Moment tromosti pravilnih geometrijskih tijela

Pejaković, Anja

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU ODJEL ZA FIZIKU

ANJA PEJAKOVIĆ

MOMENT TROMOSTI PRAVILNIH GEOMETRIJSKIH TIJELA

Završni rad

Osijek, 2020.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU ODJEL ZA FIZIKU

ANJA PEJAKOVIĆ

MOMENT TROMOSTI PRAVILNIH GEOMETRIJSKIH TIJELA

Završni rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku radi stjecanja zvanja prvostupnice fizike

Osijek, 2020.

Ovaj završni rad izrađen je u Osijeku pod vodstvom doc.dr.sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

Sadržaj

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku Završni rad

Odjel za fiziku

MOMENT TROMOSTI PRAVILNIH GEOMETRIJSKIH TIJELA

ANJA PEJAKOVIĆ

Sažetak

Uvod u moment tromosti pravilnih geometrijskih tijela započinjemo osnovnim definicijama potrebnih za bolje razumijevanje gradiva. Nakon upoznavanja s općenitim teorijskim dijelom ulazimo u matematičke definicije i objašnjenja koja su potrebna za izračun momenta tromosti. U daljnjem izlaganju slijedi rješavanje primjera. Na kraju rada nalaze se ukratko sažeti izrazi za momente tromosti standardnih geometrijskih tijela oko glavnih osi.

Rad je pohranjen u knjižnici odjela za fiziku

Ključne riječi: aksijalni moment tromosti/ homogena kugla/ homogeni kvadar/ homogeni valjak/ homogeni stožac/ homogeni štap/ Steinerov teorem

Mentor: doc.dr.sc. Zvonko Glumac

Ocjenjivači:

Rad prihvaćen:

University Josip Juraj Strossmayer Osijek
Department of Physics

Bachelor of Physic Thesis

MOMENT OF INERTIA OF A REGULARLY GEOMETRIC BODIES

ANJA PEJAKOVIĆ

Abstract

We begin our thesis about moment of inertia of a regularly geometric bodies with basic definitions needed for better understanding of the material. After familiarising ourselves with the general theoretical part, we enter into mathematical definitions and explanations which are required for the moment of inertia. In addition, we move on to solving examples. At the end, there are briefly summarized expressions of moment of inertia of standard geometric bodies around the main axis.

Thesis deposited in Department of Physics library

Keywords: axial moment of inertia/ homogeneous sphere/ homogeneous cuboid/ homogeneous cylinder/ homogeneous cone/ homogeneous rod/ Steiner's theorem

Supervisor: doc.dr.sc. Zvonko Glumac

Reviewers:

Thesis accepted:

1 Uvod

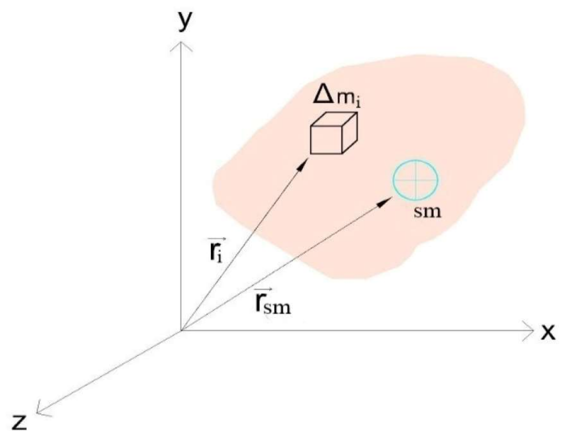
Moment tromosti fizikalna je veličina koja opisuje tromost čestice ili krutoga tijela pri promjeni brzine ili smjera vrtnje. Oznaka za moment tromosti je I. U nekim literaturama također se navodi i oznaka J. Moment tromosti jednak je zbroju umnožaka mase m i kvadrata okomite udaljenosti r od osi vrtnje svake čestice koja čini tijelo:

$$I=\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2. \tag{1}$$

Za sve čestice u svemiru koje imaju masu, tromost je jedno od osnovnih svojstava, a masa je mjera tromosti tijela. To se svojstvo opisuje kao opiranje tijela promjeni stanja gibanja, što je izrečeno prvim Newtonovim postulatom koji glasi: svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravocrtnog gibanja sve dok na njega ne djeluje nikakva sila. Taj zakon zove se još i zakon tromosti. U dinamici se pojavljuju momenti tromosti krutog tijela koji ovise o masi i njezinoj raspodjeli po volumenu tijela. Moment tromosti ovisi o osi oko koje se tijelo vrti. Ono što masa predstavlja pri translacijskom gibanju, to moment tromosti predstavlja pri vrtnji krutog tijela. Kruto tijelo naziv je za tijelo nepromjenjivog oblika i volumena. Kružno gibanje vrtnja je krutog tijela oko osi. Translacija se opisuje kao gibanje krutoga tijela bez vrtnje pri kojemu se sve točke tijela gibaju po jednakim putanjama.

2 Teorijski dio

Kako bismo izračunali moment tromosti standardnih geometrijskih tijela: homogenog štapa, kugle, valjka, kvadra te stošca, najprije ćemo proanalizirati pojmove potrebne za razumijevanje gradiva. Razmatrat ćemo moment tromosti oko glavnih osi kroz središte mase pravilnih geometrijskih tijela. Geometrijsko tijelo omeđeni je dio prostora. Pravilno geometrijsko tijelo ima jednake strane i jednake unutarnje kutove. Za sva tijela pretpostavljamo da su homogena. Homogeno tijelo je tijelo kojemu je gustoća jednaka u svakoj točki odnosno ono ima ujednačeni raspored mase u tijelu. Središte mase točka je koja se nalazi na prosječnoj udaljenosti od svih čestica nekog sustava ili pojedinih čestica tijela tj. hvatište ukupne vanjske sile koja djeluje na tijelo ili na sustav čestica.



Slika 1: Prikaz središta mase krutog tijela (sm) udaljenog za $\vec{r}_{sm}$ od nepomične točke odnosno središta koordinatnog sustava.

Središte mase sustava od N čestica određeno je vektorom položaja $\vec{r}_{sm}$ prema formuli:

$$\vec{r}_{sm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \tag{2}$$

gdje je m ukupna masa sustava, a $\vec{r}_i$ položaj $i-$ te čestice definiran kao:

$$\vec{r}_i = x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z. \tag{3}$$

S obzirom na pojedinu os 3D sustava središte mase glasi:

$$x_{sm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\ , \tag{4.1}$$

$$y_{sm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \tag{4.2}$$

$$z_{sm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i. \tag{4.3}$$

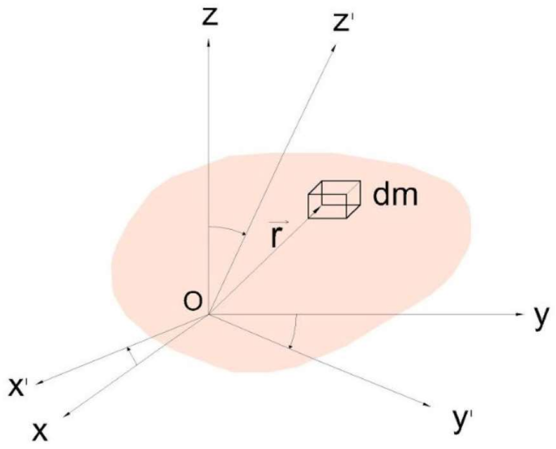
Za kontinuiranu raspodjelu mase izraz sa središte mase sustava od N čestica postaje beskonačan zbroj te se sume prevode u integrale:

$$\vec{r}_{sm} = \frac{1}{m}\int \vec{r}dm \ \text{ gdje je } dm=\rho dV. \tag{5}$$

Središte mase homogenog tijela računa se pomoću volumena tijela čije središte mase tražimo. S obzirom da homogeno tijelo ima u svim dijelovima jednaku gustoću te se masa može izraziti kao: $m=\rho V$ ona se u izrazu (5) pokrati te skraćivanjem izraza slijedi:

$$\vec{r}_{sm} = \frac{1}{V}\int \vec{r}dV. \tag{6}$$

Za moment tromosti oko glavnih osi promatra se promjena momenata tromosti krutog tijela uslijed vrtnje koordinatnih osi. Ishodište koordinatnog sustava O (xyz) nalazi se u nepomičnoj točki O (Slika 2). Ishodište nije u središtu mase krutog tijela. Udaljenost $\vec{r}$ bilo kojeg elementa mase djelića dm krutog tijela od ishodišta O ne mijenja se s vrtnjom koordinatnog sustava O (xyz) u koordinatnom sutavu O' (x'y'z') stoga je suma aksijalnih momenata tromosti invarijantna u odnosu na vrtnju koordinatnog sustava.

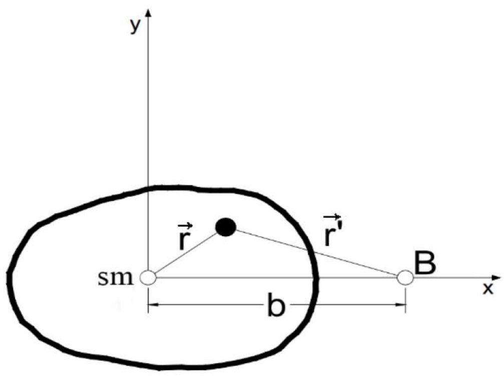


Slika 2: Udaljenost $\vec{r}$ djelića mase dm krutog tijela od ishodišta O.

Momenti tromosti s obzirom na osi nazivaju se aksijalni momenti tromosti. Ako osi prolaze kroz težišta tijela, nazivaju se glavni ili vlastiti momenti tromosti. Kod vrtnje koordinatnoga sustava postoji takav kut pri kojemu jedan od aksijalnih momenata tromosti ima maksimum, a drugi minimum. Ekstremne vrijednosti aksijalnih momenata tromosti zovu se glavni momenti tromosti presjeka, a pripadne osi glavne osi tromosti presjeka. Aksijalni moment tromosti integral je umnoška elementa volumena i kvadrata udaljenosti od zadane osi s obzirom na određenu os. S obzirom da moment tromosti ovisi i o kvadratu udaljenosti i o masi tijela, te kako je osnovna mjerna jedinica za duljinu m (metar), a osnovna mjerna jedinica za masu kg (kilogram) mjerna jedinica za aksijalni moment izražava se u kgm^2. Aksijalni moment tromosti može se izraziti i kao Nms^2. Poveznicu između kgm^2 i Nms^2 pronalazimo iz mjerne jedinice za silu N (njutn). Mjerna jedinica za silu je N ili kg $\frac{m}{s^2}$. Kao što nam je poznato iz drugog Newtonovog postulata izraz za silu jednak je $\vec{F}= m\vec{a}$, gdje nam je m masa u kg, a $\vec{a}$ ubrzanje u $\frac{m}{s^2}$. Ukoliko umjesto oznaka pišemo njihove mjerne jedinice dobit ćemo:

N= kg $\frac{m}{s^2}$. Zatim cijeli izraz pomnožimo sa s^2 te dobivamo: Ns^2=kgm. Zatim ovaj izraz pomnožimo sa m kako bismo dobili mjernu jedinicu za moment tromosti te primjećujemo jednakost između mjernih jedinica kgm^2 i Nms^2.

3 Steinerov teorem



Slika 3: Prikaz koji služi za daljnje izvođenje Steinerova teorema.

Na slici 3 sm predstavlja središte mase tijela, b udaljenost između središta mase sm i točke B kroz koju računamo moment tromosti za paralelnu os, $\vec{r}$ predstavlja udaljenost između središta mase i točke oko koje tijelo rotira, a $\vec{r'}$ predstavlja udaljenost između točke B i točke oko koje se tijelo vrti.

Neka se neko tijelo vrti oko osi z Kartezijeva koordinatnog sustava koje prolazi kroz središte mase tijela okomito na ravninu slike. Moment tromosti oko osi z jednak je:

$$I_Z=\int(x^2+y^2)dm. \quad (7)$$

Moment tromosti za paralelnu os koja prolazi kroz točku B koja je udaljena za b od osi kroz središte mase iznosi:

$$I=\int r'^2 dm = \int[(b-x)^2+y^2]dm=\int(b^2-2bx+x^2+y^2)dm$$

$$I=\int(x^2+y^2)dm+\int b^2dm-2b\int xdm$$

$$2b\int xdm=2bx_{sm}m=0,\ \text{gdje je}\ x_{sm}=0$$

jer je sm (Slika 3) smješteno u ishodištu. Time smo dobili:

$$I=I_{sm}+md^2, \quad (8)$$

što je matematički izraz Huygens-Steinerova teorema. Steinerov teorem riječima glasi: moment tromosti s obzirom na neku os jednak je momentu tromosti s obzirom na paralelnu os kroz središte mase uvećan za umnožak mase tijela i kvadrat udaljenosti tih osi. Ovako iskazan Steinerov teorem poznat je kao teorem o paralelnim osima. Iz teorema o paralelnim osima (8) primjećujemo da je $I > I_{sm}$ iz čega zaključujemo da je moment tromosti kroz središte mase u odnosu na bilo koji moment tromosti najmanji.

4 Uvod u izračun momenta tromosti pravilnih geometrijskih tijela oko osi simetrije

Za tijelo sastavljeno od N materijalnih čestica moment tromosti u odnosu na neku os jednak je zbroju momenata tromosti svih materijalnih čestica za tu os:

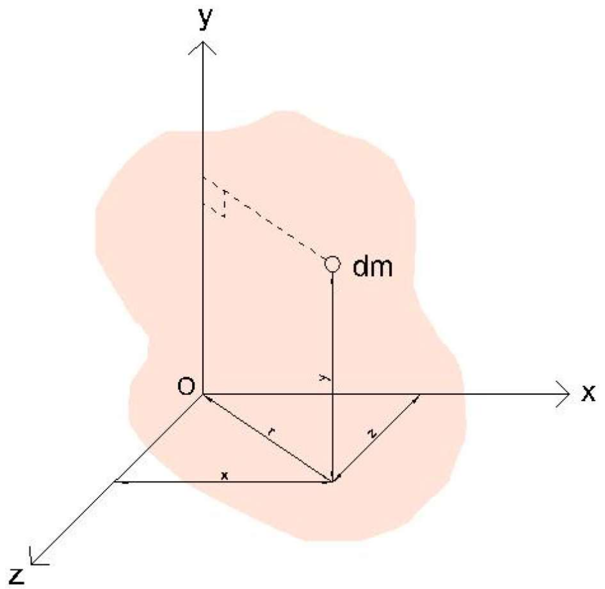
$$I=\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2. \tag{9}$$

S obzirom da se kruto tijelo može smatrati beskonačnim skupom materijalnih čestica čija se međusobna udaljenost ne mijenja, svaka od čestica može se smatrati diferencijalnim elementom mase te se zbrajanje npr. trodimenzijskog oblika može zamijeniti integriranjem po volumenu tijela te se integriraju momenti tromosti svih diferencijalnih masa dm. Ako je tijelo homogeno tada je:

$$dm=\rho dV, \tag{10}$$

$$I=\int r_{\perp}^2 dm=\rho\int r_{\perp}^2 dV, \tag{11}$$

gdje je s $r_{\perp}$ označena okomita udaljenost od zadane osi.



Slika 4: Prikaz udaljenosti r od ishodišta u 3D (xyz) koordinatnom sustavu prema kojem ćemo se služiti Pitagorinim poučkom za određenu os.

Podijeli li se tijelo prema slici 4 moment tromosti s obzirom na osi x,y i z iznosi:

$$I_x=\int(y^2+z^2)dm, \tag{12.1}$$

$$I_y=\int(x^2+z^2)dm, \tag{12.2}$$

$$I_z=\int(x^2+y^2)dm. \tag{12.3}$$

Prilikom računanja momenta tromosti integracijom za pojedino tijelo, osim granica integrala potrebno je razumjeti dimenzionalnost tijela (linearnu, površinsku i volumnu). Za linearnu dimenzionalost (1D) koristimo jednu os na kojoj se tijelo nalazi. Linearna gustoća λ računa se kao:

$$\lambda=m/l. \tag{13}$$

Za površinsku dimenzionalnost (2D) koristimo dvije osi na kojima se tijelo nalazi. Površinska gustoća σ računa se kao:

$$\sigma=m/S. \tag{14}$$

Kod volumne dimenzionalnosti (3D) koristimo tri osi na kojima se tijelo nalazi. Diferencijal volumena za cilindrični koordinatni sustav jednak je:

$$dV=r\,dr\,d\varphi\,dz. \tag{15}$$

Za sferni koordinatni sustav diferencijal volumena jednak je:

$$dV=r^2\sin\Theta\,dr\,d\Theta\,d\varphi. \tag{16}$$

Volumna gustoća ρ računa se kao:

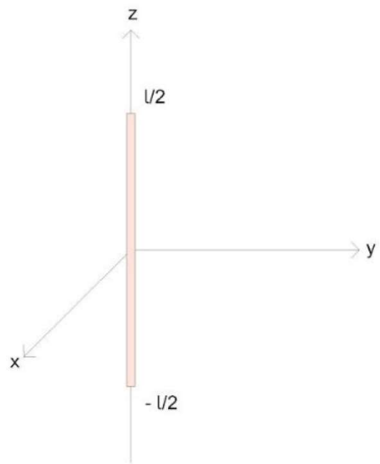
$$\rho=m/V. \tag{17}$$

5 Izračun momenta tromosti standardnih geometrijskih tijela

5.1 Moment tromosti oko glavnih osi kroz središte mase tankog homogenog štapa

Zadatak 1. Nađite momente tromosti oko glavnih osi kroz središte mase tankog homogenog štapa mase m i duljine l.

<u>Rješenje:</u>



Slika 5: Tanki homogeni štap duljine l i mase m.

Možemo uočiti da su x,y i z osi simetrije štapa te su one i njegove glavne osi. Os simetrije pravac je u odnosu na koji simetrične točke tijela koje se nalaze na okomici na taj pravac imaju jednaku udaljenost. S obzirom da je štap tanak i leži na osi z, njegova gustoća ograničena je na x=0 i y=0. Za njegov račun potrebno je koristiti linijsku gustoću λ. Homogeni štap ima linijsku gustoću λ koja je jednaka masi po jedinici duljine (13). Štap je beskonačno tanak te je rotacija oko osi na koju smo postavili štap jednaka nuli. U ovom slučaju imamo samo moment tromosti oko osi x i y.

Moment tromosti oko osi x:

$$I_x=\int_{-l/2}^{l/2}(y^2+z^2)\lambda dz=\lambda\int_{-l/2}^{l/2} z^2 dz=\lambda\frac{z3}{3}\Big/_{-l/2}^{l/2}=\lambda\left(\frac{(\frac{l}{2})^3}{3}+\frac{(\frac{l}{2})^3}{3}\right)=\lambda\left(\frac{\frac{l^3}{8}}{3}+\frac{\frac{l^3}{8}}{3}\right)$$

$$I_x=\lambda\left(\frac{l^3}{24}+\frac{l^3}{24}\right)=\lambda 2\frac{l^3}{24}=\lambda\frac{l^3}{12}=\frac{m}{l}\frac{l^3}{12}=m\frac{l^2}{12}$$

Moment tromosti oko osi y:

$$I_y=\int_{-l/2}^{l/2}(x^2+z^2)\lambda dz=\lambda\int_{-l/2}^{l/2}z^2dz=\lambda\frac{z3}{3}\Big/_{-l/2}^{l/2}=\lambda\left(\frac{(\frac{l}{2})^3}{3}+\frac{(\frac{l}{2})^3}{3}\right)=\lambda\left(\frac{\frac{l^3}{8}}{3}+\frac{\frac{l^3}{8}}{3}\right)$$

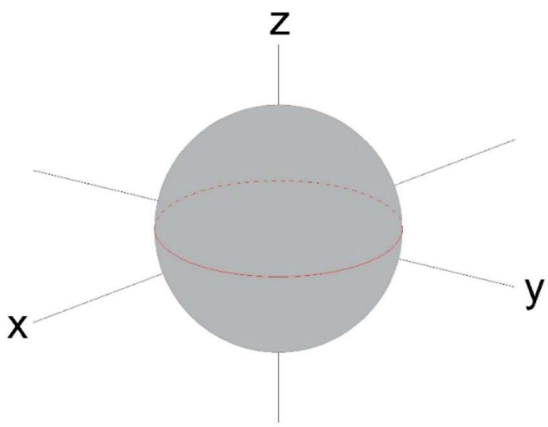
$$I_y=\lambda\left(\frac{l^3}{24}+\frac{l^3}{24}\right)=\lambda 2\frac{l^3}{24}=\lambda\frac{l^3}{12}=\frac{m}{l}\frac{l^3}{12}=m\frac{l^2}{12}$$

Moment tromosti oko osi x jednak je momentu tromosti oko osi y. Prema slici 4 služimo se Pitagorinim poučkom za svaku os zasebno. Štap prolazi kroz centar mase te su nam granice za obje osi koje računamo jednake $-l/2 < z < l/2$. U početnom dijelu zadatka uočili smo da su granice za x i y jednake nuli te zbog toga za moment tromosti oko osi x i y preostaje samo z^2.

5.2 Moment tromosti oko glavnih osi kroz središte mase homogene kugle

Zadatak 2. Nađite momente tromosti oko glavnih osi kroz središte mase homogene kugle mase m i polumjera R.

Rješenje:



Slika 6: Homogena kugla polumjera R i mase m.

Možemo uočiti da su x,y i z osi simetrije kugle te su one i njezine glavne osi. Prema slici 4 služimo se Pitagorinim poučkom za svaku os zasebno. Time smo dobili : (12.1), (12.2), (12.3). Ukoliko uzmemo u obzir (10) dobit ćemo:

$$I_x=\int(y^2+z^2)\rho dV, \tag{18.1}$$

$$I_y=\int(x^2+z^2)\rho dV, \tag{18.2}$$

$$I_z=\int(x^2+y^2)\rho dV. \quad (18.3)$$

Iz simetrije problema uočavamo da su sva tri momenta tromosti jednaka. Umjesto računanja svakog momenta posebno, izabrat ćemo brži način, odnosno sva tri momenta ćemo zbrojiti te dobivamo:

$$I_x+I_y+I_z=3I$$

$$3I=2\int(x^2+y^2+z^2)\,\rho dV$$

$$3I=2\rho\int r^2 dV. \quad (19)$$

U ovom slučaju gustoća je jednaka (17). Integriramo u sfernom koordinatnom sustavu te je diferencijal volumena jednak (16), a granice integrala su: Φ [0,2π], Θ [0,π], r [0,R]. Podijelimo li jednadžbu (19) sa 3 i uvrstimo li izraz (16) za dV te uvrstimo li granice trostukog integrala dobit ćemo:

$$I=\frac{2}{3}\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 r^2 \sin\Theta dr d\Theta d\Phi=\frac{2}{3}\rho\int_0^{2\pi} d\Phi\int_0^{\pi}\sin\Theta d\Theta\int_0^{R} r^4 dr=\frac{2}{3}\rho 2\pi R^5/5\int_0^{\pi}\sin\Theta d\Theta$$

$$=\frac{4}{15}\rho\pi R^5\int_0^{\pi}\sin\Theta d\Theta=\frac{4}{15}\rho\pi R^5(-\cos\pi+\cos 0)=\frac{4}{15}\rho\pi R^5 2=\frac{8}{15}\rho\pi R^5=\frac{8}{15}\frac{m}{V}\pi R^5$$

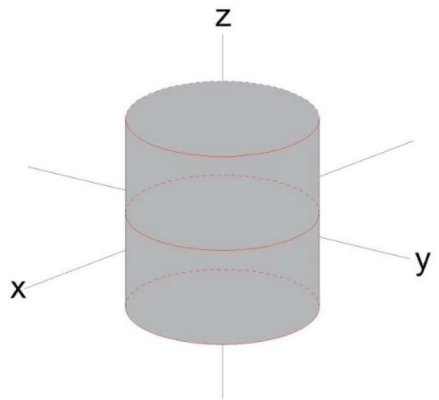
Nakon što uvrstimo volumen kugle $V=\frac{4}{3}R^3\pi$, dobit ćemo rješenje:

$$I=I_x=I_y=I_z=\frac{2}{5}mR^2$$

5.3 Moment tromosti oko glavnih osi kroz središte mase homogenog valjka

Zadatak 3. Nađite momente tromosti oko glavnih osi kroz središte mase homogenog valjka mase m, visine h i polumjera R.

Rješenje:



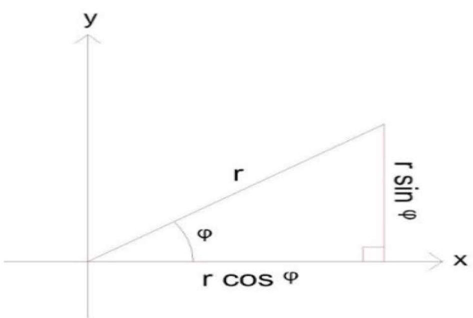
Slika 7: Homogeni valjak visine h, polumjera R i mase m.

Možemo uočiti da su x,y i z osi simetrije valjka te su one i njezine glavne osi. Prema slici 4 služimo se Pitagorinim poučkom za svaku os zasebno. Time smo dobili: (18.1), (18.2), (18.3).
Iz simetrije problema uočavamo da su I_x i I_y jednaki. Umjesto računanja svakog momenta posebno, izabrat ćemo brži način odnosno ta dva momenta ćemo zbrojiti:

$$I_x+I_y=2I=\rho\int(x^2 + y^2 + 2z^2)dV .$$

Uzmemo li u obzir x i y iz polarnog koodinatnog sustava (slika 8) možemo pisati jednakost za r iz Pitagorinog poučka:

$$r^2=x^2+y^2. \quad (20)$$



Slika 8: Polarni koordinatni sustav.

Iz čega slijedi:

$$2I=\rho\int(r^2+2z^2)dV \tag{21}$$

Podijelimo li jednadžbu (21) sa 2 i postavimo li granice trostrukog integrala u cilindričnom koordinatnom sustavu jednadžba (21) poprima oblik:

$$I=\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^R(r^2+2z^2)rdrdzd\varphi$$

$$I=\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^R r^3drdzd\varphi+\rho\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^R z^2rdrdzd\varphi$$

$$I=\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-h/2}^{h/2}dz\int_0^R r^3dr+\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-h/2}^{h/2}z^2dz\int_0^R rdr$$

$$I=\frac{\rho\pi hR^4}{4}+\frac{\rho\pi h^3R^2}{12}$$

$$I=R^2\pi h\rho\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)$$

Iz čega slijedi da momenti tromosti I_x i I_y iznose:

$$I_x=I_y=R^2\pi h\frac{m}{V}\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)$$

te nakon uvrštavanja izraza za volumen valjka $V=R^2\pi h$:

$$R^2\pi h\frac{m}{R^2\pi h}\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)=\frac{m}{12}(3R^2+h^2)$$

Moment tromosti oko osi z:

$$I_z=\rho\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^R r^3drdzd\varphi$$

$$I_z=\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-h/2}^{h/2}dz\int_0^R r^3dr$$

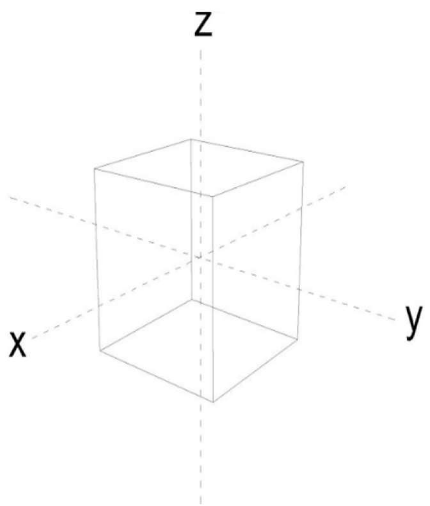
$$I_z=2\rho\pi h\frac{R^4}{4}$$

$$I_z=\rho\pi h\frac{R^4}{2}=\frac{m}{R^2\pi h}\pi h\frac{R^4}{2}=\frac{1}{2}mR^2$$

5.4 Moment tromosti oko glavnih osi kroz središte mase homogenog kvadra

Zadatak 4. Nađite momente tromosti oko glavnih osi kroz središte mase homogenog kvadra mase m i stranica a,b i c.

Rješenje:



Slika 9: Homogeni kvadar sa stranicama a, b, c i masom m.

Možemo uočiti da su x,y i z osi simetrije kvadra te su one i njezine glavne osi. Prema slici 4 služimo se Pitagorinim poučkom za svaku os zasebno. Time smo dobili: (18.1), (18.2), (18.3). Integral ćemo riješiti u pravokutnom koordinatnom sustavu. Diferencijal volumena iznosi: dxdydz.

Moment tromosti oko osi x:

$$I_x=\rho\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(y^2+z^2)dxdydz$$

$$I_x=\rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2}y^2dxdydz+\rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2}z^2dxdydz$$

$$I_x=\rho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}y^2dy\int_{-c/2}^{c/2}dz\ +\rho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}z^2dz$$

$$I_x=\rho a\frac{b^3}{12}c+\rho ab\frac{c^3}{12}$$

$$I_x=\frac{\rho abc}{12}(b^2+c^2)$$

Nakon uvrštavanja izraza za gustoću (17) gdje je V volumen kvadra jednak V=abc rješenje glasi:

$$I_x=\frac{m}{12}(b^2+c^2)$$

Analognim postupkom dobit ćemo moment tromosti oko y i z osi:

$$I_y=\int(x^2+z^2)\rho dV$$

$$I_y=\rho\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(x^2+z^2)dxdydz$$

$$I_y=\rho\int_{-a/2}^{a/2}x^2dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}dz+\rho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}z^2dz$$

$$I_y=\rho\left[\left(\frac{\frac{a^3}{8}}{3}+\frac{\frac{a^3}{8}}{3}\right)bc+ab\frac{\frac{c^3}{8}}{3}+\frac{\frac{c^3}{8}}{3}\right]$$

$$I_y=\rho bc\frac{a^3}{12}+\rho ab\frac{c^3}{12}$$

$$I_y=\frac{\rho abc}{12}(a^2+c^2)$$

$$I_y=\frac{m}{12}(a^2+c^2)$$

$$I_z=\int(x^2+y^2)\rho dV$$

$$I_z=\rho\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(x^2+y^2)dxdydz$$

$$I_z=\rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2}x^2dxdydz+\rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2}y^2dxdydz$$

$$I_z=\rho\int_{-a/2}^{a/2}x^2dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}dz+\rho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-a/2}^{a/2}y^2dy\int_{-c/2}^{c/2}dz$$

$$I_z=\rho\frac{a^3}{12}bc+\rho a\frac{b^3}{12}c$$

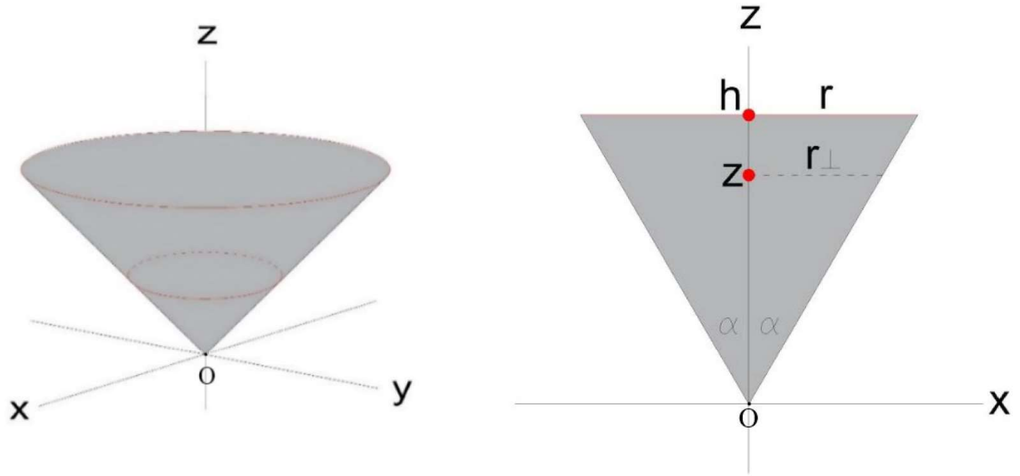
$$I_z=\frac{\rho abc}{12}(a^2+b^2)$$

$$I_z=\frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

5.5 Moment tromosti oko glavnih osi kroz središte mase homogenog stošca

Zadatak 5. Nađite momente tromosti oko glavnih osi kroz centar mase homogenog stošca mase m, polumjera R i visine h.

Rješenje:



Slika 10: Homogeni stožac visine h, polumjera R i mase m.

Možemo uočiti da su x,y i z osi simetrije valjka te su one i njezine glavne osi. Prema slici 4 služimo se Pitagorinim poučkom za svaku os zasebno. Time smo dobili: (18.1), (18.2), (18.3). Momente inercije računamo u sustavu s ishodištem u točki O, a zatim pomoću Steinerovog teorema prelazimo u sustav s ishodištem u središtu mase. Središte mase stošca nalazi se na udaljenosti od tri četvrtine visine stošca od vrha stošca odnosno na udaljenosti od jedne četvrtine visine od središta baze stošca. Gustoća je konstantna i iznosi (17). Volumen stošca iznosi: $V=\frac{1}{3}r^2\pi h$. Kako bismo dobili rješenje integriramo u cilindričnom koordinatnom sustavu. Uzmemo li u obzir x i y iz polarnog koodinatnog sustava možemo pisati jednakost iz Pitagorinog poučka (20), (slika 8).

Moment tromosti oko osi z

$$I_z=\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\int_0^{z\tan\alpha} r^3 drdzd\varphi$$

Iz slike 10 desno preko trigonometrijske formule za tan izrazimo granicu za r: $r=z\tan\alpha$.

$$I_z=\rho\int_0^{2\pi} d\,\varphi \int_0^{z\tan\alpha} r^3 dr \int_0^{h} dz$$

$$I_z=\rho\, 2\pi \frac{\tan^4\alpha}{4}\int_0^{h} z^4 dz$$

$$I_z=\rho\pi \frac{\tan^4\alpha}{2}\int_0^{h} z^4 dz$$

$$I_z=\rho\pi \frac{\tan^4\alpha}{2}\frac{h^5}{5}$$

$$I_z=\rho\pi\tan^4\alpha\frac{h^5}{10}$$

Nakon uvrštavanja volumena stošca $V=\frac{1}{3}R^2\pi h$ u formulu za gustoću $\rho=\frac{m}{V}$ te nakon iščitavanja izraza $\tan\alpha=\frac{r}{h}$ iz trigonometrije sa slike 10 desno uz korištenje oznake R umjesto r slijedi:

$$I_Z=\frac{m}{\frac{1}{3}R^2\pi h}\pi\,\frac{R^4}{h^4}\frac{h^5}{10}$$

$$I_Z=\frac{3}{10}mR^2$$

Iz simetrije problema uočavamo da su Ix i Iy jednaki. Umjesto računanja svakog posebno izabiremo brži način:

$$2I=I_x+I_y=\int(x^2+y^2+2z^2)\rho dV$$

$$2I=\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\int_0^{z\tan\alpha}(r^2+2z^2)\; r dr dz d\varphi$$

Podijelimo li jednadžbu s 2:

$$I=\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{z\tan\alpha}(r^2+2z^2) r dr\int_0^{h} dz$$

$$I=\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{z\tan\alpha} r^3 dr\int_0^{h} dz+\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{z\tan\alpha} r dr\int_0^{h} z^2 dz$$

$$I=\rho\pi\frac{\tan^4\alpha}{4}\int_0^{h} z^4 dz+\rho\pi\tan^2\alpha\int_0^{h} z^4 dz$$

$$I=\rho\pi\frac{\tan^4\alpha}{4}\frac{h^5}{5}+\rho\pi\tan^2\alpha\frac{h^5}{5}$$

Zatim uvrštavanjem $\tan\alpha=\frac{R}{h}$ kao i u računu za moment tromosti oko osi z slijedi:

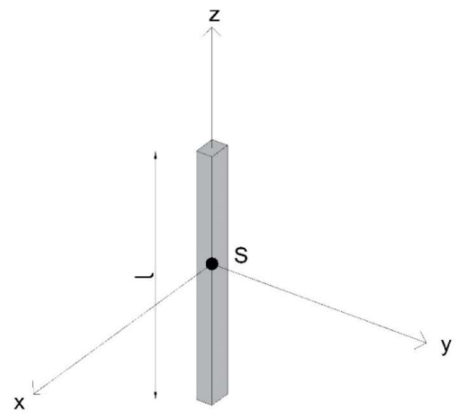
$$I=\rho\pi\frac{1}{20}\;R^4h+\rho\pi R^2h^3\frac{1}{5}$$

$$I=\frac{m}{\frac{1}{3}R^2\pi h}\pi\frac{1}{20}\;R^4h+\frac{m}{\frac{1}{3}R^2\pi h}\pi R^2h^3\frac{1}{5}$$

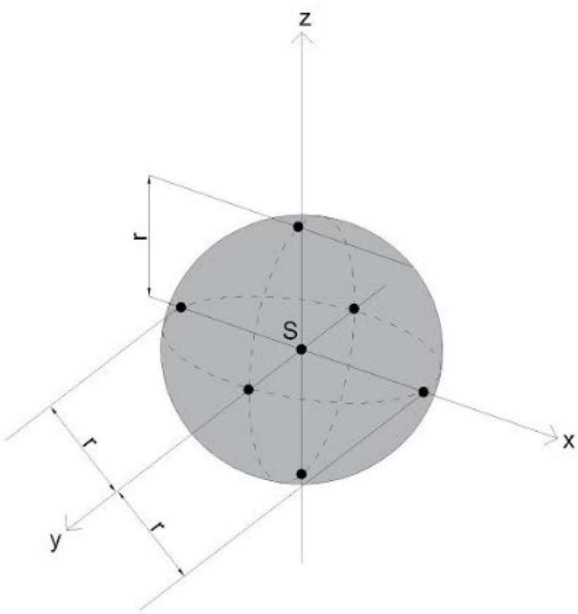
$$I=\frac{3R^2m}{20}+\frac{m}{5}h^2$$

$$I=\frac{3m}{5}\left[\frac{R^2}{4}+h^2\right]=I_x=I_y$$

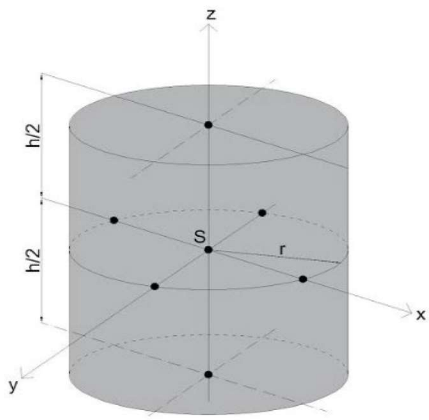
6 Kratak zapis i skica momenta tromosti oko glavnih osi poznatih tijela



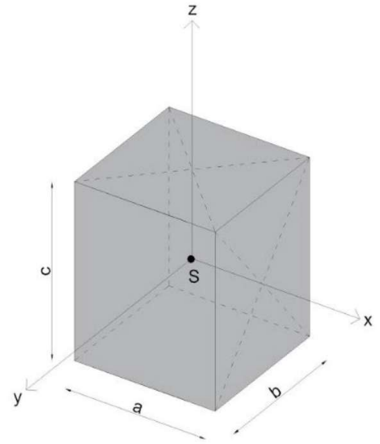
Slika 11: Tanki štap; I_z=0, I_x=I_y=$\frac{1}{12}$ml².



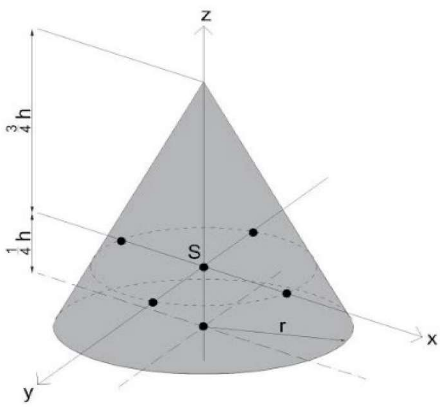
Slika 12: Kugla; I_x=I_y=I_z = $\frac{2}{5}$mr².



Slika 13: Valjak; $I_x = I_y = \frac{m}{12}(3r^2 + h^2)$, $I_z = \frac{1}{2}mr^2$.



Slika 14: Kvadar; $I_x = \frac{m}{12}(b^2+c^2)$, $I_y = \frac{m}{12}(a^2+c^2)$, $I_z = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$.



Slika 15: Stožac; $I_z = \frac{3}{10}mr^2$, $I_x = I_y = \frac{3m}{5}\left[\frac{r^2}{4} + h^2\right]$.

7 Zaključak

Nakon računanja momenta tromosti različitih oblika tijela zaključujemo da ono ne ovisi samo o masi tijela i udaljenosti njegova težišta od osi rotacije već i o njegovom obliku. Moment oko glavnih osi kroz središte mase tijela jednak je za osi u kojima je tijelo simetrično. S obzirom da se kruto tijelo može smatrati beskonačnim skupom materijalnih čestica čija je međusobna udaljenost nepromjenjiva, svaka od čestica smatra se diferencijalnim elementom mase te se integrira moment tromosti svakog djelića tijela.

8 Literatura

1. Beer P. F, Russell Johnston E. Jr., Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics: Fifth Edition

2. Bognolo D., Novak Z., Škifić N., Tehnička mehanika: Rijeka, 2012

3. Džolan A., Kožul M., Mehanika 2, Kinematika i dinamika: Mostar 2017

4. Matejiček F., Kinetika sa zbirkom zadataka: Slavonski Brod, 2010., drugo dopunjeno i popravljeno izdanje

5. Kulišić P., Mehanika i toplina: Zagreb 1987., drugo izdanje

6. http://menso88.weebly.com/uploads/1/7/5/8/17586891/otpornost_materijala_i.pdf (preuzeto 10.08.2019.)

7. http://newt.phys.unsw.edu.au/~jkw/phys1121_31/pdf/lecture12.pdf (preuzeto 10.08.2019)

8. https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/predavanja7-2014.pdf (preuzeto 10.08.2019.)

9 Životopis

Anja Pejaković rođena je 15.12.1996. godine u Vinkovcima, RH. Pohađala je Tehničku školu Ruđera Boškovića u Vinkovcima. Srednju školu završila je 2015. godine te godinu nakon upisuje preddiplomski studij fizike na Odjelu za fiziku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, gdje trenutno studira.