja u prostoru između ploča kondenzatora. Zatvaranjem sklopke, smanjuje se količina naboja na pločama, pa se smanjuje i električno polje u prostoru između ploča:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{\varepsilon_0 A}\frac{dQ}{dt}. \tag{2.26}$$

Iz gornje relacije vidimo da plohom ne prolazi struja *I,* ali prolazi struja pomaka:

$$I' = \frac{dQ}{dt} \tag{2.27}$$

Sada ćemo četvrtu Maxwellovu jednadžbu (2.20) nadopuniti tako što ćemo umjesto gustoće struje $\vec{j}$ pisati $\vec{j} + \vec{j}'$, gdje je:

$$\vec{j}' = \frac{I'}{A} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \tag{2.28}$$

Četvrta Maxwellova jednadžba u proširenom obliku sada ima oblik:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}'\right) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.29}$$

Proširena Maxwellova jednadžba u diferencijalnom obliku govori nam da se oko vodiča kojim teče električna struja inducira magnetsko polje, ali da i svako promijenivo električno polje također inducira magnetsko polje.

# 3. MAXWELLOVE JEDNADŽBE U MATERIJALIMA

Maxwellove jednadžbe opisuju ponašanje električnog i magnetskog polja u prostoru ako su poznati svi izvori, tj. naboji i struje. Prilikom opisivanja makroskopskih objekata takav pristup nije moguć jer je broj nabijenih čestica u atomima i nuklearnim jezgrama prevelik. Tada račun provodimo primjenom prosječnih vrijednosti polja i izvora u volumenu koji je velik u usporedbi s jednim atomom ili molekulom. Takve prosječne vrijednosti nazivaju se makroskopska polja i makroskopski izvori, a Maxwellove jednadžbe poprimaju oblik:

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\vec{D} = \rho_{slob.} \\
&\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \\
&\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\
&\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{slob.}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje su:

$\vec{D}$ - polje električnog pomaka

$\vec{H}$ - magnetizirajuće polje

$\rho_{slob.}$ - gustoća slobodnog električnog naboja (ukupna gustoća naboja minus gustoća vezanih naboja)

$\vec{j}_{slob.}$ - gustoća slobodne električne struje (ukupna gustoća struje minus gustoća vezanih električnih struja).

U najjednostavnijem slučaju kada su električna i magnetska svojstva sredstva homogena i izotropna, te se polja ne mijenjaju intenzivno u vremenu, vanjsko električno polje stvara polarizaciju $\vec{P}$ koja je linearno proporcionalna električnom polju, dok magnetsko polje stvara magnetizaciju $\vec{M}$ proporcionalnu magnetskom polju. Tada vrijedi:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \left( \vec{H} + \vec{M} \right) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

gdje su $\varepsilon_r$ i $\mu_r$ električna permitivnost, odnosno magnetska permeabilnost sredstva. Gornji slučaj vrijedi za dielektrične i paramagnetske materijale.

# 4. KOVARIJANTNA FORMULACIJA KLASIČNE ELEKTRODINAMIKE

Kovarijantna formulacija klasičnog elektromagnetizma odnosi se na načine pisanja zakona klasičnog elektromagnetizma u obliku koji je invarijantan na Lorentzove transformacije, u formalizmu posebne relativnosti koristeći pravocrtne inercijalne koordinatne sustave. Izrazi koje ćemo dobiti pokazuju da zakoni klasičnog elektromagnetizma poprimaju isti oblik u bilo kojem inercijalnom koordinatnom sustavu.

## 4.1. LORENTZOVE TRANSFORMACIJE

Einsteinova specijalna teorija relativnosti utemeljena je na dva jednostavna aksioma:

1) Zakoni fizike ne ovise o izboru inercijalnog referentnog sustava (*kasnije u tekstu IRS*)

2) U bilo kojem inercijalnom referentnom sustavu brzina svjetlosti u vakuumu je $c \approx 300000 \quad km/s$.

Einstein je izveo Lorentzove transformacije direktno iz postulata 1) i 2), te ih uzdigao na razinu temeljnih transformacija kojima se prelazi iz jednog u drugi IRS, odnosno postavio je zahtjev da svi fizički zakoni moraju biti invarijantni u odnosu na Lorentzove transformacije. Zamislimo dva IRS-a s paralelnim osima $S$ i $S'$ čija se ishodišta poklapaju za $t = t' = 0$. Pretpostavimo da se sustav $S'$ giba duž $x$-osi konstantnom brzinom $V$ u odnosu na $S$, te neka je u ishodištu sustava $S$ mirni izvor svjetlosti. Aksiomi 1) i 2) zahtijevaju da promatrači u oba sustava vide sferni val koji se iz ishodišta njihovih IRS-a širi brzinom $c$, tako da su jednadžbe valnih fronti:

$$c^2t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0 \quad \text{u} \quad S \tag{4.1.1}$$

$$c^2t'^2 - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) = 0 \quad \text{u} \quad S' \tag{4.1.2}$$

Ako su prostor i vrijeme homogeni i izotropni, veza koordinata $S$ i $S'$ mora biti linearna. Kako relacije (4.1.1) i (4.1.2) zahtijevaju da se sfera polumjera $ct$ sa središtem u $0$ iz $S$ uvijek preslikava u sferu polumjera $ct'$ sa središtem u $0'$ u $S'$ i obrnuto, kvadratne forme iz relacija (4.1.1) i (4.1.2) moraju uvijek biti proporcionalne, tj. vrijedi:

$$c^2t'^2 - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) = \lambda^2(V)\left[c^2t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right] \tag{4.2}$$

gdje $\lambda(V)$ označava moguću promjenu skale između dva sustava. Općenite linearne transformacije imaju oblik:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda\left(a_1 x + a_2 t\right) \\ y' &= \lambda y \\ z' &= \lambda z \\ t' &= \lambda\left(b_1 t + b_2 x\right) \end{aligned} \quad , \tag{4.3}$$

ako je brzina $V$ duž $x$ -osi. Želimo da se transformacije (4.3) svode na Galilejeve transformacije u limesu $c \to \infty$, tj. $V/c \to 0$, što znači da koeficijenti u jednadžbama (4.3) moraju zadovoljavati početne uvjete:

$$\lambda(V) \to 1 \ \text{ i } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kada } V \to 0 . \tag{4.4}$$

Kako se u $S$ ishodište $0'$ sustava $S'$ giba brzinom $V$ duž $x$ -osi vrijedi: $x = Vt$, pa slijedi: $0 = a_1 V t + a_2 t$, što daje: $a_2 = -a_1 V$, te: $x' = a_1(x - Vt)$. Uvrštavanjem u (4.2) slijedi:

$$c^2\left(b_1 t + b_2 x\right)^2 - \left[a_1^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2\right] = c^2 t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{4.5}$$

što mora vrijediti za svaki $x$ i $t$. Izjednačavanjem koeficijenata imamo:

$$\begin{aligned} a_1^2 - c^2 b_2^2 &= 1 \\ a_1^2 V + c^2 b_1 b_2 &= 0 \\ a_1^2 V^2 - c^2 b_1^2 &= -c^2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Izražavajući konstante $b_1$ i $b_2$ pomoću $a_1$ dobivamo: $a_1 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$ (4.7)

Zbog početnih uvjeta (4.4) onda je: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = b_1$ i

$$b_2 = -\frac{V}{c^2}a_1 = -\frac{V}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Tako konačno za Lorentzove transformacije iz $S$ u $S'$ dobivamo:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Gdje je: $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1$ i $\beta \equiv \frac{V}{c}$.

Za Lorentzove transformacije kojima se u specijalnoj teoriji relativnosti prelazi iz jednog IRS-a u drugi koji se giba brzinom $V$ duž $x$-osi vrijedi:

1) Ne mijenjaju se koordinate okomite na pravac brzine
2) Povezuju vrijeme i koordinate paralelne brzini
3) U limesu $c \to \infty$ prelaze u Galilejeve transformacije
4) Uvjet realnosti zahtjeva V<c.

Pri Lorentzovim transformacijama vrijeme ne ostaje invarijantno.

## 4.2. ČETVEROVEKTORI

Međudjelovanje čestica na razini elementarnih čestica opisuje se emisijom ili apsorpcijom drugih čestica. Najjednostavniji fizički proces je proces pri kojem jedna elementarna čestica emitira ili apsorbira drugu elementarnu česticu. Takav proces događa se u jednom trenutku u jednoj točki prostora, tj. u jednoj točki 4-dimenzijskog prostorvremena. Točka u prostorvremenu naziva se događaj. Koordinate događaja određene su kovarijantnim četverovektor $x_\alpha$ u prostorvremenu koji je po definiciji:

$$x_\alpha \equiv (ct, x, y, z) \equiv (ct, \vec{r}) \tag{4.9}$$

Za svaki kovarijantni 4-vektor postoji odgovarajući kontravarijantni tenzor prvog reda, odnosno kontravarijantni 4-vektor $x^\alpha$ koji je po definiciji

$$x^\alpha \equiv (ct, -\vec{r}) \tag{4.10}$$

Podizanje i spuštanje indeksa ostvaruje se množenjem s metričkim tenzorom $g_{\alpha\beta}$ prostora Minkowskog. To je simetrični tenzor drugog reda:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ čiji je inverzni tenzor: } g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tako da je: $g_{\alpha\rho} g^{\rho\beta} = g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta} = \delta_\alpha^\beta$ , gdje je Kroneckerov simbol $\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & za \quad \alpha = \beta \\ 0 & za \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$.

Opći kovarijantni 4-vektor definira se kao objekt koji se pri Lorentzovim transformacijama ponaša kao $x_\alpha$ . Za bilo koji kovarijantni 4-vektor $a_\alpha = (a_0, \vec{a})$ postoji odgovarajući kontravarijantni 4-vektor: $g^{\alpha\beta} a_\beta = a^\alpha = (a_0, -\vec{a})$ . Skalarni umnožak bilo koja dva 4-vektora $a_\alpha$ i $b_\alpha$ po definiciji je:

$$a \cdot b = a_\alpha b^\alpha = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = g^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta = b \cdot a \tag{4.11}$$

ili u matričnoj notaciji $a \cdot b = a^T g b$, gdje su 4-vektori $a_\alpha$ i $b_\alpha$ 4x1 matrice.

Neka su koordinate mirnog IRS-a $S$ označene sa $x_\alpha$ . Koordinate sustava $S'$ s usporednim osima koji se giba konstantno brzinom $V$ duž pozitivne $x$ -osi označimo sa $x'_\alpha$ . Ako napišemo kovarijantne 4-vektore $x'_\alpha$ i $x_\alpha$ kao vektore stupce za koje vrijedi:

$$x'_\alpha = a_\alpha^\beta x_\beta \equiv \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} x_\beta \tag{4.12}$$

ili u matričnoj notaciji: $x' = Ax$ , matrični oblik Lorentzove transformacije duž x-osi brzinom $V$ je:

$$A(\beta) = \left[a_\alpha^\beta\right] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

# 4.3. LORENTZOVA INVARIJANTNOST ELEKTRODINAMIKE

Elektromagnetska polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ mogu se izraziti preko elektromagnetskih potencijala koji tvore kovarijnantni 4-vektor $A_\alpha = \left(A_0, \vec{A}\right) \equiv \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right)$ , gdje je $\Phi$ skalarni potencijal, a $\vec{A}$ vektorski potencijal. Vezu potencijala i polja možemo iskoristiti da nađemo kovarijnantnu formulaciju za elektromagnetska polja. Za $x$ - komponente polja vrijedi:

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -c\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x\right) + c\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\Phi}{c}\right) = -c\left(\frac{\partial}{\partial x^0}A_1 - \frac{\partial}{\partial x^1}A_0\right) = -c\left(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0\right)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x^2}A_3 + \frac{\partial}{\partial x^3}A_2 = -\left(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2\right) \tag{4.14}$$

Analogni izrazi vrijede za $y$ i $z$ komponente polja:

$$E_y = -c\left(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0\right) \qquad B_y = -\left(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3\right)$$
$$E_z = -c\left(\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0\right) \qquad B_z = -\left(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1\right)$$

Šest komponenti elektromagnetskih polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ su elementi antisimetričnog tenzora drugog reda $F_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\beta}$ , koji se naziva tenzor elektromagnetskog polja:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial c^{\beta}} \tag{4.15}$$

Izražen pomoću komponenti tenzor elektromagnetskog polja u matričnom obliku je:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

U klasičnoj elektrodinamici, tj. u 3-dimenzijskoj formulaciji teorije, elektromagnetsko polje opisano je s dva vektorska polja, električnim i magnetskim. Međutim, ta dva polja nisu neovisna, jer su rotacije svakog od njih povezane s vremenskom derivacijom onog drugog polja. Inherentna veza električnih i magnetskih fenomena postaje jasna tek u 4-dimenzijskoj formulaciji. Komponente tenzora elektromagnetskog polja imaju određene transformacije pri prijelazu iz jednog u drugi IRS. Te transformacije uključuju miješanje komponenti električnog i magnetskog polja. Drugim riječima, u svakom IRS-u postoji električno polje $\vec{E}$ i magnetskog polje $\vec{B}$, ali u bilo kojem drugom IRS-u, $E'$ je linearna kombinacija $\vec{E}$ i $\vec{B}$, a $B'$ je također linearna kombinacija $\vec{E}$ i $\vec{B}$. Najjednostavniji primjer je naboj koji miruje. On stvara elektromagnetsko polje za koje je $\vec{E} \neq 0$, a $\vec{B} = 0$. U drugom IRS-u u kome se taj naboj giba, on predstavlja izvor polja za koje je i $\vec{E} \neq 0$ i $\vec{B} \neq 0$. U tenzorskoj analizi dokazuje se da se s antisimetričnim tenzorom drugog reda $F_{\alpha\beta}$ mogu konstruirati dvije Lorentzove invarijantne veličine:

1) $I_1 = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}$ (4.17)

2) $I_2 = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \widetilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{2}{c} \vec{E} \cdot \vec{B}$ (4.18)

Gdje je dualni tenzor elektromagnetskog polja $\widetilde{F}^{\alpha\beta}$ definiran kao:

$$\widetilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{4.19}$$

U relativističkoj elektrodinamici, elektromagnetska polja opisana su tenzorom elektromagnetskog polja $F_{\alpha\beta}$. Kovarijantni oblik Maxwellovih jednadžbi moraju biti tenzorske jednadžbe koje uključuju $F_{\alpha\beta}$. Dvije nehomogene Maxwellove jednadžbe, tj. one koje uključuju izvore:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \tag{4.20}$$

prema definicijama $F_{\alpha\beta}$ i $j_\alpha$ imaju kovarijantni oblik:

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \mu_0 j_\beta \tag{4.21}$$

prema kojemu je 4-divergencija tenzora elektromagnetskog polja proporcionalna 4-vektoru gustoće struje i naziva se Gauss-Amperov zakon. Kao i u 3 dimenzije, 4-divergencija nekog polja predstavlja lokalnu gustoću izvora tog polja, što u dobivenom izrazi znači da su naboji izvori elektromagnetskog polja.

Ekvivalentnost jednadžbi (4.20) i (4.21) možemo pokazati ako komponente tenzora $F_{\alpha\beta}$ izrazimo preko elektromagnetskog polja:

$$F_{i0} = -F_{0i} = \frac{E_i}{c}$$

$$F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$$

gdje je $\varepsilon_{ijk}$ trodimenzijski potpuno antisimetrični tenzor trećeg reda. Koristeći definicije 4-gradijenta i 4-vektora gustoće struje za nultu komponentu slijedi:

$$\mu_0 j_0 = \mu_0 c\rho = \partial^\alpha F_{\alpha 0} = \partial^0 F_{00} + \partial^i F_{io} = \partial^i F_{i0} = \frac{1}{c}\partial^i E_i = \frac{1}{c}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

a za i-tu komponentu slijedi:

$$\mu_0 j_i = \partial^\alpha F_{\alpha i} = \partial^0 F_{0i} + \partial^j F_{ji} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{E_i}{c}\right) + \partial^j\left(\varepsilon_{jik} B^k\right)$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_i}{\partial t} - \varepsilon_{ijk}\partial^j B^k = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} B_k = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_i}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_i$$

Dvije preostale homogene Maxwellove jednadžbe:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{4.23}$$

imaju kovarijantni oblik:

$$\partial^\alpha \widetilde{F}_{\alpha\beta} = 0 \tag{4.24.1}$$

odnosno:

$$\partial^\alpha\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} F^{\rho\sigma}\right) = 0 \tag{4.24.2}$$

prema kojemu je 4-divergencija dualnog tenzora elektromagnetskog polja nula i naziva se Gauss-Faradayev zakon. Dualni tenzor elektromagnetskog polja nema izvora. Fizički to znači da za razliku od električnog ne postoji magnetski naboj, što je glavni uzrok različitog karaktera električnog i magnetskog polja. Također možemo pokazati ekvivalentnost (4.23) i (4.24.1):

$\widetilde{F}_{i0} = -B_i$ , $\quad \widetilde{F}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\dfrac{E^k}{c}$, pa za nultu komponentu vrijedi:

$$0 = \partial^\alpha \widetilde{F}_{\alpha 0} = \partial^0 \widetilde{F}_{00} + \partial^i \widetilde{F}_{i0} = \partial^i \widetilde{F}_{i0} = \partial^i\left(-B_i\right) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{B},$$

a za i-tu komponentu:

$$0 = \partial^\alpha \widetilde{F}_{\alpha i} = \partial^0 \widetilde{F}_{0i} + \partial^j \widetilde{F}_{ji} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} B_i - \varepsilon_{jik}\partial^j \frac{E_k}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} B_i + \varepsilon_{ijk}\partial^j E_k\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_i .$$

# 5. Zaključak

Pojedinačnom analizom svake od četiri Maxwellove jednadžbe eksplicitno vidimo kako svaki segment elektromagnetskog polja, odnosno rotacija i divergencija njegove pripadne električne i magnetske komponente, postavlja temeljne zakone elektrodinamike. Usporedbom prve i druge jednadžbe možemo vidjeti kako postoji antisimetrija između električnog i magnetskog polja, tako smo zaključili da su izvori električnog polja električni naboji, dok ne postoje “magnetski” naboji koji bi bili izvor magnetskog polja, a usporedbom treće i četvrte jednadžbe vidimo da promjenjivo magnetsko polje stvara električno, dok gibanje naboja i promjenjivo električno polje stvara magnetsko polje. Također, u kovarijantnoj formulaciji klasične elektrodinamike, pomoću 4-vektora i tenzorskog računa vidjeli smo da su Maxwellove jednadžbe invarijante prema Lorentzovim transformacijama, odnosno da se u 4-dimenzionalnom prostorovremenu one mogu svesti na dvije jednostavne tenzorske jednadžbe koje su u skladu s osnovnim načelom relativnosti, prema kojemu zakoni fizike ne ovise o inercijalnom referentnom sustavu.

# 6. Literatura

[1] David J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics - fourth edition, Pearson Education, Inc., United States of America, 2013.

[2] Nikola Cindro, Fizika 2 - elektricitet i magnetizam, Školska knjiga, Zagreb, 1988.

[3] URL: http://mapmf.pmfst.unist.hr/~zeljko/STR.pdf

[4] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations

[5] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Covariant_formulation_of_classical_electromagnetism

[6] Zvonko Glumac, Klasična elektrodinamika - kratki uvod, Osijek, 2015.

[7] URL: https://www.researchgate.net/publication/23716858_The_covariant_formulation_of_Maxwell's_equations_expressed_in_a_form_independent_of_specific_units

# Životopis

Robert Nedeljković rođen je 3. 8. 1995. u Osijeku, u Republici Hrvatskoj. U Osijeku je završio osnovnu školu Dobriše Cesarića nakon koje upisuje, također u Osijeku, Srednju Trgovačku i komercijalnu školu "Davor Milas", smjer komercijalist. Po završetku srednje škole, godine 2014. upisao je preddiplomski studij fizike i informatike na Odjelu za fiziku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, na kojemu se trenutno školuje.