

# Stabilna i nestabilna vrtnja krutog tijela: Džanibekov učinak

---

**Kovač, Ivan**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Physics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:160:400597>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Department of Physics in Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**

**ODJEL ZA FIZIKU**



**IVAN KOVAČ**

**STABILNA I NESTABILNA VRTNJA KRUTOG TIJELA :  
DŽANIBEKOV UČINAK**

**Završni rad**

**Osijek, 2019.**

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**

**ODJEL ZA FIZIKU**



**IVAN KOVAČ**

**STABILNA I NESTABILNA VRTNJA KRUTOG TIJELA :  
DŽANIBEKOV UČINAK**

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
radi stjecanja naziva prvostupnika fizike

**Završni rad**

**Osijek, 2019.**

Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom doc.dr.sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

## Sadržaj

<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. OTKRIĆE FENOMENA .....</b>	<b>1</b>
<b>3. GIBANJE KRUTOG TIJELA.....</b>	<b>2</b>
3.1. TENZOR TROMOSTI.....	5
3.2. KINETIČKA ENERGIJA VRTNJE KRUTOG TIJELA .....	9
3.3. SUSTAV GLAVNIH OSI KRUTOG TIJELA.....	9
3.4. ELIPSOID TROMOSTI .....	10
3.5. EULEROVE JEDNADŽBE GIBANJA KRUTOG TIJELA.....	12
3.6. KONSTANTE GIBANJA .....	14
3.7. NEWTONOVA JEDNADŽBA GIBANJA SREDIŠTA MASE .....	15
<b>4. ANALITIČKO RJEŠENJE PROBLEMA .....</b>	<b>15</b>
4.1. STABILNE I NESTABILNE OSI KRUTOG TIJELA .....	16
<b>5. GEOMETRIJSKO RJEŠENJE - POINSOTOVA KONSTRUKCIJA.....</b>	<b>23</b>
<b>6 . DODATNA INTERPRETACIJA FENOMENA.....</b>	<b>24</b>
<b>7. ZAKLJUČAK .....</b>	<b>24</b>
<b>LITERATURA .....</b>	<b>25</b>
<b>ŽIVOTOPIS .....</b>	<b>26</b>

## **STABILNA I NESTABILNA VRTNJA KRUTOG TIJELA : DŽANIBEKOV UČINAK**

**Ivan Kovač**

### **Sažetak**

Gibanje krutog tijela u trodimenzijskom prostoru sastoji se od translacije određene točke (najčešće je to središte mase) i vrtnje oko osi koja prolazi tom točkom. Kako bi se pobliže moglo proučavati stabilne i nestabilne osi vrtnje, potrebno je generalno poznavati vrtnju tijela, moment tromosti krutog tijela, te se upoznati sa Eulerovim jednadžbama. Iako je teorijska podloga postavljena čak stoljeće prije toga, fizičku manifestaciju nestabilnosti osi vrtnje primijetio je Vladimir Aleksandrovič Džanibekov 1985. u svemirskoj postaji, te je taj učinak i dobio ime prema ruskom astronautu koji ga je prvi prepoznao. Pomoću Eulerovih jednadžba kao analitičko rješenje, te Poinsove konstrukcije koja predstavlja geometrijsko pojašnjenje, pokazat ćemo fiziku iza ovog fenomena.

(24 stranica, 5 slika)

**Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku**

**Ključne riječi:** Eulerove jednadžbe, Džanibekov učinak, stabilne i nestabilne osi

**Mentor:** doc.dr.sc. Zvonko Glumac

**Ocjenjivač:** doc.dr.sc. Zvonko Glumac

**Rad prihvaćen:**

## **STABLE AND UNSTABLE ROTATION OF THE RIGID BODY: DZHANIBEK EFFECT**

**Ivan Kovač**

### **Abstract**

Motion of a rigid body in a three-dimensional space consists of translation of a certain point of a body (in most cases center of mass), and rotation around an axis through that point. To closely observe stable and unstable rotation, one must first have general knowledge on rigid body rotation, moment of inertia, and Euler's equations. Even though Euler set the foundation for rigid body dynamics, physical manifestation of the unstable rotation axis hasn't been known until 1985, when Russian astronaut Vladimir Aleksandrovich Dzhanibekov noticed the effect, and so the effect was named after him. With the help of Euler's equations as analytic solution, and Poincaré's construction as geometrical solution, we will show the physics behind this phenomenon.

(24 pages, 5 figures)

**Thesis deposited in Department of Physics library**

**Keywords:** Euler equations, Dzhanibekov effect, stable and unstable axis

**Supervisor:** Zvonko Glumac, Ph.D., Assistant professor

**Reviewer:** Zvonko Glumac, Ph.D., Assistant professor

**Thesis accepted:**

## 1. Uvod

Dinamiku krutog tijela razvio je Leonhard Euler sredinom 18. stoljeća. Jednadžbe kružnog gibanja krutog tijela nazivamo Eulerovim jednadžbama. Također, iz osnovnih jednadžba izveo je i jednadžbe kružnog gibanja bez prisutnosti zakretnog momenta. Promatrat ćemo tijela sa tri različita momenta tromosti koja se vrte oko osi bez prisutnosti zakretnog momenta. Prilikom boravka u svemirskoj postaji, ruski astronaut Vladimir Aleksandrovič Džanibekov primijetio je nestabilnost u vrtnji leptir matice oko jedne od osi vrtnje u bestežinskom stanju. Kasnije je ovaj učinak uočen kod mnogih tijela koje imaju tri različita momenta tromosti, te je uz naziv koji mu je pridodan prema ruskom astronautu (Džanibekov teorem) dobio i naziv fenomen teniskog reketa, kako se pomoću teniskog reketa fenomen može jasno demonstrirati. Općenito, gibanje krutog tijela u trodimenzijskom prostoru sastoji se od translacije materijalne točke tijela, te njezine vrtnje oko zadane osi. Kako se u navedenom učinku ne pojavljuje translacija, teorijski ćemo potkrijepiti samo sa vrtnjom krutog tijela.

## 2. Otkriće fenomena

Vladimir Aleksandrovič Džanibekov poznati je ruski astronaut. Tijekom svojeg petog i posljednjeg putovanja u svemir, radio je na zaprimanju zaliha poslanih sa Zemlje. Sva poslana roba bila je učvršćena da bi se smanjila vjerojatnost oštećivanja robe. Posao oslobađanja učvršćene robe bio je prilično naporan, te je astronaut pokušao ubrzati i olakšati proces. Prilikom otpuštanja matice, prenio je dovoljan impuls sile kako bi se matica u potpunosti otpustila sa vijka. Nakon što se matica otpustila, nastavila je brzo vrtjeti u bestežinskom stanju, te je Džanibekov primijetio zanimljivu pojavu. Pri zadanoj vrtnji u bestežinskom stanju, leptir matica je neko vrijeme rotirala stabilno, no tada je sustav naglo promijenio orijentacijsku os za 180 stupnjeva. Ustanovio je kako se ova pojava periodički ponavlja, bez ikakve primjene vanjske sile. Ovaj fenomen privukao je pažnju brojnih znanstvenika, pa je tako proizašla i nova hipoteza. Zemlja, poput leptir matice kod koje je efekt prvi put primijećen, također izvodi sličan okret, no ima period od otprilike 12 000 godina. Sa teorijske strane, ova pojava nije bila ništa novo. Leonhard Euler postavio je jednadžbe koje opisuju ovakvo gibanje mnogo prije nego je primijećena sama fizička manifestacija.



### 3. Gibanje krutog tijela

Prema Chaslesovom teoremu, svako gibanje krutog tijela sastoji se od translacije materijalne točke, te vrtnje te točke oko zadane osi koja prolazi tom točkom. Prema teoremu problem je moguće odvojiti na dva dijela, te se posebno baviti proučavanjem translacijskog dijela gibanja i posebno vrtnjom. Potrebno je šest koordinata kako bi se opisalo gibanje krutog tijela: tri koordinate Kartezijevog koordinatnog sustava koje su vezane za tijelo i opisuju translacijski dio gibanja, te tri Eulerova kuta kako bi se opisalo gibanje oko nepomične točke. Ako za ishodište koordinatnog sustava vezanog za tijelo odaberemo središte mase, tada je ukupni moment sile  $\vec{M}$  podijeljen na doprinos translacije središta mase i vrtnje oko središta mase. Na sličan način ukupnu kinetičku energiju dobivamo kao zbroj doprinosa dan kao

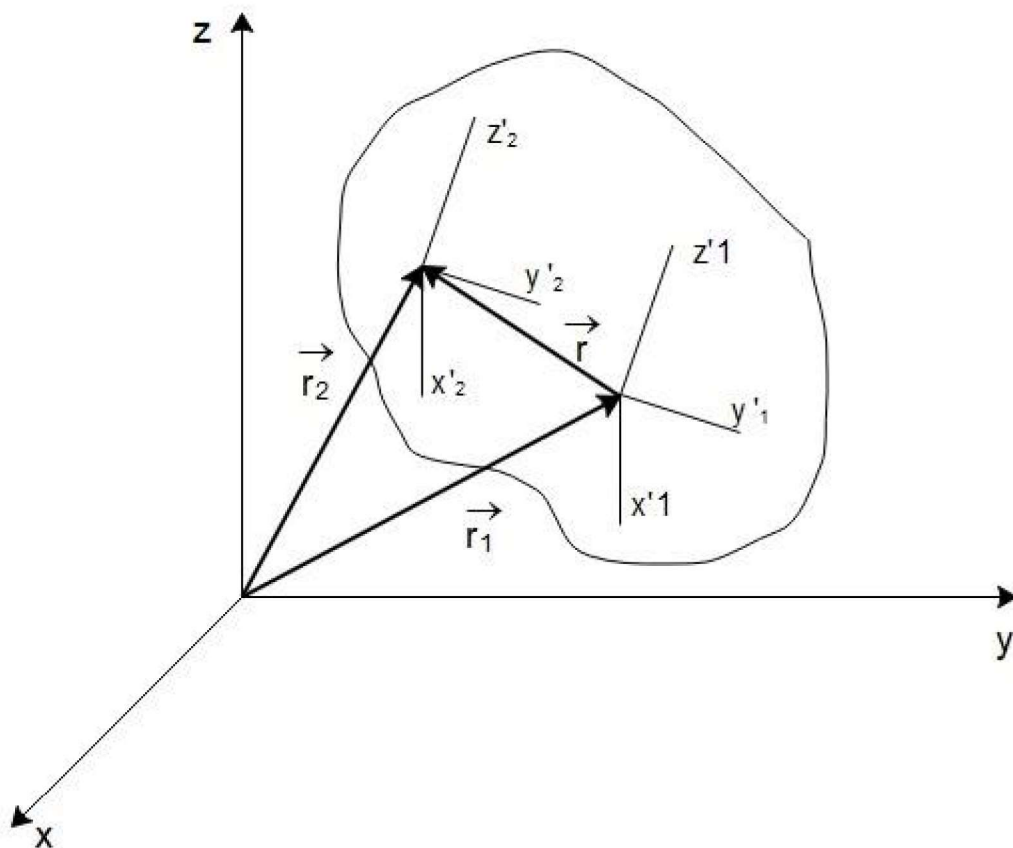
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + E'_k(\phi, \theta, \psi),$$

gdje je prvi član s desne strane kinetička energija tijela čija je masa sadržana u središtu mase, dok je drugi član kinetička energija gibanja oko središta mase. Važno je napomenuti kako je jedno od važnih ograničenja krutog tijela da se sve točke tijela gibaju i vrte zajedno, što vrlo lako dokazujemo na slijedeći način. Neka su  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$  vektori položaja za dva različita ishodišta koordinatnih sustava vezanih za tijelo. Vektor  $\vec{r}$  definiramo kao:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \rightarrow \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}$$

Ako uzmemo ishodište koordinatnog sustava  $(x'_2, y'_2, z'_2)$  kao točku koja je u ovisnosti o ishodištu prvog koordinatnog sustava  $(x'_1, y'_1, z'_1)$ , tada je vremenska derivacija vektora  $\vec{r}_2$  relativna u odnosu na prostorne koordinatne osi dana sa

$$\left(\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt}\right) + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \quad (1)$$



Slika 1. Odnos radij vektora za dva različita koordinatna sustava vezana za tijelo

gdje je  $\vec{\omega}_1$  kutna brzina pri vrtnji oko osi koja prolazi ishodištem koordinatnog sustava sa indeksima 1, dok član sa vektorskim umnoškom proizlazi iz odnosa brzina za dva različita koordinatna sustava, u ovom slučaju sustav vezan za tijelo i prostorni sustav

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\text{In}} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\text{Nein}} + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Na isti način dolazimo do vremenske derivacije vektora  $\vec{r}_1$

$$\left( \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right) = \left( \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right) - \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \left( \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right) - \vec{\omega}_2 \times \vec{r}. \quad (2)$$

Uvrštavanjem jedne jednadžbe u drugu slijedi

$$\left(\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt}\right) - \vec{\omega}_2 \times \vec{r} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r},$$

$$(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \vec{r} = \vec{0}.$$

Svaka promjena kutne brzine u dvije proizvoljne točke mora se odvijati u smjeru poveznice dvaju koordinatnih sustava. Ako pretpostavimo da je vektorsko polje  $\vec{\omega}$  konstantno, gornja jednakost bit će zadovoljena ako su vektori  $\vec{\omega}_1$  i  $\vec{\omega}_2$  jednaki

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2,$$

odnosno, kutna brzina je jednaka za sve koordinatne sustave vezane za tijelo.

Pri vrtnji krutog tijela oko jedne nepomične točke, za ukupni moment količine gibanja tijela vrijedi

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i),$$

gdje je  $\vec{r}_i$  vektor položaja, a  $\vec{v}_i$  brzina i-te točke tijela. Kako je vektor položaja vezan za sustav vezan za tijelo, brzina  $\vec{v}_i$  u odnosu na prostorni koordinatni sustav proizlazi isključivo iz vrtnje tijela oko nepomične točke

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i.$$

Sada ukupni moment količine gibanja možemo zapisati kao

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i))].$$

Nakon vektorsko-vektorskog umnoška uz primjenu identiteta

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C},$$

dolazimo do izraza

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{\omega} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \vec{\omega})].$$

Raspisivanjem momenta količine gibanja po x komponenti dobivamo

$$L_x = \omega_x \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i .$$

Dijelove jednadžba sa desne strane jednakosti koji se nalaze unutar zbroja prepoznajemo kao elemente matrice tenzora tromosti, te možemo pisati

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z .$$

Na sličan način dolazimo do preostale dvije dijagonalne komponente matrice tenzora tromosti

$$\begin{aligned} L_y &= \omega_x \sum_{i=1}^N m_i y_i x_i - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_z &= \omega_x \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i z_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - z_i^2) \\ &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z . \end{aligned}$$

Elemente  $I_{k,l}$  za koje je  $k = l$  prepoznajemo kao momente tromosti, dok elemente za koje je  $k \neq l$  prepoznajemo kao umnoške tromosti (devijacijski ili centrifugalni momenti).

### 3.1. Tenzor tromosti

U prethodnom odjeljku raspisom momenta količine gibanja po komponentama prepoznali smo momente tromosti koji su dani izrazima

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^N (r_i^2 - x_i^2) m_i ,$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^N (r_i^2 - y_i^2) m_i,$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^N (r_i^2 - z_i^2) m_i.$$

Gornji izrazi vrijede za diskretno raspoređenu masu tijela. Za tijela sa kontinuiranom raspodjelom mase, te ako znamo da vrijedi  $dm = \rho_m dV$ , zbroj prelazi u volumni integral sa volumnom masenom gustoćom  $\rho_m(\vec{r})$ <sup>1</sup>

$$I_{xx} = \int_V \rho_m(\vec{r})(r^2 - x^2) dV,$$

$$I_{yy} = \int_V \rho_m(\vec{r})(r^2 - y^2) dV,$$

$$I_{zz} = \int_V \rho_m(\vec{r})(r^2 - z^2) dV.$$

Elemente sa umnošcima prepoznali smo kao umnoške tromosti u obliku

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum_{i=1}^N x_i y_i m_i = - \int xy dm = - \int \rho_m(\vec{r}) xy dV,$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \sum_{i=1}^N y_i z_i m_i = - \int yz dm = - \int \rho_m(\vec{r}) yz dV,$$

$$I_{xz} = I_{zx} = - \sum_{i=1}^N x_i z_i m_i = - \int xz dm = - \int \rho_m(\vec{r}) xz dV.$$

Ako označimo koordinatne osi sa  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , momente i umnoške tromosti možemo općenito prikazati izrazom

$$I_{i,j} = \int_V \rho_m(\vec{r})(r^2 \delta_{i,j} - x_i x_j) dV$$

gdje je  $\delta_{i,j}$  Kronecker delta definirana kao

---

<sup>1</sup> Volumnu masenu gustoću  $\rho_m$  označavamo kao funkciju od  $\vec{r}$  jer gustoća tijela može biti različita u različitim točkama tijela.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j \\ 0, & \text{za } i \neq j \end{cases}$$

Momenti i umnošci tromosti zajedno čine tenzor drugog reda koji se naziva tenzor tromosti, te ga u matricnom obliku prikazujemo kao

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Fizikalno, momenti tromosti razmjerni su radu koji treba utrošiti da bi se tijelu zadala vrtnja oko neke osi. Da bi shvatili fizikalno značenje umnožaka tromosti moramo se prisjetiti da na svaku česticu mase  $m$  koja se vrti djeluje centrifugalna sila dana sa

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Ako su čestice tijela raspoređene simetrično u odnosu na os vrtnje, rezultantna sila biti će jednaka nuli, no ako su čestice nesimetrično raspoređene u odnosu na os vrtnje dobiva se rezultantna sila koja nije jednaka nuli, te ima smjer okomit na smjer vrtnje. U tom slučaju ova sila izaziva promjenu smjera osi vrtnje tijela. Provjerimo ovu tvrdnju slijedećim postupkom:

Neka se tijelo u početnom trenutku vrti oko osi  $\vec{\omega}$ , te neka je koordinatni sustav postavljen tako da kutna brzina ima smjer koordinatne osi  $z$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z.$$

Ukupan moment centrifugalnih sila svih čestica koje čine kruto tijelo računa se kao

$$\vec{M}_{cf} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,cf} = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)].$$

Ako primijenimo identitet vektorsko – vektorskog umnoška dan kao

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C},$$

za ukupan moment sila dobivamo

$$\vec{M}_{cf} = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times [(\vec{\omega} \vec{r}_i) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_i] = - \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{\omega} \vec{r}_i) (\vec{r}_i \times \vec{\omega}) - \omega^2 (\vec{r}_i \times \vec{r}_i)] .$$

Vektorski umnožak radij vektora  $\vec{r}_i$  sa samim sobom je nula, pa preostaje

$$\begin{aligned} \vec{M}_{cf} &= - \sum_{i=1}^N m_i (\omega z_i) (x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y + z_i \vec{e}_z) \times \omega \vec{e}_z \\ &= - \sum_{i=1}^N m_i (\omega z_i) (\vec{e}_x y_i \omega - \vec{e}_y x_i \omega) \\ &= - \vec{e}_x \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i + \vec{e}_y \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i = \omega^2 (\vec{e}_x I_{yz} - \vec{e}_y I_{xz}) \\ &= \vec{M}_{cf,x} \vec{e}_x - \vec{M}_{cf,y} \vec{e}_y . \end{aligned}$$

Iz rezultata možemo vidjeti da preostaju isključivo članovi u x i y smjeru, te smo time potvrdili da centrifugalni momenti zakreću tijelo u okomitom smjeru u odnosu na zadanu os vrtnje. Kako bi tijelo imalo stalni smjer vrtnje oko zadane osi, potrebno je vanjskim silama fiksirati os vrtnje. Ukoliko su centrifugalni momenti jednaki nuli, tada je dovoljno tijelo fiksirati u jednoj točki da bi se trajno vrtjelo oko zadane osi.

Nakon dobivenog oblika tenzora tromosti, moment količine gibanja po komponentama Kartezijevog koordinatnog sustava možemo zapisati u slijedećem obliku

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z , \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z , \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z . \end{aligned} \tag{5}$$

Gornji sustav može se zapisati kao matrična jednadžba sa tenzorom tromosti danim u obliku (4)

$$\vec{L} = I \vec{\omega} .$$

### 3.2. Kinetička energija vrtnje krutog tijela

Kinetičku energiju vrtnje možemo zapisati kao zbroj kinetičkih energija svih čestica tijela

$$E_{k,vrt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$E_{k,vrt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} = \frac{1}{2} (\omega_x L_x + \omega_y L_y + \omega_z L_z).$$

Ako u izraz za kinetičku energiju uvrstimo izraze za komponente momenta količine gibanja iz (5), slijedi

$$E_{k,vrt} = \frac{1}{2} [I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2 I_{xy} \omega_x \omega_y + 2 I_{xz} \omega_x \omega_z + 2 I_{yz} \omega_y \omega_z].$$

U gornjem izrazu umnošci tromosti pojavljuju se dvostruko zbog simetričnosti tenzora tromosti, odnosno umnožaka tromosti ( $I_{xy} = I_{yx}$ , itd.).

### 3.3. Sustav glavnih osi krutog tijela

U odjeljku 3.2. pokazali smo da postoji simetrija centrifugalnih komponenta tenzora tromosti ( $I_{xy} = I_{yx}, \dots$ ). Možemo zaključiti da od ukupno devet komponenta tenzora tromosti, šest je nezavisnih. Također je pokazano kako ovisno o tome kakav je položaj tijela u odnosu na os vrtnje, zbog simetrije može doći do iščezavanja centrifugalnih momenata tromosti. Zbog simetrije centrifugalnih momenata tromosti i tenzor tromosti mora biti simetričan. Osim što je matrica tenzora tromosti simetrična, također je realna i konačna. Svaku simetričnu, konačnu i realnu matricu možemo dijagonalizirati. Postupkom dijagonalizacije matrice tenzora dobivamo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore sustava. Svojstvene vrijednosti nazivamo glavnim momentima tromosti ( $I_1, I_2$  i  $I_3$ ). Svojstveni vektori pridruženi svojstvenim vrijednostima nazivamo glavnim osima krutog tijela. Postupak dijagonalizacije poznat je iz linearne algebre; tražimo svojstvene vrijednosti za koje vrijedi slijedeća jednakost

$$\mathbf{M} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}] \vec{v} = 0,$$



gdje je  $\mathbf{M}$  zadana matrica,  $\vec{v}$  svojstveni vektori,  $\mathbb{1}$  jedinična matrica<sup>2</sup>, a  $\lambda$  svojstvene vrijednosti. Svojstvene vrijednosti za koje vrijedi dana jednakost tražimo preko slijedeće determinante

$$\text{Det}[\mathbf{M} - \mathbb{1}\lambda] = 0 .$$

U našem slučaju, tražimo determinantu slijedećeg sustava

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I_j & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I_j & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I_j \end{vmatrix} = 0 .$$

Raspisivanjem determinante dobivamo sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice, te rješavanjem dolazimo do tri svojstvene vrijednosti, odnosno tri glavna momenta tromosti. Tada su svojstveni vektori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  i  $\vec{e}_3$  pridruženi svojstvenim vrijednostima glavne osi krutog tijela.

### 3.4. Elipsoid tromosti

Promatrajmo tijelo koje se giba u sustavu glavnih osi. Moment količine gibanja tijela i kinetička energija vrtnje u sustavu glavnih osi poprimaju jednostavan oblik

$$\vec{L} = I_1 \omega_1(t) \vec{e}_1 + I_2 \omega_2(t) \vec{e}_2 + I_3 \omega_3(t) \vec{e}_3 ,$$

$$E_{k,vrt.} = \frac{1}{2} (\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3) .$$

Moment količine gibanja raspisan po komponentama je

$$L_1 = I_1 \omega_1(t) ,$$

$$L_2 = I_2 \omega_2(t) ,$$

$$L_3 = I_3 \omega_3(t) .$$

Ako gornje komponente uvrstimo u izraz za kinetičku energiju vrtnje dobivamo slijedeći izraz

$$E_{k,vrt.} = \frac{1}{2} (\omega_1^2 I_1 + \omega_2^2 I_2 + \omega_3^2 I_3) .$$

Promatrajmo kutove koje vektor osi vrtnje zatvara sa svakom od glavnih osi. Skalarni umnožak pojedine glavne osi sa osi vrtnje daje nam kosinus kuta koji smjer glavne osi zatvara sa osi vrtnje

---

<sup>2</sup> Dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi jedinice.

$$\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_j = \omega \cos(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_j).$$

Pomoću ovakvog zapisa, kinetička energija vrtnje poprima novi oblik

$$E_{k,vrt.} = \frac{1}{2} [\omega^2 \cos^2(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_1) I_1 + \omega^2 \cos^2(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_2) I_2 + \omega^2 \cos^2(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_3) I_3] = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2,$$

gdje je  $I_\omega$  moment tromosti u odnosu na os vrtnje izražen preko glavnih momenata tromosti

$$I_\omega = \cos^2(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_1) I_1 + \cos^2(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_2) I_2 + \cos^2(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_3) I_3.$$

Istim postupkom možemo odrediti moment tromosti u odnosu na bilo koju proizvoljnu os vrtnje, a tako i u odnosu na inercijski sustav. Prvo moramo definirati kutove koje osi inercijskog sustava zatvaraju sa smjerom osi vrtnje.

$$\begin{aligned} \vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_x &= \omega \cos(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_x), & \vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_y &= \omega \cos(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_y), \\ \vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_z &= \omega \cos(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_z). \end{aligned}$$

Označimo s  $\alpha$  kut koji x koordinata inercijskog sustava zatvara sa smjerom osi vrtnje,  $\beta$  kut koji y koordinata zatvara sa smjerom osi vrtnje, te  $\gamma$  kut koji z koordinata zatvara sa smjerom osi vrtnje. Moment tromosti u odnosu na inercijski sustav je tada (prisjetimo se da za razliku od slučaja kada promatramo moment tromosti u odnosu na glavne osi, gdje su centrifugalni momenti jednaki nuli, u slučaju momenta tromosti u odnosu na inercijski sustav centrifugalni momenti ne moraju biti jednaki nuli)

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma + 2 I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2 I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2 I_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

$$\begin{aligned} E_{k,vrt} &= \frac{1}{2} [\omega_x^2 I_{xx} \cos^2 \alpha + \omega_y^2 I_{yy} \cos^2 \beta + \omega_z^2 I_{zz} \cos^2 \gamma + \omega_x \omega_y 2 I_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ &+ \omega_x \omega_z 2 I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + \omega_y \omega_z 2 I_{yz} \cos \beta \cos \gamma] = \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

Ako podijelimo izraz za moment tromosti sa I, te uvedemo novi vektor definiran kao

$$\vec{\zeta} = \frac{\vec{e}_\omega}{\sqrt{I}} = \vec{e}_x \frac{\cos \alpha}{\sqrt{I}} + \vec{e}_y \frac{\cos \beta}{\sqrt{I}} + \vec{e}_z \frac{\cos \gamma}{\sqrt{I}} = \zeta_x \vec{e}_x + \zeta_y \vec{e}_y + \zeta_z \vec{e}_z,$$

dolazimo do izraza koji prepoznajemo kao jednadžbu elipsoida

$$1 = \zeta_x^2 I_{xx} + \zeta_y^2 I_{yy} + \zeta_z^2 I_{zz} + 2\zeta_x \zeta_y I_{xy} + 2\zeta_x \zeta_z I_{xz} + 2\zeta_z \zeta_y I_{zy}.$$

Ako se pravokutni koordinatni sustav zakrene tako da se podudara sa sustavom glavnih osi, tada jednadžba elipsoida postaje

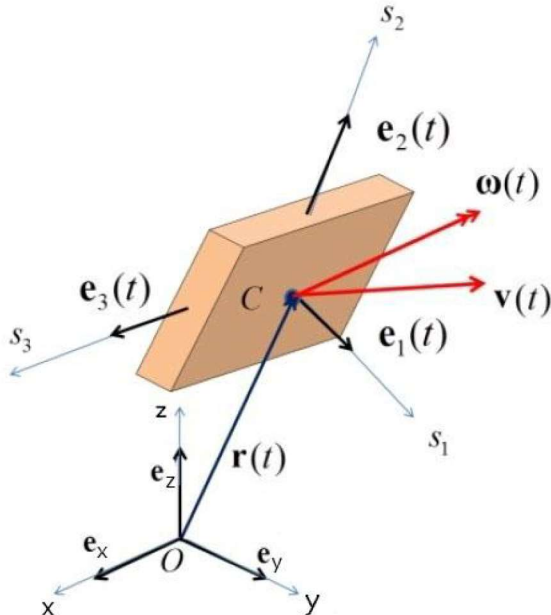
$$1 = \zeta_1^2 I_1 + \zeta_2^2 I_2 + \zeta_3^2 I_3.$$

### 3.5. Eulerove jednadžbe gibanja krutog tijela

Leonhard Euler (15. travnja 1707. – 18. rujna 1783.) bio je poznati švicarski fizičar i matematičar, koji je dao značajne doprinose brojnim područjima matematike i fizike, te je ostavio nasljedstvo od preko 500 knjiga i zapisa. Vrlo značajan doprinos znanosti dao je razvojem dinamike krutog tijela, gdje dolazimo i do jednog od važnijih doprinosa; jednadžbama gibanja krutog tijela.

U daljnjem računu koristimo koordinatni sustav glavnih osi. Neka se tijelo pod utjecajem momenta vanjskih sila  $\vec{M}$  vrti kutnom brzinom  $\vec{\omega}(t)$  oko osi  $\vec{e}_\omega$ . Ako su  $\vec{\omega}_i(t)$  kutne brzine u smjerovima glavnih osi tijela, tada je ukupni moment količine gibanja dan kao

$$\vec{L} = I_1 \omega_1(t) \vec{e}_1 + I_2 \omega_2(t) \vec{e}_2 + I_3 \omega_3(t) \vec{e}_3.$$



Slika 2. Koordinatne osi inercijskog i neinercijskog sustava [3]

Iz gornje jednadžbe vidimo da je u sustavu vezanom za tijelo samo kutna brzina promjenjiva u vremenu  $t$ . Brzinu promjene količine gibanja u inercijskom sustavu dobivamo pomoću brzine promjene količine gibanja u neinercijskom sustavu kao

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{nein} + \vec{\omega} \times \vec{L}.$$

Vremenskom derivacijom momenta količine gibanja u neinercijskom sustavu dobivamo

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{nein} &= I_1 \dot{\omega}_1 \vec{e}_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \vec{e}_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \vec{e}_3 \\ &+ (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3) \times (I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3). \end{aligned}$$

Konačno, nakon vektorskog množenja zadnje dvije zagrade u izrazu s desne strane, te grupiranjem članova prema glavnim osima, dolazimo do izraza

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{in} = \vec{e}_1 [I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3] + \vec{e}_2 [I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3] + \vec{e}_3 [I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2].$$

Također, vremenska promjena momenta količine gibanja jednaka je zbroju svih momenata vanjskih sila koje djeluju na tijelo, te one djeluju u vanjskom (inercijskom) sustavu koji nije vezan za tijelo

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{in} = \vec{M} = M_1 \vec{e}_1 + M_2 \vec{e}_2 + M_3 \vec{e}_3.$$

Izjednačavanjem gornja dva izraza dolazimo do sustava jednadžbi

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 = M_1,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = M_2,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = M_3,$$

koji predstavlja Eulerove jednadžbe gibanja krutog tijela. To je sustav tri nelinearne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Potpuna i jedinstvena rješenja dobivamo zadavanjem početnih uvjeta brzine vrtnje u trenutku  $t=0$

$$\omega_1(0), \omega_2(0), \omega_3(0) .$$

### 3.6. Konstante gibanja

Konstante gibanja Eulerovih jednadžbi dobivamo promatranjem gibanja tijela uz odsustvo vanjskih sila. Moment vanjskih sila će biti jednak nuli ukoliko nema učinka vanjskih sila, osim u točki oslonca. Poznato je da vremenskom derivacijom momenta količine gibanja dolazimo do momenta vanjskih sila

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{0} .$$

S obzirom da je moment vanjskih sila jednak nuli, moment količine gibanja je konstantan, odnosno ima konstantan smjer i konstantan iznos (kako je vektorska veličina)

$$\vec{L} = konst. = \vec{L}_0 , \quad \frac{\vec{L}_0}{|\vec{L}_0|} = konst., \quad L_0 = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} .$$

Pravac na kojem leži konstantan vektor momenta količine gibanja nazivamo invarijantna linija.

Promotrimo sada Eulerove jednadžbe uz isti uvjet

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 = 0 \quad / \cdot \omega_1 ,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad / \cdot \omega_2 ,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \quad / \cdot \omega_3 .$$

Ako dobivene jednadžbe međusobno zbrojimo dolazimo do slijedećeg izraza

$$I_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 \omega_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \omega_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 + (I_2 - I_1) \omega_3 \omega_2 \omega_1 = 0 .$$

Izlučimo  $\omega_1 \omega_3 \omega_2$  te dobivamo slijedeće

$$I_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 + (I_3 - I_2 + I_1 - I_3 + I_2 - I_1) \omega_3 \omega_2 \omega_1 = 0 .$$

Član u zagradi jednak je nuli te preostaje

$$I_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 = 0 .$$

Gornju jednadžbu možemo zapisati na slijedeći način

$$I_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 = \frac{1}{2} I_1 \frac{d\omega_1^2}{dt}, \quad I_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{d\omega_2^2}{dt}, \quad I_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 = \frac{1}{2} I_3 \frac{d\omega_3^2}{dt},$$

$$\frac{1}{2} I_1 \frac{d\omega_1^2}{dt} + \frac{1}{2} I_2 \frac{d\omega_2^2}{dt} + \frac{1}{2} I_3 \frac{d\omega_3^2}{dt} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \left[ I_1 \frac{d\omega_1^2}{dt} + I_2 \frac{d\omega_2^2}{dt} + I_3 \frac{d\omega_3^2}{dt} \right] = \frac{dE_{k,vrt.}}{dt} = 0 \rightarrow E_{k,vrt.} = konst.$$

Kako znamo da vrijedi  $E_{k,vrt.} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L}_0 = konst.$ , zaključujemo da i projekcija osi vrtnje na stalni vektor  $\vec{L}_0$  mora biti konstantna. Vrh vektora tijekom vremena opisuje krivulju na ravnini koja je okomita na konstantan vektor  $\vec{L}_0$ . O navedenoj krivulji (herpolhoda) nešto više u odjeljku 5. Ravninu po kojoj vrh vektora osi vrtnje opisuje krivulju nazivamo invarijantnom ravninom.

### 3.7. Newtonova jednadžba gibanja središta mase

Prema slici 2 radij vektor ima oblik

$$\vec{r}(t) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Kako bi dobili brzinu središta mase, deriviramo radij vektor po vremenu

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

Ako ukupnu masu tijela označimo s  $m$ , tada je utjecaj gravitacijske sile na tijelo

$$m \dot{\vec{v}}(t) = -m g \vec{e}_z.$$

U slučaju Džanibekovih pokusa u svemiru, gravitacijsko ubrzanje iznosi  $g = 0$ , dok je za pokuse na Zemlji  $g \simeq 9.81 \text{ m/s}^2$ .

## 4. Analitičko rješenje problema

U prethodnom odjeljku obrađena je teorijska podloga koja je potrebna za analitičko rješavanje problema Džanibekova učinka. Analitičko rješenje svodi se na rješavanje Eulerovih jednadžba krutog tijela uz odsustvo momenata vanjskih sila. Podrazumijeva se da je prethodno poznato

rješavanje problema jednodimenzijskog harmonijskog oscilatora, koji se kako ćemo vidjeti u nastavku primjenjuje i u ovom slučaju.

#### 4.1. Stabilne i nestabilne osi krutog tijela

Vrtnja tijela u Džanibekovim pokusima odvijala se u bestežinskom stanju, što znači da na tijelo nema učinka gravitacijske sile. Kod analitičkog rješenja zanemaren je i utjecaj trenja tijela sa medijem u kojem se giba. Ako se tijelu da kratki impuls sile, dalje se giba bez prisutnosti vanjskih sila. Središte mase je tada u mirovanju ili se jednoliko giba. U tom slučaju, moment količine gibanja se javlja isključivo kod vrtnje oko središta mase, te ćemo u ovom odjeljku pokazati koji oblik poprimaju Eulerove jednadžbe, a također dolazimo i do objašnjenja pojave Džanibekova učinka. Do rješenja je također moguće doći pomoću elegantnog geometrijskog opisa, poznatog kao Poinsova konstrukcija. Nešto više o Poinsovoj konstrukciji u odjeljku 5.

Neka tijelo čini vrtnju oko glavne osi  $\vec{e}_1$  kutnom brzinom  $\omega_1 > 0$ , te neka su  $\omega_2$  i  $\omega_3$  konstantni i jednaki nuli. Tada za glavne momente tromosti vrijedi

$$I_1 > I_2 > I_3.$$

Ako na tijelo kratko djeluje slaba vanjska sila, tada će komponente kutne brzine  $\omega_2$  i  $\omega_3$  biti veće od nule, no i dalje manje od komponente  $\omega_1$ . Ako uvrstimo ovako zadane brzine i momente tromosti u sustav Eulerovih jednadžba, imamo

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0.$$

Kako su komponente kutne brzine  $\omega_2$  i  $\omega_3$  znatno manje od  $\omega_1$ , njihov umnožak je zanemarivo malen, te ga u prvom od jednadžba možemo smatrati jednakim nuli. Tada prva jednadžba ima oblik

$$I_1 \dot{\omega}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\omega_1}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \text{konst. u } t = \omega_0.$$

Iz prve jednadžbe vidimo da je kutno ubrzanje jednako nuli, što znači da je komponenta kutne brzine  $\omega_1$  konstantna u vremenu. Kako bi našli preostale dvije komponente rješavamo sustav vezanih diferencijalnih jednadžba

$$\begin{aligned}
 I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_0 \omega_3 &= 0 & / \frac{1}{I_2} , \\
 I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_0 \omega_2 &= 0 & / \frac{1}{I_3} , \\
 \dot{\omega}_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_0 \omega_3 &= 0 , \\
 \dot{\omega}_3 - \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_0 \omega_2 &= 0 .
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Rješavamo tako da deriviramo jednu od jednadžba po vremenu, te ju potom uvrstimo u drugu jednadžbu.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\omega}_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_0 \dot{\omega}_3 &= 0 , & \ddot{\omega}_2 + \left( \frac{I_1 - I_2}{I_3} \cdot \frac{I_1 - I_3}{I_2} \cdot \omega_0^2 \right) \omega_2 &= 0 , \\
 \ddot{\omega}_3 - \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_0 \dot{\omega}_2 &= 0 , & \ddot{\omega}_3 + \left( \frac{I_1 - I_2}{I_3} \cdot \frac{I_1 - I_3}{I_2} \cdot \omega_0^2 \right) \omega_3 &= 0 .
 \end{aligned}$$

Ako sada uvedemo zamjenu

$$\Omega_1 \equiv \omega_0 \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{I_3} \cdot \frac{I_1 - I_3}{I_2}} , \quad \frac{I_1 - I_2}{I_3} \cdot \frac{I_1 - I_3}{I_2} > 0 ,$$

jednadžbe za  $\omega_2$  i  $\omega_3$  tada poprimaju oblik

$$\ddot{\omega}_2 + \Omega_1^2 \omega_2 = 0 , \quad \ddot{\omega}_3 + \Omega_1^2 \omega_3 = 0 ,$$



koje prepoznamo kao jednačbe slobodnih jednodimenzijskih harmonijskih oscilatora. Jednačbe rješavamo pretpostavljanjem rješenja koja zadovoljavaju gornje diferencijalne jednačbe; druga derivacija funkcije mora biti jednaka samoj funkciji sa negativnim predznakom, pomnoženom s konstantom. Funkcije koje zadovoljavaju zadane uvjete su kosinus, sinus, te eksponencijalna funkcija sa pozitivnim i negativnim eksponentom. U ovom slučaju, rješenja pretpostavljamo kao linearnu kombinaciju kosinusa i sinusa (zbog linearnosti i homogenosti jednačbe).

$$\omega_2 = C_2 \cos(B_2 t) + S_2 \sin(B_2 t), \quad \omega_3 = C_3 \cos(B_3 t) + S_3 \sin(B_3 t).$$

Do nepoznanica  $B_2$  i  $B_3$  dolazimo traženjem druge derivacije svake od jednačba

$$\dot{\omega}_2 = -B_2 C_2 \sin(B_2 t) + B_2 S_2 \cos(B_2 t),$$

$$\dot{\omega}_3 = -B_3 C_3 \sin(B_3 t) + B_3 S_3 \cos(B_3 t),$$

$$\ddot{\omega}_2 = -B_2^2 C_2 \cos(B_2 t) - B_2^2 S_2 \sin(B_2 t) = -B_2^2 \omega_2,$$

$$\ddot{\omega}_3 = -B_3^2 C_3 \cos(B_3 t) - B_3^2 S_3 \sin(B_3 t) = -B_3^2 \omega_3.$$

Sada gornje jednačbe uvrstimo u jednačbe harmonijskih oscilatora

$$-B_2^2 \omega_2 + \Omega_1^2 \omega_2 = 0 \rightarrow B_2^2 = \Omega_1^2 \rightarrow B_2 = \pm \Omega_1,$$

$$-B_3^2 \omega_3 + \Omega_1^2 \omega_3 = 0 \rightarrow B_3^2 = \Omega_1^2 \rightarrow B_3 = \pm \Omega_1,$$

$$\omega_2 = C_2 \cos(\Omega_1 t) - S_2 \sin(\Omega_1 t), \quad \omega_3 = C_3 \cos(\Omega_1 t) - S_3 \sin(\Omega_1 t).$$

Kako su  $C_2$  i  $S_2$ , te  $C_3$  i  $S_3$  i dalje nepoznanice, predznake možemo proizvoljno izabrati, te smo kako vidimo  $C_2$  i  $C_3$  izabrali sa pozitivnim predznacima, dok smo preostale dvije nepoznanice postavili kao negativne. Spomenute nepoznanice tražimo pomoću početnih uvjeta na položaj i brzinu u početnom trenutku

$$\omega_2(t = 0) = C_2 \cos(\Omega_1 0) - S_2 \sin(\Omega_1 0) = C_2 = \omega_{2,poč.},$$

$$\dot{\omega}_2(t = 0) = -\Omega_1 C_2 \sin(\Omega_1 0) - \Omega_1 S_2 \cos(\Omega_1 0) = -\Omega_1 S_2,$$

$$S_2 = -\frac{\dot{\omega}_{2,poč.}}{\Omega_1}.$$

Istim postupkom dolazimo do nepoznanica u drugoj jednadžbi. Uvedimo zamjene

$$\omega_{2,poč.} = A_2 \cos \delta_2, \quad -\frac{\dot{\omega}_{2,poč.}}{\Omega_1} = A_2 \sin \delta_2.$$

Konačan izraz prepoznajemo kao razliku kosinusa

$$\omega_2 = \cos(\Omega_1 t) A_2 \cos \delta_2 - \sin(\Omega_1 t) A_2 \sin \delta_2 = A_2 \cos(\Omega_1 t + \delta_2).$$

Iste zamjene uz odgovarajuće indekse uvedemo za drugu jednadžbu te dolazimo do konačnog izraza istog oblika

$$\omega_3 = \cos(\Omega_1 t) A_3 \cos \delta_3 - \sin(\Omega_1 t) A_3 \sin \delta_3 = A_3 \cos(\Omega_1 t + \delta_3).$$

Ako gornje jednadžbe uvrstimo u (6), slijedi

$$A_2 = A_3 \sqrt{\frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_2(I_1 - I_3)}} \cdot \frac{\cos(\Omega_1 t + \delta_3)}{\sin(\Omega_1 t + \delta_2)},$$

$$A_2 = -A_3 \sqrt{\frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_2(I_1 - I_3)}} \cdot \frac{\sin(\Omega_1 t + \delta_3)}{\cos(\Omega_1 t + \delta_2)}.$$

Gornji sustav je zadovoljen ako vrijedi

$$\frac{\cos(\Omega_1 t + \delta_3)}{\sin(\Omega_1 t + \delta_2)} = -\frac{\sin(\Omega_1 t + \delta_3)}{\cos(\Omega_1 t + \delta_2)} \quad / \sin(\Omega_1 t + \delta_2) \cos(\Omega_1 t + \delta_2),$$

$$\cos(\Omega_1 t + \delta_3) \cos(\Omega_1 t + \delta_2) = -\sin(\Omega_1 t + \delta_2) \sin(\Omega_1 t + \delta_3).$$

$$\cos(\Omega_1 t + \delta_3) \cos(\Omega_1 t + \delta_2) + \sin(\Omega_1 t + \delta_2) \sin(\Omega_1 t + \delta_3) = 0.$$

Dobiveni izraz prepoznajemo kao razliku kosinusa

$$\cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B) = \cos(A - B),$$

pa iz gornje jednakosti slijedi

$$\cos(\delta_3 - \delta_2) = 0 \quad ; \quad \delta_3 - \delta_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Tada za konstante  $A_2$  i  $A_3$  vrijedi

$$\frac{A_2}{A_3} = \sqrt{\frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_2(I_1 - I_3)'}}$$

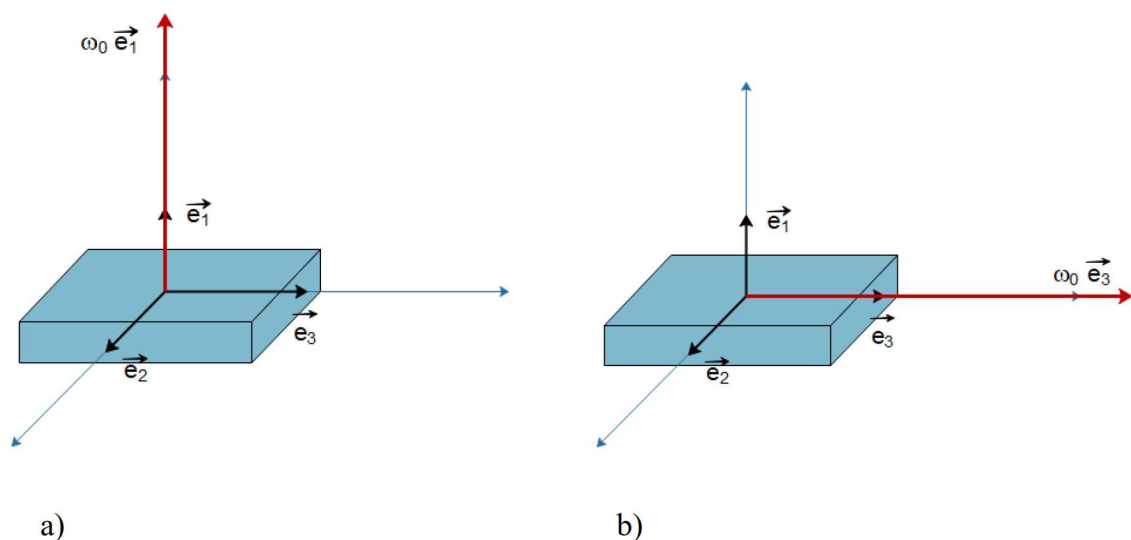
a konačni izrazi za kutne brzine glase

$$\omega_2 = A_2 \cos(\Omega_1 t + \delta_2), \quad \omega_3 = -A_3 \sin(\Omega_1 t + \delta_2) = A_2 \sqrt{\frac{I_2(I_1 - I_3)}{I_3(I_1 - I_2)}} \sin(\Omega_1 t + \delta_2).$$

Pomoću gornjih jednadžba, kvadriranjem te zbrajanjem, dolazimo do izraza

$$\left(\frac{\omega_2}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_3}{A_3}\right)^2 = 1.$$

Dobili smo jednadžbu elipse kojoj su poluosi konstante  $A_2$  i  $A_3$ . Tijelo se u ovom slučaju vrti oko osi koja ima najveći moment tromosti, te nakon što vanjska sila malo promjeni smjer vrtnje tijelo se i dalje vrti oko osi vrtnje koja je blizu zadane (početne) osi. Sličan se rezultat dobije i prvi vrtnji tijela oko osi sa najmanjim momentom tromosti. Za glavne osi  $\vec{e}_1$  i  $\vec{e}_3$  možemo reći da su stabilne osi vrtnje.



Slika 3. a) Tijelo sa zadanom početnom osi vrtnje u smjeru glavne osi  $\vec{e}_1$  ; b) sa zadanom početnom osi vrtnje oko glavne osi  $\vec{e}_3$

Sada promotrimo tijelo kada mu je zadana vrtnja oko glavne osi  $\vec{e}_2$ . Početna kutna brzina  $\omega_2$  je puno veća od preostale dvije komponente

$$\omega_2 \gg \omega_1, \omega_3.$$

Ako zanemarimo umnožak dvaju malih veličina  $\omega_1, \omega_3$ , Eulerove jednadžbe poprimaju oblik

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = 0, \quad \omega_1 \omega_3 = 0,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0.$$

Iz druge jednadžbe vidimo da je kutno ubrzanje u smjeru glavne osi  $\vec{e}_2$  jednako nuli, pa je kutna brzina  $\omega_2$  konstantna u vremenu i jednaka  $\omega_0$ . Preostale dvije jednadžbe daju

$$\dot{\omega}_1 - \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_0 \omega_3 = 0 \qquad \dot{\omega}_3 - \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_0 \omega_1 = 0$$

Postupak je isti kao za brzine za osi  $\vec{e}_1$  i  $\vec{e}_3$ ; deriviramo jednu od jednadžba, te ju uvrstimo u drugu. Navedeni postupak vodi do izraza

$$\ddot{\omega}_1 - \Omega_2^2 \omega_1 = 0 \qquad \ddot{\omega}_3 - \Omega_2^2 \omega_3 = 0; \quad \Omega_2 = \omega_0 \frac{\sqrt{(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}}{I_1 I_3}$$

Zbog različitih odnosa među momentima tromosti u odnosu na vrtnju oko glavnih osi  $\vec{e}_1$  i  $\vec{e}_3$ , rješenja gornjih diferencijalnih jednadžba nisu trigonometrijske, već eksponencijalne funkcije dane u obliku

$$\omega_1 = A_1 e^{-\Omega_2 t} + B_1 e^{+\Omega_2 t}, \qquad \omega_3 = A_3 e^{-\Omega_2 t} + B_3 e^{+\Omega_2 t}.$$

Uvrštavanje gornjih rješenja u jednadžbe daje

$$e^{-\Omega_2(t)} \left( -A_3 - A_1 \sqrt{\frac{I_1(I_1 - I_2)}{I_3(I_2 - I_3)}} \right) + e^{+\Omega_2(t)} \left( -B_3 - B_1 \sqrt{\frac{I_1(I_1 - I_2)}{I_3(I_2 - I_3)}} \right) = 0,$$

$$e^{-\Omega_2(t)} \left( A_1 \sqrt{\frac{I_1(I_1 - I_2)}{I_3(I_2 - I_3)}} + A_3 \right) + e^{+\Omega_2(t)} \left( -B_1 \sqrt{\frac{I_1(I_1 - I_2)}{I_3(I_2 - I_3)}} + B_3 \right) = 0.$$

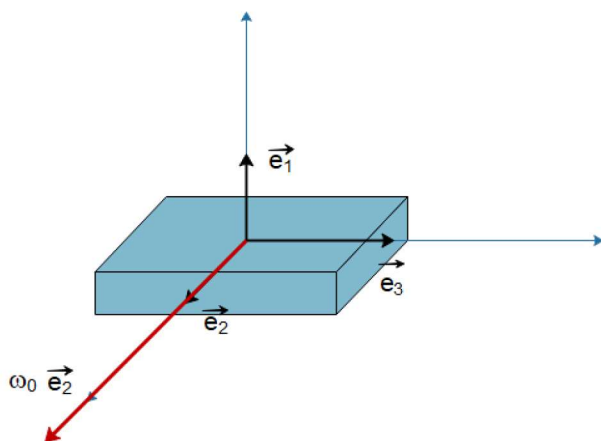
Ako izjednačimo gornje koeficijente uz iste eksponencijalne funkcije, dobivamo koeficijent  $A_3$  izražen preko  $A_1$

$$A_3 = -A_1 \sqrt{\frac{I_1(I_1 - I_2)}{I_3(I_2 - I_3)}}.$$

Iako na koeficijente  $B_1$  i  $B_2$  nema uvjeta, možemo vidjeti da će nakon dugog djelovanja vanjske sile eksponencijalni članovi pomnoženi sa koeficijentima  $A_1$  i  $A_3$  biti puno manjih od onih pomnoženih sa  $B_1$  i  $B_2$ , koji će zbog predznaka eksponenta eksponencijalne funkcije rasti. Rješenja su tada dana sa

$$\omega_1 \simeq B_1 e^{+\Omega_2 t}, \quad \omega_3 \simeq B_3 e^{+\Omega_2 t}.$$

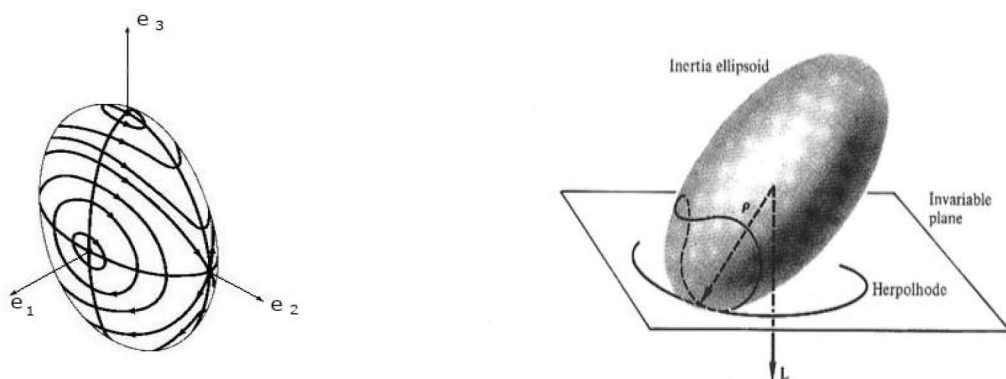
Dobiveni rezultati nam pokazuju da se tijekom gibanja smjer vektora vrtnje udaljava od zadanog smjera vrtnje oko osi  $\vec{e}_2$ . Glavnu os  $\vec{e}_2$  nazivamo nestabilnom osi. Dakle, pri vrtnji tijela oko nestabilne osi, tijelo neko vrijeme rotira stabilno oko te osi, te mu se nakon nekog vremena mijenja smjer osi vrtnje. Ovakvo gibanje periodički se ponavlja, što je mnogo jednostavnije vizualno prikazati u bestežinskom stanju. Ovime je objašnjen uzrok pojave Džanibekova učinka u svemirskoj stanici.



Slika 4. Tijelo pri vrtnji oko nestabilne osi  $\vec{e}_2$

## 5. Geometrijsko rješenje - Poinsova konstrukcija

Poinsova konstrukcija počiva na gibanju elipsoida tromosti koji smo ranije definirali. Pokazali smo da je pri vrtnji tijela bez prisutnosti vanjskih momenata kinetička energija vrtnje konstantna. Zbog konstantnosti kinetičke energije vrtnje, vektor osi vrtnje mora se nalaziti unutar elipsoida. Kako je elipsoid tromosti vezan za sustav glavnih osi, također i rotira zajedno sa sustavom. Kao posljedica jednadžba gibanja, kinetička energija vrtnje i moment količine gibanja su konstante gibanja, te je udaljenost središta mase elipsoida od tangencijalne ravnine, koju smo definirali kao invarijantnu ravninu, uvijek jednaka. Prema Poinsovu, vrtnju tijela bez prisutnosti vanjskih momenata možemo zamisliti kao kotrljanje elipsoida tromosti po invarijantnoj ravnini bez klizanja. Pri kotrljanju elipsoida dodirna točka elipsoida sa invarijantnom ravninom ocrta zatvorene krivulje. Zatvorene krivulje koje ocrta sjecište elipsoida, odnosno vrh vektora osi vrtnje sa invarijantnom ravninom na elipsoidu tromosti vizualiziraju ovakvo gibanje oko svake od glavnih osi, te se nazivaju polhode. Prema slici vidimo kako su zatvorene krivulje pravilne oko glavnih osi  $\vec{e}_1$  i  $\vec{e}_3$ , dok se krivulje postepeno udaljavaju od osi  $\vec{e}_2$  dok ne dođe do promjene smjera vrtnje za 180 stupnjeva. Sjecište također ocrta krivulje i na invarijantnoj ravnini. Te krivulje nazivaju se herpolhode. Iako su za određivanje smjera elipsoida tromosti, njegove vrtnje i dimenzija potrebni kinetička energija vrtnje, te moment količine gibanje, ocrtavanje zatvorenih putanja je stvar geometrije. Tako smo i geometrijskim putem pokazali što se krije iza ovog zanimljivog fenomena.



Slika 5. Zatvorene krivulje koje ocrta vektor osi vrtnje na konstantno rotirajućem energijskom elipsoidu (polhode) [9]; Nastajanje krivulja na elipsoidu tromosti i invarijantnoj ravnini [1]

## 6 . Dodatna interpretacija fenomena

Nakon što je prvi puta primijetio ovakvu vrstu vrtnje, Vladimir Aleksandrovič Džanibekov napravio je eksperimente sa drugim tijelima kako bi shvatio što uzrokuje ovakvo gibanje. Kod svakog tijela koje ima tri različite glavne osi vrtnje, primijećen je isti efekt. Pri vrtnji oko nestabilne osi tijelo bi nakon nekog vremena počelo periodično mijenjati smjer osi vrtnje. Ako uzmemo u obzir da pri zadavanju početne vrtnje postoje određene smetnje, ovaj fenomen može biti objašnjen pomoću hiperboličnih orbita u blizini sedlastih točaka na krajevima nestabilnih osi konstantne energijske elipsoide (slika 5.). Sa slike vidimo da se sve hiperbolične orbite zatvaraju oko osi  $\omega_1$  i  $\omega_3$ . Zatvorenost hiperboličnih orbita oko navedenih osi nam ukazuje da ako zadamo početnu vrtnju oko osi  $\omega_2$ , uz vrtnju oko osi  $\omega_2$ , tijelo radi i periodičnu vrtnju oko jedne od osi  $\omega_1$  ili  $\omega_3$ .

## 7. Zaključak

Iako Džanibekov učinak teorijski nije nova pojava, vizualni efekt, ili točnije njegova fizička manifestacija izgleda vrlo zanimljivo i atraktivno. Posebno je atraktivno eksperimente izvoditi u bestežinskom stanju, gdje se vrlo jasno može vidjeti periodičnost promjene smjera osi vrtnje. Pokazali smo da svako tijelo koje ima tri različita momenta tromosti, ima jednu os koja je nestabilna. Zadavanjem vrtnje oko nestabilne osi, tijelo će periodički mijenjati smjer vrtnje, odnosno dodatno će se zakrenuti oko druge osi.

## Literatura

1. Goldstein H., Poole C., Safko J. Classical Mechanics. Third Edition. New York: Addison Wesley, 2000.
2. Glumac, Z., *Klasična mehanika: kratak uvod*, book-website.com, 2015.
3. Murakami H., Rios O., Impelluso T.J. A theoretical and numerical study of the Dzhanibekov and tennis racket phenomena. Houston, Texas, 2015.
4. Trivailo P.M., Kojima H. Utilisation of the Dzhanibekov's Effect for the Possible Future Space Missions. 2017.
5. Ellis J. Classical Dynamics: Lecture Handout: 4. University of Cambridge, Department of Physics, 2005.
6. <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newtonhtml/node64.html#e9.4> 21.08.2018.
7. Marsden J., Ratiu T., Introduction to Mechanics and Symmetry. A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems. Second Edition, 1998.
8. Bronštejn I.N., Semendjajev K.A., Matematički priručnik za inženjere i studente. Zagreb: Tehnička knjiga, 1975.
9. <http://elektroarsenal.net/img/1008/image043.jpg>



## **Životopis**

Ivan Kovač rođen je 28. svibnja. 1993. godine u Bjelovaru. Upisuje 1. Osnovnu školu u Bjelovaru 2000. godine, no od 2002. godine osnovnoškolsko obrazovanje nastavlja u Ladimirevcima, gdje ju uspješno završava 2008. godine. Iste godine upisuje se u prvi razred u Elektrotehničkoj i prometnoj školi, Osijek, smjer elektrotehničar. Nakon završetka srednje škole 2012. godine upisuje se na Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, gdje provodi dvije godine studirajući elektrotehniku, te se 2014. godine vraća u Osijek i upisuje preddiplomski studij fizike, koji uspješno završava 2019. godine. Nakon završenog preddiplomskog studija i stjecanja zvanja sveučilišnog prvostupnika fizike, iste godine upisuje i diplomski nastavnički studij fizike i informatike na Odjelu za fiziku u Osijeku.