

# LINEARIZACIJA JEDNADŽBI GIBANJA

---

**Matić, Mario**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Physics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:160:718144>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-30**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Department of Physics in Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
ODJEL ZA FIZIKU**



**MARIO MATIĆ**

# **LINEARIZACIJA JEDNADŽBI GIBANJA**

**Završni rad**

**Osijek, 2020.**

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
ODJEL ZA FIZIKU**



**MARIO MATIĆ**

## **LINEARIZACIJA JEDNADŽBI GIBANJA**

**Završni rad**

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
radi stjecanja zvanja prvostupnika fizike

**Osijek, 2020.**

**Ovaj završni rad izrađen je u Osijeku pod vodstvom doc. dr. sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.**

## Sadržaj

1	Uvod .....	1
2	Ravnotežni položaj .....	3
3	Sustavi čestica.....	5
3.1	Lagranžijan sustava čestica s više stupnjeva slobode .....	5
3.2	Mali titraji sustava čestica s jednim stupnjem slobode .....	7
3.3	Jednadžba gibanja .....	9
3.4	Mali titraji sustava čestica s više stupnjeva slobode .....	12
4	Primjeri .....	14
	Primjer 1 .....	14
	Primjer 2 .....	17
	Primjer 3 .....	21
	Primjer 4 .....	23
	Primjer 5 .....	26
	Primjer 6 .....	30
	Primjer 7 .....	36
	Primjer 8 .....	40
	Primjer 9 .....	44
	Primjer 10 .....	46
5	Zaključak .....	51
6	Literatura .....	52
7	Životopis.....	53

# LINEARIZACIJA JEDNADŽBI GIBANJA

MARIO MATIĆ

## Sažetak

Uvod u linearizaciju jednadžbi gibanja tijela započinjemo teorijskim dijelom gdje predstavljamo uvjete ravnoteže te potrebne korake za dobivanje jednadžbi gibanja u okviru analitičke mehanike. Osim teorijskog dijela obrađene su i matematičke definicije potrebne za pronalaženje jednadžbe gibanja, te njenu linearizaciju. U nastavku slijedi nekoliko primjera sustava s jednim i više stupnjeva slobode u kojima su pronađene i linearizirane jednadžbe gibanja.

**Rad je pohranjen u knjižnici odjela za fiziku**

**Ključne riječi:** dvostruko njihalo / Euler-Lagrangeova jednadžba / lagranžijan / matematičko njihalo / ravnotežni položaj / sferno njihalo

**Mentor:** doc.dr.sc. Zvonko Glumac

**Ocjenjivači:**

**Rad prihvaćen:**

# LINEARIZATION OF EQUATIONS OF MOTION

MARIO MATIĆ

## Abstract

The introduction to the linearization of the equations of motion begins with a theoretical part where we present the conditions of equilibrium and all necessary steps for obtaining the equations of motion in the form of analytical mechanics. In addition to the theoretical part, the mathematical definitions for finding the equations of motion and its linearized forms are also processed. In addition there are some examples of systems with one or more degrees of freedom in which the equations of motion are found and linearized.

**Thesis deposited in Department of Physics library**

**Keywords:** double pendulum / equilibrium position / Euler-Lagrange equation / Lagrangian / mathematical pendulum / spherical pendulum

**Supervisor:** doc.dr.sc. Zvonko Glumac

**Reviewers:**

**Thesis accepted:**

# 1 Uvod

U razvoju klasične mehanike postoje dva vodeća pravca. Prvi od njih je vektorska mehanika u kojoj se za dobivanje jednadžbi gibanja tijela koriste vektorske veličine (sila i količina gibanja) uz primjenu Newtonovih zakona gibanja.

Gibanje čestice u Newtonovoj mehanici zadano je jednadžbom

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdje je  $\vec{p} = m\vec{v}$  vektor količine gibanja, a  $\vec{F}$  vektor ukupne sile koja djeluje na tijelo.

Vektorska mehanika dovoljno precizno opisuje sva gibanja u makrosvijetu pri brzinama koje su mnogo manje od brzine svjetlosti. Međutim, u mikrosvijetu kao i pri gibanjima velikim brzinama vektorska mehanika pokazuje manjkavosti. Također, za primjenu Newtonove mehanike na fizikalni problem morali bismo poznavati sve sile koje djeluju na sustav, a to ponekad nije jednostavno ako je gibanje sustava ograničeno vezama.

Drugi je pravac analitička mehanika koja se zasniva na skalarnim veličinama (rad i energija). Pri opisivanju gibanja nekog tijela definiramo funkciju lagranžijan  $L$  kao razliku kinetičke i potencijalne energije konzervativnog sustava

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = T - U$$

gdje su  $q_i$  generalizirane koordinate koje koristimo za jednoznačno opisivanje položaja čestica u sustavu, a  $\dot{q}_i$  generalizirane brzine.

Uvrštavajući Lagrangeovu funkciju  $L$  u Euler-Lagrangeovu<sup>1</sup> jednadžbu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

dobivamo jednadžbe gibanja sustava istovjetne onima koje daje vektorska mehanika.

---

<sup>1</sup> Leonard Euler, švicarski matematičar; Joseph Louis Lagrange, francuski matematičar



Ako dobivene jednađbe ne ovise eksplicitno o generaliziranoj koordinati  $q$  i njenim derivacijama, jednađba ima nelinearni oblik i teško ju je riješiti. U tom slučaju uočavamo položaj stabilne ravnoteže sustava  $q_0$ , a to je onaj za koji vrijedi da potencijalna energija ima minimum, i promatramo male pomake od tog položaja. U Lagrangeovoj jednađbi sve veličine razvijemo u red oko  $q_0$  i zadržimo samo linearne članove. Taj postupak naziva se **linearizacija jednađbe gibanja**.

## 2 Ravnotežni položaj

Jednodimenzijско jednoliko ubrzano gibanje tijela mase  $m$  u polju sile  $f$  kojoj je intenzitet neovisan o vremenu opisuje diferencijalna jednadžba gibanja

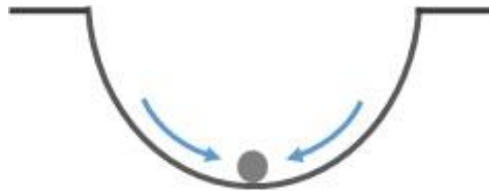
$$f(x) = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.1)$$

Položaj  $x_0$  nazivamo **ravnotežnim položajem** gibanja ako u toj točki sila iščezava, odnosno  $f(x_0) = 0$ . U tom položaju čestica može mirovati.

Ovisno o predznaku prve vremenske derivacije sile razlikujemo tri slučaja:

a) **stabilni** ravnotežni položaj:

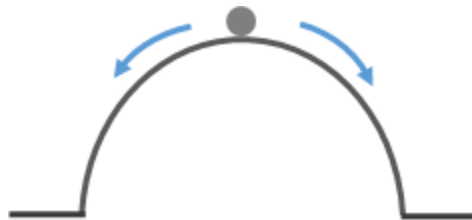
Ako je  $f'(x_0) < 0$  tad sila uvijek djeluje na česticu tako da je pomiče prema ravnotežnom položaju ako je čestica u njegovoj blizini.



Slika 2.1. Kuglica na dnu udoline.

b) **nestabilni** ravnotežni položaj:

Ako je  $f'(x_0) > 0$  tad sila uvijek djeluje na česticu tako da je odmiče od ravnotežnog položaja ako je čestica u njegovoj blizini.



Slika 2.2. Kuglica na vrhu brijega.

c) **indiferentni** ravnotežni položaj:

Ako je  $f'(x_0) = 0$  tad će tijelo pomaknuto iz položaja indiferentne ravnoteže ostati u bilo kojem novom položaju.



Slika 2.3. Kuglica na ravnini.

Diferencijalnu jednadžbu gibanja (2.1) nije uvijek lako riješiti, ali se u blizini ravnotežnog položaja  $x_0$  funkcija sile  $f$  može zamijeniti linearnom aproksimacijom.

Razvojem sile  $f(x)$  u Taylorov red dobivamo

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots$$

Za ravnotežni položaj vrijedi da je  $f(x_0) = 0$ , a treći i daljnje članove u razvoju možemo zanemariti jer su pomaci od ravnotežnog položaja  $(x - x_0)$  mali.

Aproksimativno tada vrijedi da je

$$f(x) = \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0). \quad (2.2)$$

Uvrštavajući aproksimaciju (2.2) u jednadžbu gibanja (2.1) dobivamo jednadžbu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) \quad (2.3)$$

koju nazivamo **linearna aproksimacija jednadžbe gibanja** oko ravnotežnog položaja  $x_0$ .

### 3 Sustavi čestica

#### 3.1 Lagranžijan sustava čestica s više stupnjeva slobode

Razmotrit ćemo sustav od  $N$  čestica. Kinetička energija jedne čestice mase  $m$  koja se nalazi u trodimenzionalnom Kartezijevom prostoru je

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k^2,$$

a kinetička energija  $N$  čestica je

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k^2. \quad (3.1)$$

Sustav čestica može se opisati pomoću  $n$  stupnjeva slobode. Tada i Kartezijeve komponente položaja postaju funkcije nezavisnih generaliziranih koordinata  $q$ , ali ne i brzine  $\dot{q}$

$$x_k = x_k(q, t) \quad k = 1, 2, \dots, 3N.$$

Prva vremenska derivacija Kartezijevih koordinata je

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_k}{\partial t} \quad (3.2)$$

prema čemu zaključujemo da  $\dot{x}_i$  ovisi o položaju, brzini i vremenu

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k(q, \dot{q}, t).$$

Uvrštavajući (3.2) u (3.1) za kinetičku energiju sustava čestica dobivamo izraz za kinetičku energiju

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} m_k \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \\ &+ \sum_{k=1}^{3N} m_k \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial t} \right) \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} m_k \left( \frac{\partial x_k}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

prema kojem kinetička energija više ne ovisi samo o brzini, već i o samim koordinatama položaja

$$T = T(q, \dot{q}, t).$$

Izraz za kinetičku energiju (3.3) možemo mnogo pojednostaviti ako pretpostavimo da Kartezijeve komponente položaja  $x_i$  ne ovise eksplicitno o vremenu, jer onda njihova parcijalna vremenska derivacija iščezava.

Tada u izrazu (3.3) preostaje samo prvi član i on postaje

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} m_k \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (3.4)$$

Reorganizacijom poretka sumacija u izrazu (3.4) definiramo matricu mase  $m_{ij}$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^{3N} m_k \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right)}_{m_{ij}} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.5)$$

koja je po svojoj definiciji simetrična  $m_{ij} = m_{ji}$ .

Konačni izraz za kinetičku energiju je onda

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.6)$$

**Lagranžijan**  $L$  konzervativnog sustava definiramo kao razliku kinetičke energije  $T$  i potencijalne energije  $U$ . Sustav od  $n$  stupnjeva slobode opisan je lagranžijanom

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_n). \quad (3.7)$$

### 3.2 Mali titraji sustava čestica s jednim stupnjem slobode

Opći slučaj sustava s više stupnjeva slobode svest ćemo radi jednostavnosti na jedan stupanj slobode. Opisat ćemo gibanje tog sustava u blizini ravnotežne točke  $q^{(0)}$ . Male pomake od ravnotežnog položaja označit ćemo s

$$x = q - q^{(0)} \quad (3.8)$$

iz čega proizlazi da je

$$q = x + q^{(0)}$$

odnosno

$$\dot{q} = \dot{x}. \quad (3.9)$$

Prema izrazu za kinetičku energiju sustava s više stupnjeva slobode (3.6) zaključujemo da za jedan stupanj slobode vrijedi

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2,$$

a uz (3.9) svodi se na

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2. \quad (3.10)$$

Uz pretpostavku da će se sustav zadržati u blizini ravnotežnog položaja i vršiti samo male titraje, potencijalnu energiju  $U(q)$  razvijamo u Taylorov red. Razvoj glasi

$$U(q) = U(q^{(0)}) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_0 (q - q^{(0)}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_0 (q - q^{(0)})^2 + \dots \quad (3.11)$$

Uz oznaku za male titraje (3.8) izraz (3.11) postaje

$$U(q) = U(q^{(0)}) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_0 x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_0 x^2 + \dots \quad (3.12)$$

Prvi član razvoja  $U(q^{(0)})$  možemo zanemariti jer je potencijalna energija definirana do na konstantu. Drugi član iščezava zbog uvjeta ravnoteže  $\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_0 = 0$ , a u trećem članu definiramo konstantu  $k = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_0$ . Ostali članovi su zanemarivo maleni. Taylorov razvoj potencijalne energije sustava s jednim stupnjem slobode svodi se na

$$U(q) = \frac{1}{2} kx^2 + \dots \quad (3.13)$$

Uz (3.10) i (3.13) definiramo lagranžijan sustava čestica s jednim stupnjem slobode koje se gibaju u blizini položaja ravnoteže (**lagranžijan malih titraja**)

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2. \quad (3.14)$$

### 3.3 Jednadžba gibanja

Iz lagranžijana malih titraja izvodimo jednadžbu gibanja. Matricu mase  $m_{ij}(q)$  obilježavat ćemo u nastavku samo s  $m$ , što je moguće samo kad je  $q$  Kartezijava koordinata. Derivacija lagranžijana (3.14) po brzini je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

a vremenska derivacija je

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}. \quad (3.15)$$

Derivacija lagranžijana (3.14) po prostornoj koordinati je

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx. \quad (3.16)$$

Jednadžbu gibanja izvodimo iz Euler-Lagrangeove jednadžbe

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (3.17)$$

i ona glasi

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad / : m$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.18)$$

Definiramo vlastitu frekvenciju malih titranja  $\omega = \sqrt{k/m}$  pa jednadžba gibanja postaje

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.19)$$

Opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe je linearna kombinacija trigonometrijskih funkcija

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad (3.20)$$

gdje su konstante  $C_1$  i  $C_2$  određene početnim uvjetima  $x(t=0) = x_0$  i  $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ .



Drugi oblik rješenja diferencijalne jednačbe (3.19) je

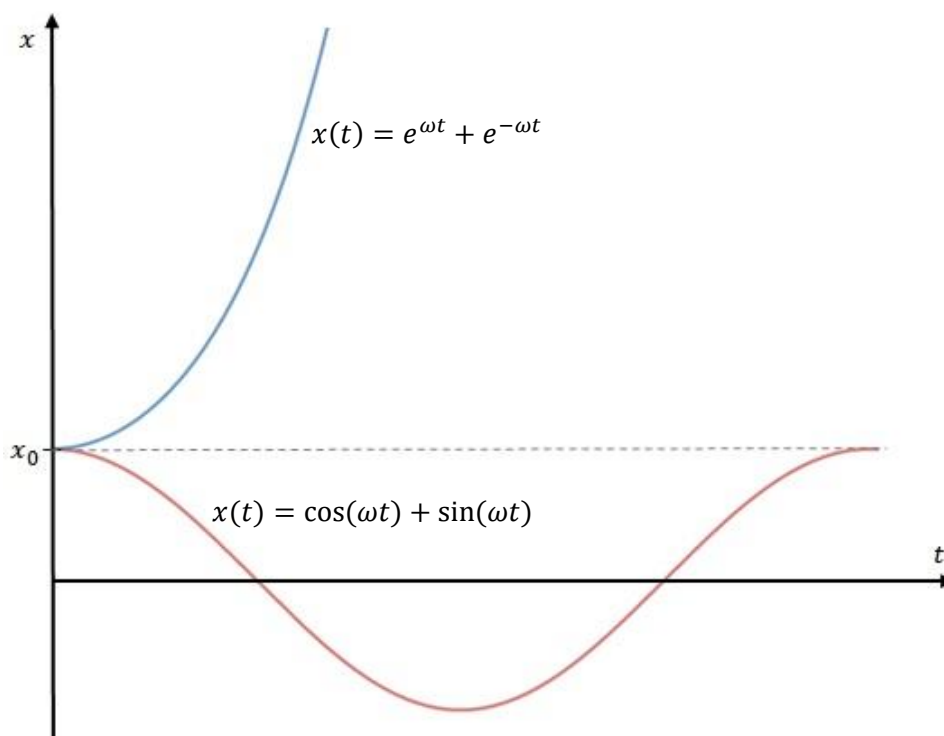
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.21)$$

gdje je  $A$  amplituda titranja, a  $\phi$  početna faza titranja.

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \phi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{C_2}{C_1}\right). \quad (3.22)$$

U slučaju stabilne ravnoteže konstanta  $k$  u jednačbi (3.18) je pozitivna, pa kutna frekvencija  $\omega$  poprima realna rješenja te jednačba (3.19) zaista opisuje titranje sustava oko ravnotežnog položaja.

Suprotno, u slučaju nestabile ravnoteže, konstanta  $k$  je negativna, pa kutna frekvencija  $\omega$  poprima kompleksna rješenja. Tad jednačba (3.19) ne opisuje titranje već eksponencijalno udaljavanje od ravnotežnog položaja koje će uslijediti nakon svakog malog pomaka.



Slika 3.1. Plava linija pokazuje eksponencijalno udaljavanje od ravnotežnog položaja, dok crvena linija pokazuje titranje oko ravnotežnog položaja.

Riješimo i takvu jednadžbu.

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0. \quad (3.23)$$

Pretpostavimo rješenje u obliku

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad (3.24)$$

gdje su konstante  $A$  i  $B$  određene početnim uvjetima  $x(t = 0) = x_0$  i  $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ .

Rješenja (3.20) i (3.24) su uspoređena grafički na slici 3.1.

### 3.4 Mali titraji sustava čestica s više stupnjeva slobode

U poglavlju 3.1 obradili smo sustave s više stupnja slobode, a jednadžba (3.7) predstavljala je lagranžijan takvog sustava. U ovom poglavlju pogledat ćemo kako izgleda jednadžba malih titraja za sustav s  $n$  stupnjeva slobode.

Mali titraji događaju se u blizini točke stabilne ravnoteže

$$q^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}). \quad (3.25)$$

Da bismo utvrdili postoji li takva točka za funkciju  $f = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$  koristimo determinantu matrice hesijan<sup>2</sup>

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 q_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 q_3} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 q_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_2 q_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2 q_3} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2 q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_n q_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n q_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n q_3} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n^2} \end{vmatrix} \quad (3.26)$$

za koju u slučaju stabilne ravnoteže mora vrijediti uvjet

$$H > 0. \quad (3.27)$$

Definiramo male pomake od točke stabilne ravnoteže

$$x_i = q_i - q_i^{(0)}. \quad (3.28)$$

Za kinetičku energiju vrijedi izraz izveden u poglavlju 3.2

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (3.29)$$

<sup>2</sup> Ludwig Otto Hesse (1811. – 1874.), njemački matematičar

a potencijalnu energiju razvijamo u Taylorov red oko točke stabilne ravnoteže

$$\begin{aligned}
 U = & \sum_{i=1}^n U(q_i^{(0)}) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_0 (q_i - q_i^{(0)}) + \\
 & \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 (q_i - q_i^{(0)})(q_j - q_j^{(0)}) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Prvi član razvoja zanemarujemo jer je definiran do na konstantu. Drugi član razvoja po definiciji stabilne točke iščezava. Viši članovi su zanemarivo maleni. U aproksimaciji razvoja ostaje

$$U \approx \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 (q_i - q_i^{(0)})(q_j - q_j^{(0)}). \tag{3.31}$$

Uzimajući u obzir definiran izraz za male pomake (3.28) i definirajući konstante

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 ; \quad k_{ij} = k_{ji} \tag{3.32}$$

gornji izraz pojednostavljujemo u

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} x_i x_j. \tag{3.33}$$

Lagranžijan malih titraja za sustav čestica s  $n$  stupnjeva slobode je

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j). \tag{3.34}$$

Za  $k$ -ti stupanj slobode vrijedi jednačba

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0. \tag{3.35}$$

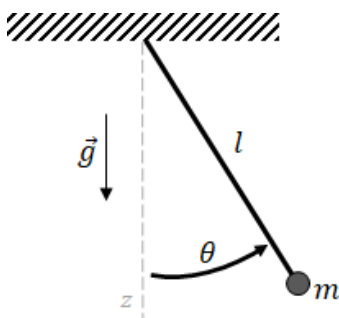
Nakon provedenih derivacija jednačba za  $k$ -ti stupanj slobode glasi

$$\sum_{j=1}^n (m_{kj} \ddot{x}_j - k_{kj} x_j) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{3.36}$$

## 4 Primjeri

### Primjer 1

Na primjeru matematičkog njihala koje se giba u ravnini pronaći ćemo točke stabilne i nestabilne ravnoteže te frekvenciju malih titraja oko ravnotežnog položaja. Matematičko njihalo sastoji se od niti duljine  $l$  i zanemarive mase na kojoj se nalazi točkasta kuglica mase  $m$ .



Slika 4.1. Matematičko njihalo izmaknuto iz ravnotežnog položaja.

Kružni luk koji kuglica prijeđe je  $l\theta$  pa je brzina kuglice  $l\dot{\theta}$ . Kinetička energija kuglice iznosi

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2. \quad (4.1)$$

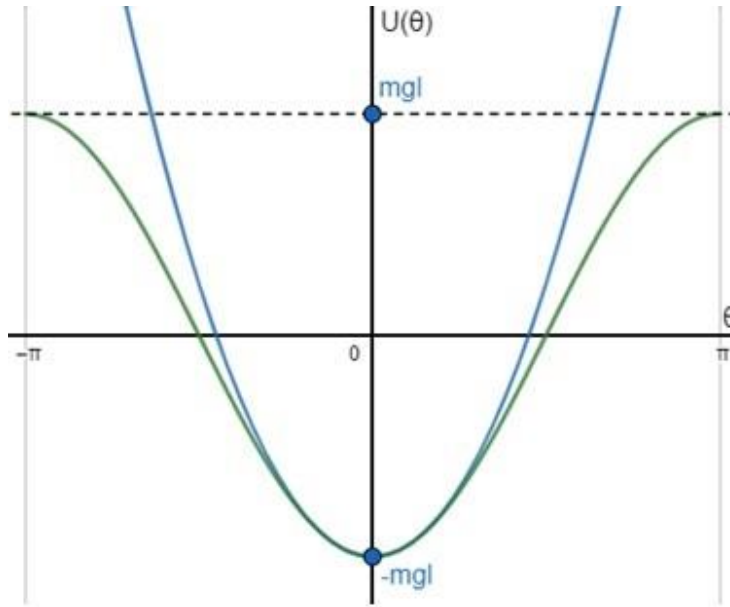
Sustav se nalazi u homogenom gravitacijskom polju te na kuglicu djeluje gravitacijska sila  $\vec{F} = mg\hat{z}$ . Potencijalna energija  $U$  dana je s

$$U = - \int F dz = -mgz = -mgl \cos \theta. \quad (4.2)$$

Za potrebu računanja lagranžijana malih titraja oko ravnotežnog položaja, potencijalnu energiju razvijamo u Taylorov red oko položaja  $\theta_0$

$$U(\theta) = -mgl \cos \theta_0 + mgl \sin \theta_0 (\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}mgl \cos \theta_0 (\theta - \theta_0)^2 + \dots \quad (4.3)$$

Za male pomake  $(\theta - \theta_0)$  su njihove veće potencije zanemarivo male pa su izostavljene iz razvoja.



Slika 4.2. Kosinusoida (zeleno linija) pokazuje pravi potencijal matematičkog njihala, dok parabola (plava linija) pokazuje aproksimaciju dobivenu razvojem u red. Sa slike je očito uz odabir  $\theta_0 = 0$  poklapanje postoji za male pomake od ravnotežnog položaja.

Dalje, računamo položaje ravnoteže. Točke ravnoteže proizlaze iz uvjeta

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow mgl \sin \theta = 0 \longrightarrow \sin \theta = 0. \quad (4.4)$$

Uvjet je u intervalu  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ispunjen za dvije točke:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi. \quad (4.5)$$

Prema slici 4.2 zaključujemo da rješenje  $\theta_1$  odgovara minimumu potencijala, odnosno točki stabilne ravnoteže, dok rješenje  $\theta_2$  odgovara maksimumu potencijala, odnosno točki nestabilne ravnoteže.

Kad je njihalo izmaknuto iz ravnotežnog položaja za mali kut  $\theta$  tada govorimo o malim pomacima

$$x = l\theta \longrightarrow \dot{x} = l\dot{\theta}. \quad (4.6)$$

$$x = l(\theta - \pi) \longrightarrow \dot{x} = l\dot{\theta}. \quad (4.7)$$

Njihalo koje je malo izmaknuto iz točke stabilne ravnoteže vratit će se u ravnotežni položaj i titrati oko njega. Njihalo koje je malo izmaknuto iz točke nestabilne ravnoteže udaljavat će se od tog položaja.

Dva slučaja obradit ćemo zasebno:

**a) Stabilna ravnoteža za  $\theta_1 = 0$**

Prema razvoju (4.3) potencijalna energija u blizini točke stabilne ravnoteže poprima oblik

$$U(\theta) \approx -mgl + \frac{1}{2}mgl\theta^2. \quad (4.8)$$

Lagranžijan malih titraja je prema (4.1) i (4.8) jednak

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2,$$

a uz zamjenu (4.6) lagranžijan postaje

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2. \quad (4.9)$$

Uvođenjem konstante  $k = \frac{mg}{l}$  lagranžijan poprima već poznat oblik (3.14)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (4.10)$$

Kutna frekvencija malih titraja njihala izmaknutog iz položaja stabilne ravnoteže je prema  $\omega = \sqrt{k/m}$  jednaka

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4.11)$$

Kutna frekvencija je realna pa se uistinu radi o titrajima oko ravnotežnog položaja. Njihalo uvijek ostaje u blizini točke ravnoteže.

**b) Nestabilna ravnoteža za  $\theta_2 = \pi$**

Prema (4.3) potencijalna energija u blizini točke nestabilne ravnoteže poprima oblik

$$U(\theta) \approx mgl - \frac{1}{2}mgl(\theta - \pi)^2. \quad (4.12)$$

Lagranžijan malih titraja je prema (4.1) i (4.12) jednak

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl(\theta - \pi)^2,$$

a uz zamjenu (4.7) lagranžijan postaje

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2. \quad (4.13)$$

Uvođenjem konstante  $k = -\frac{mg}{l}$  i ovaj lagranžijan poprima već poznat oblik (3.14)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (4.14)$$

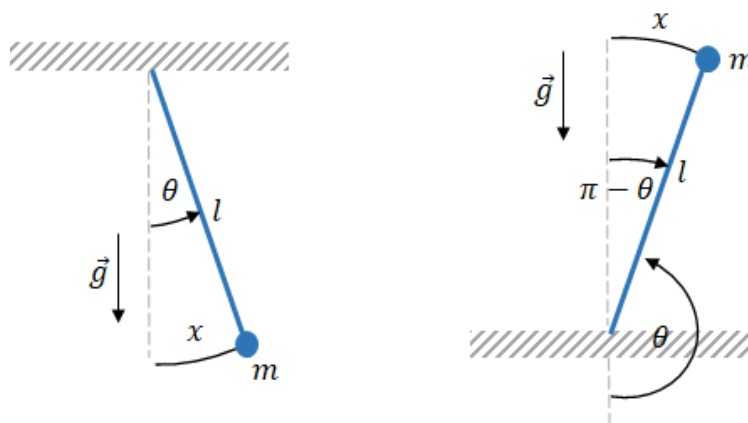
Kutna frekvencija malih titraja njihala izmaknutog iz položaja stabilne ravnoteže je prema

$\omega = \sqrt{k/m}$  jednaka

$$\omega_2 = \sqrt{-\frac{g}{l}}. \quad (4.15)$$

Kutna frekvencija je imaginarna pa se zapravo ne radi o titranju oko ravnotežnog položaja, već o udaljavanju od ravnotežnog položaja za svaki mali pomak. Jednadžba gibanja koja opisuje ubrzano udaljavanje iz točke nestabilne ravnoteže je

$$\ddot{x} = \frac{g}{l}x.$$

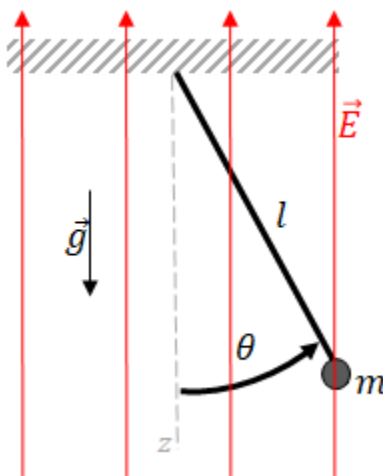


Slika 4.3. Mali pomaci njihala  $x$  iz točke stabilne ravnoteže (lijevo) i točke nestabilne ravnoteže (desno).



## Primjer 2

Analogno matematičkom njihalu koje se giba u ravnini iz prethodnog primjera, promotrit ćemo matematičko njihalo s nabijenim tijelom naboja  $q$  koje se nalazi u homogenom okomitom električnom polju iznosa  $E$  kako je prikazano na slici.



Slika 4.4. Matematičko njihalo u homogenom električnom polju.

Analogno (4.1), zaključujemo da je kinetička energija tijela

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2. \quad (4.16)$$

Ovisno o predznaku naboja kuglice na njihalu razlikujemo dva slučaja:

- tijelo je pozitivnog naboja i na tijelo djeluje električna sila  $\vec{F}_{el} = -qE\hat{z}$ ,
- tijelo je negativnog naboja i na tijelo djeluje električna sila  $\vec{F}_{el} = qE\hat{z}$ .

Dva slučaja obradit ćemo zajedno. Ukupna sila na nabijenu kuglicu je zbroj gravitacijske i električne sile

$$\vec{F} = (mg \pm qE)\hat{z}. \quad (4.17)$$

Potencijalnu energiju računamo na idući način

$$U = - \int F dz = -(mg \pm qE)z = -(mg \pm qE)l \cos \theta. \quad (4.18)$$

Uz definiranje specifičnog naboja  $q' = \frac{q}{m}$  izraz postaje

$$U = -m(g \pm q'E)l \cos \theta . \quad (4.19)$$

Točke ekstrema proizlaze iz uvjeta

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow m(g \pm q'E)l \sin \theta = 0 \longrightarrow \sin \theta = 0 . \quad (4.20)$$

Kao i u prethodnom primjeru, uvjet je ispunjen za dvije točke:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi . \quad (4.21)$$

a) **Slučaj**  $\theta_1 = 0$

Analogno (4.9) uz izmjenu (4.17) lagranžijan poprima oblik

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \frac{(g \pm q'E)}{l} x^2 . \quad (4.22)$$

Uvođenjem konstante  $k = \frac{m}{l}(g \pm q'E)$  poprima oblik jednak onom u (3.14). Kutna frekvencija malih titraja njihala je prema  $\omega = \sqrt{k/m}$  jednaka

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \pm q'E}{l}} . \quad (4.23)$$

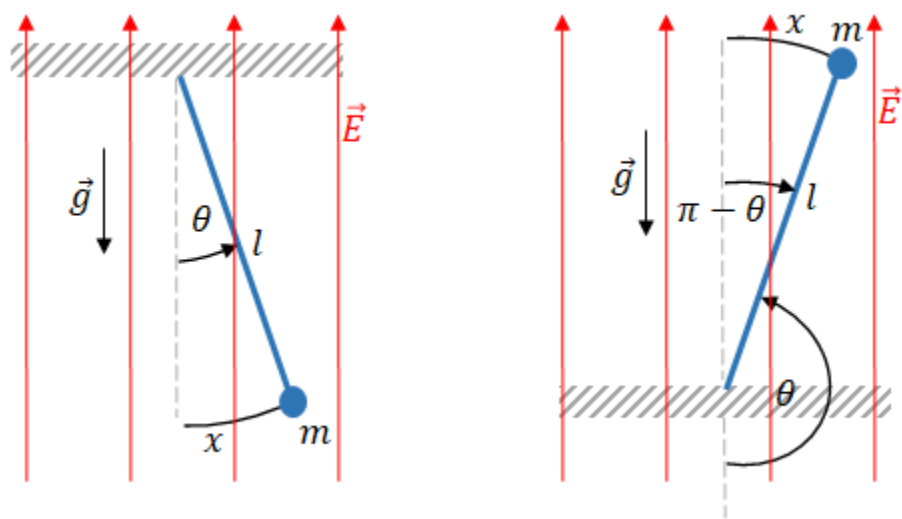
b) **Slučaj**  $\theta_2 = \pi$

Analogno (4.13) uz izmjenu (4.17) lagranžijan poprima oblik

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \frac{(g \pm q'E)}{l} x^2 . \quad (4.24)$$

Uvođenjem konstante  $k = -\frac{m}{l}(g \pm q'E)$  i ovaj lagranžijan poprima oblik jednak onom u (3.14). Kutna frekvencija malih titraja njihala je

$$\omega_2 = \sqrt{-\frac{g \pm q'E}{l}} . \quad (4.25)$$


 Slika 4.5. Mali pomaci  $x$  iz točaka ekstrema za matematičko njihalo u električnom polju.

Ishodi slučajeva ovise o više čimbenika (priroda naboja kuglice, omjer gravitacijske i električne sile) pa su stoga pregledno razrađeni u tablici ispod.

	pozitivan naboj ( $q > 0$ )	negativan naboj ( $q < 0$ )
$\theta_1 = 0$	$q'E < g \rightarrow$ STABILNA $q'E > g \rightarrow$ NESTABILNA	uvijek STABILNA
$\theta_2 = \pi$	$q'E < g \rightarrow$ NESTABILNA $q'E > g \rightarrow$ STABILNA	uvijek NESTABILNA

Tablica 1.1. Poredak stabilnih i nestabilnih ravnoteža za točke ekstrema ovisno o predznacima naboja kuglice i omjerima iznosa sile koje na nju djeluju.

### Primjer 3

Čestica mase  $m$  nalazi se u polju potencijalne energije opisane funkcijom

$$U(x) = bx^4 - ax^2, \quad a, b > 0.$$

Da bismo pronašli ekstreme i moguće točke stabilne ravnoteže, prvo pronalazimo prvu derivaciju

$$\frac{dU}{dx} = 4bx^3 - 2ax. \quad (4.26)$$

Za jednadžbu

$$x(2a - 4bx^2) = 0 \quad (4.27)$$

pronalazimo tri rješenja

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a}{2b}}, \quad x_3 = 0, \quad (4.28)$$

u kojima potencijalna energija ima ekstreme.

Druga derivacija potencijalne energije je

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 12bx^2 - 2a \quad (4.29)$$

pa proizlazi da za  $x_{1,2}$  potencijalna energija ima minimum

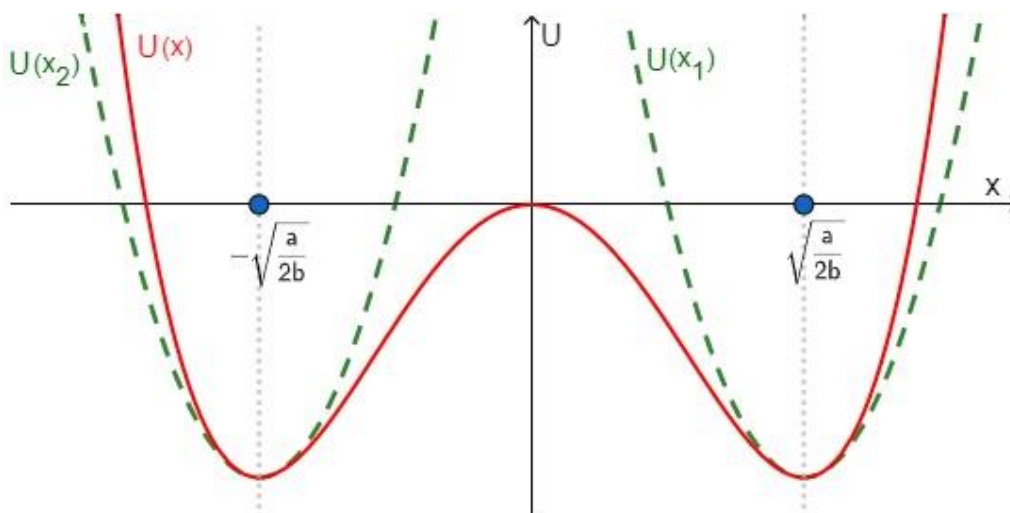
$$\frac{d^2U}{dx^2} = 4a > 0, \quad (4.30)$$

a za  $x_3$  potencijalna energija ima maksimum

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -2a < 0. \quad (4.31)$$

U točkama minimuma potencijalne energije čestica se nalazi u stabilnoj ravnoteži pa funkciju potencijalne energije razvijamo u Taylorov red oko tih točaka

$$U(x_{1,2}) = -\frac{a^2}{4b} + \sqrt{\frac{2a^3}{b}} \left(x \pm \sqrt{\frac{a}{2b}}\right) + 2a \left(x \pm \sqrt{\frac{a}{2b}}\right)^2 + \dots \quad (4.32)$$



Slika 4.6. Funkcija  $U(x)$  (crvena linija) opisuje potencijal u blizini točaka ekstrema. U točki  $x = 0$  ravnoteža je nestabilna. Oko točaka stabilne ravnoteže potencijal je razvijen u Taylorov red (funkcije  $U(x_1)$  i  $U(x_2)$  prikazane su zelenim linijama).

Definiramo male pomake u odnosu na položaj ravnoteže i njihovu prvu derivaciju

$$\xi = x \pm \sqrt{\frac{a}{2b}}, \quad \dot{\xi} = \dot{x}. \quad (4.33)$$

U razvoju potencijalne energije izostavljamo prvi član jer je definiran do na konstantu te od preostalih članova zadržavamo drugu derivaciju, a uzimajući u obzir definirane male pomake (4.33) potencijalna energija je u blizini točke stabilne ravnoteže aproksimirana s

$$U = 2a \xi^2. \quad (4.34)$$

Kinetička energija čestice mase  $m$  koja se kreće u navedenom potencijalu je dana s

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2. \quad (4.35)$$

Lagranžijan malih titraja je prema (4.34) i (4.35) dan s

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 - 2a \xi^2. \quad (4.36)$$

Prema (3.17) jednačina gibanja glasi

$$\ddot{\xi} + \frac{4a}{m} \xi = 0, \quad (4.37)$$

a iz (3.19) zaključujemo da je frekvencija malih titraja u točkama stabilne ravnoteže

$$\omega = 2\sqrt{\frac{a}{m}}. \quad (4.38)$$

### Primjer 4

Čestica mase  $m$  nalazi se u polju potencijalne energije opisane funkcijom

$$U(x) = A \cos(\alpha x) + Bx, \quad 0 \leq \alpha x \leq 2\pi. \quad (4.39)$$

Prva i druga derivacija potencijalne energije su redom

$$\frac{dU}{dx} = -A\alpha \sin(\alpha x) + B, \quad (4.40)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -A\alpha^2 \cos(\alpha x). \quad (4.41)$$

Ekstrem funkcije određuje se tako da se prva derivacija izjednači s nulom te prema jednadžbi

$$\sin(\alpha x_0) = \frac{B}{A\alpha} \equiv C \rightarrow \sin(\alpha x_0) > 0 \quad (4.42)$$

postavljamo uvjet za postojanje točke ekstrema u  $\alpha x_0$

$$|C| < 1 \rightarrow B < A\alpha. \quad (4.43)$$

Da bismo u ekstremima imali minimum, odnosno točke stabilne ravnoteže, druga derivacija mora biti pozitivna.

$$-A\alpha^2 \cos(\alpha x_0) > 0 \rightarrow \cos(\alpha x_0) < 0. \quad (4.44)$$

Prema (4.42) i (4.44) rješenja se nalaze u intervalu drugom kvadrantu pa su stabilne točke ravnoteže one za koje vrijedi

$$\frac{\pi}{2} < \alpha x_0 < \pi. \quad (4.45)$$

Potencijalnu energiju razvijamo u Taylorov red oko točke stabilne ravnoteže  $x_0$

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (4.46)$$

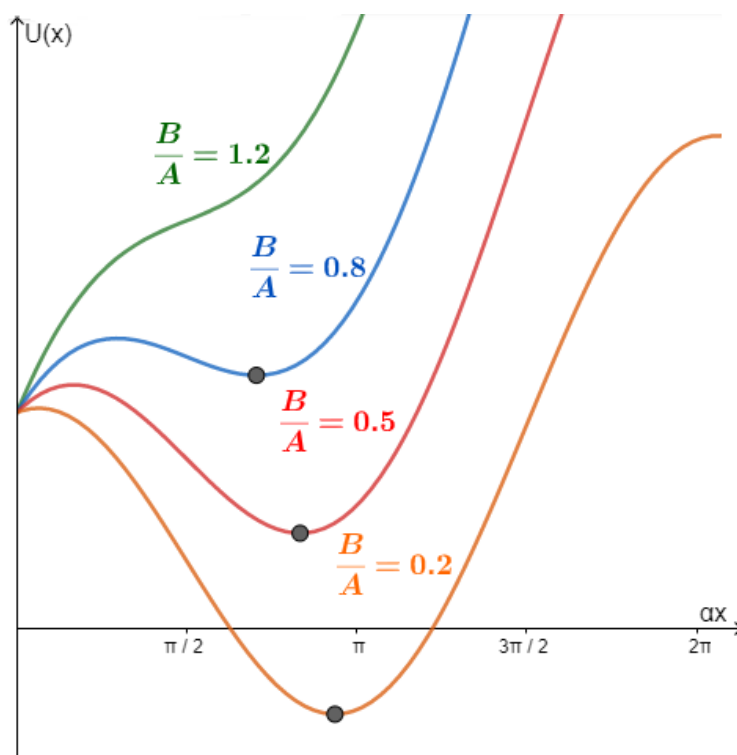
Prvi član zanemarujemo jer je definiran na konstantu, prva derivacija po definiciji iščezava za točke ekstrema, pa je prvi član različit od nule koji uzimamo u obzir druga derivacija

$$U(x) \approx -\frac{1}{2}A\alpha^2 \cos(\alpha x_0) (x - x_0)^2. \quad (4.47)$$

Funkciju kosinus izrazit ćemo pomoću funkcije sinus koristeći trigonometrijski identitet prema kojem je

$$\cos(\alpha x_0) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\alpha x_0)} \quad (4.48)$$

u kojem ćemo odabrati negativan predznak jer se prema (4.45) kut nalazi u drugom kvadrantu u kojem su kosinus i sinus suprotnih predznaka (sinus poprima pozitivne vrijednosti, a kosinus negativne).



Slika 4.7. Grafički je prikazan potencijal za neke vrijednosti omjera parametara  $B/A$ . Prema uvjetu, točka ekstrema postoji samo kad je omjer  $B/(A\alpha)$  manji od 1.

Definiramo male pomake

$$\xi = x - x_0, \quad \dot{\xi} = \dot{x} \quad (4.49)$$

te uz (4.47), (4.48) i (4.49) aproksimacija potencijalna energija postaje

$$U(x) = \frac{1}{2} A\alpha^2 \sqrt{1 - \sin^2(\alpha x_0)} \xi^2 = \frac{1}{2} A\alpha^2 \sqrt{1 - C^2} \xi^2. \quad (4.50)$$

Lagranžijan je

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} A\alpha^2 \sqrt{1 - C^2} \xi^2, \quad (4.51)$$

a prema (3.17) jednažba gibanja je

$$m\ddot{\xi} + A\alpha^2 \sqrt{1 - C^2} \xi = 0. \quad (4.52)$$

Kvadrat frekvencije malih titraja oko ravnotežnog položaja je prema (3.19) jednak

$$\omega^2 = \frac{A\alpha^2 \sqrt{1 - C^2}}{m} = \frac{A\alpha^2}{m} \sqrt{1 - \left(\frac{B}{A\alpha}\right)^2}. \quad (4.53)$$



## Primjer 5

Čestica mase  $m$  nalazi se u polju potencijalne energije opisane funkcijom

$$U(x) = \frac{ax^4}{x^2 + b}, \quad a, b > 0. \quad (4.54)$$

Izjednačavanjem prve derivacije potencijalne energije s nulom pronalazimo točku ekstema

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{2ax^3(x^2 + 2b)}{(x^2 + b)^2}, \quad (4.55)$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x_0 = 0. \quad (4.56)$$

Prirodu ekstrema određuju više derivacije. Za drugu derivaciju

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = \frac{2ax^2(x^4 + 3bx^2 + 6b^2)}{(x^2 + b)^3} \quad (4.57)$$

vrijedi

$$\left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x_0=0} = 0 \quad (4.58)$$

pa za određivanje prirode ekstrema moramo računati više derivacije potencijalne energije.

$$\frac{d^3U(x)}{dx^3} = \frac{-24ab^2x(x^2 - b)}{(x^2 + b)^4} \Rightarrow \left. \frac{d^3U(x)}{dx^3} \right|_{x_0=0} = 0 \quad (4.59)$$

$$\frac{d^4U(x)}{dx^4} = \frac{24ab^2(5x^4 - 10abx^2 + b^2)}{(x^2 + b)^5} \Rightarrow \left. \frac{d^4U(x)}{dx^4} \right|_{x_0=0} = 24ab^2 > 0. \quad (4.60)$$

Prema (4.60) zaključujemo da je točka  $x_0 = 0$  minimum potencijalne energije te predstavlja položaj stabilne ravnoteže. Za mali pomak od ravnotežnog položaja  $x - x_0$  čestica će titrati, ali njeno titranje neće biti harmoničko.

Razvijmo potencijal u Taylorov red oko točke  $x_0 = 0$  do prvog člana različitog od nule

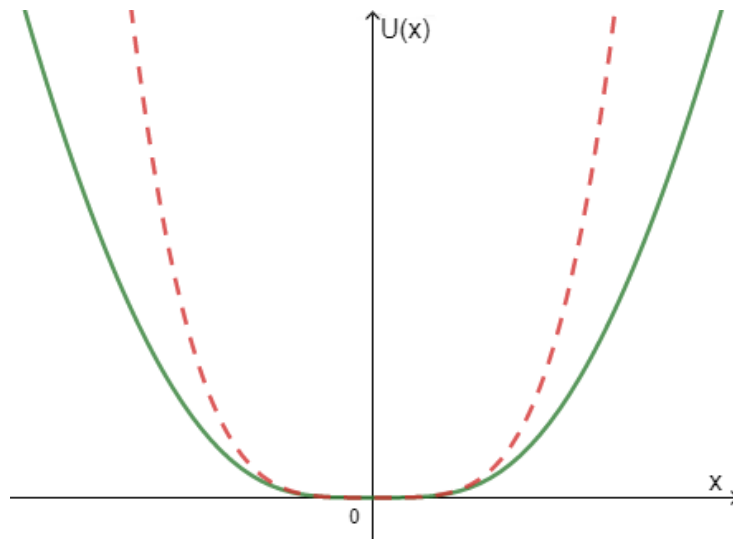
$$\begin{aligned}
 U(x) = U(x_0) + \frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2U(x)}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 \\
 + \frac{1}{3!} \frac{d^3U(x)}{dx^3} \Big|_{x_0} (x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} \frac{d^4U(x)}{dx^4} \Big|_{x_0} (x - x_0)^4 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.61}$$

Uzimajući u obzir vrijednosti derivacija u točki  $x_0$  (4.56), (4.58) i (4.60) te definirajući male pomake kao

$$\xi = x - x_0, \quad \dot{\xi} = \dot{x}
 \tag{4.62}$$

potencijal možemo aproksimirati s

$$U(x) = \frac{a}{b} \xi^4.
 \tag{4.63}$$



Slika 4.8. Zelena linija pokazuje točan potencijal u blizini točke ekstrema. Crvena isprekidana linija pokazuje aproksimaciju, koja se u blizini točke ekstrema podudara s pravim potencijalom.

Kinetička energija čestice je

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 \quad (4.64)$$

pa za lagranžijan malih titraja vrijedi

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 - \frac{a}{b} \xi^4. \quad (4.65)$$

Titranje nije harmoničko pa ćemo promotriti zakon očuvanja energije čestice u zadanom potencijalu. Ukupna energija čestice  $E$  očuvana je i jednaka je  $E = T + U$  u svakoj točki titranja. Za ravnotežni položaj vrijedi da je  $U(x) = 0$ , pa je  $E = T$ . Analogno, za amplitudni položaj vrijedi  $T = 0$  pa je

$$E = U(A) = \frac{a}{b} A^4 \quad (4.66)$$

gdje smo s  $A$  obilježili amplitudu.

Prema (4.66) zakon očuvanja energije možemo pisati na idući način

$$\frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{a}{b} \xi^4 = \frac{a}{b} A^4. \quad (4.67)$$

Zapišimo  $\dot{\xi}$  kao  $\frac{d\xi}{dt}$  i izlučimo

$$\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\frac{2a}{mb} (A^4 - \xi^4)}. \quad (4.68)$$

Za vremenski diferencijal  $dt$  vrijedi

$$dt = \sqrt{\frac{mb}{2a}} \frac{d\xi}{\sqrt{A^4 - \xi^4}}. \quad (4.69)$$

Ako s  $T$  označimo period titranja, čestica za  $T/4$  stigne iz ravnotežnog položaja u amplitudni pa za granice integracije odabiremo iduće

$$\int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{mb}{2a}} \int_0^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^4 - \xi^4}}. \quad (4.70)$$

Integral s desne strane znaka jednakosti nije tablični pa ga svodimo na beta funkciju<sup>3</sup> uz zamjene

$$\int_0^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^4 - \xi^4}} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{\xi}{A} \\ dt = \frac{d\xi}{A} \end{array} \right| = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \left| \begin{array}{l} u = t^4 \\ du = 4t^3 dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4A} \int_0^1 \frac{du}{u^{3/4} \sqrt{1-u}} = \frac{1}{4A} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}. \quad (4.71)$$

Integral (4.70) onda postaje

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{mb}{2a}} \frac{1}{4A} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}. \quad (4.72)$$

Uz poznatu vrijednost  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  pronalazimo traženi period

$$T = \frac{\sqrt{\pi}}{A} \sqrt{\frac{mb}{2a}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \quad (4.73)$$

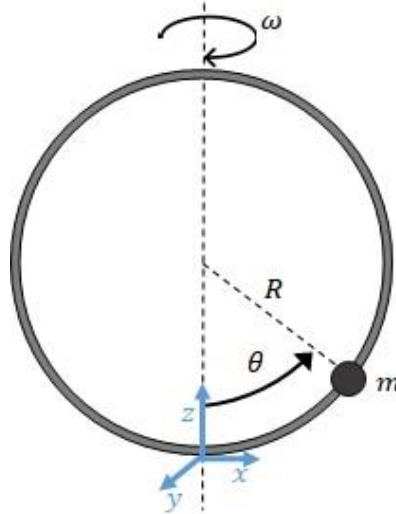
koji zbog neharmoničnosti titranja ovisi o amplitudi  $A$ .

---

<sup>3</sup> Gama i beta funkcije imaju brojne primjene, a mogu se koristiti za izračunavanje integrala koji se ne mogu riješiti nekom od uobičajenih metoda. U navedenom primjeru je za integral oblika  $\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$  rješenje dano s  $\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ , gdje  $\Gamma$  predstavlja gama funkciju.

## Primjer 6

Čestica mase  $m$  giba se po kružnoj petlji polumjera  $R$  bez trenja. Petlja se okreće oko okomite osi simetrije koja leži u ravnini petlje stalnom kružnom brzinom  $\omega$ .



Slika 4.9. Čestica je izmaknuta iz najnižeg položaja za kut  $\theta$  uzduž rotirajuće kružne petlje. Najniži položaj odabran je kao referentna točka za gravitacijsku potencijalnu energiju.

Slučaj iz primjera promatrat ćemo iz sustava čestice. Položaj čestice prikazane na slici opisujemo sfernim koordinatama

$$x = R \sin \theta \cos \omega t, \quad y = R \sin \theta \sin \omega t, \quad z = R (1 - \cos \theta). \quad (4.74)$$

Kinetička energija je

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (4.75)$$

Deriviranjem i kvadriranjem Kartezijevih koordinata dobivamo

$$T = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 \theta). \quad (4.76)$$

Drugi član u izrazu za kinetičku energiju može se tumačiti kao potencijal cetripetalne sile

$$u_{cp} = \frac{m}{2} \omega^2 R^2 \sin^2 \theta = \frac{m}{2} \omega^2 \rho^2, \quad (4.77)$$

$$f_{cp} = -\frac{du_{cp}}{d\rho} = -m\omega^2 \rho, \quad (4.78)$$

gdje  $\rho$  predstavlja okomicu povučenu od položaja čestice do osi vrtnje kružne petlje, odnosno polumjer kruženja čestice u  $x$ - $y$  ravnini. Negativan predznak implicira da je centripetalna sila orijentirana prema središtu te vrtnje.

Potencijalna energija u odnosu na odabranu referentnu točku je

$$U = mgz = mgR (1 - \cos \theta). \quad (4.79)$$

Lagranžijan je

$$L = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} R^2 \omega^2 \sin^2 \theta - mgR (1 - \cos \theta), \quad (4.80)$$

a jednadžbu gibanja dobivamo primjenom Euler-Lagrangeove jednadžbe

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (4.81)$$

$$mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta = 0. \quad (4.82)$$

Dobivena jednadžba gibanja opisana je jednom poopćenom koordinatom, ali nije linearizirana. Da bismo dobili jednadžbu koja opisuje harmonička titranja oko točaka stabilne ravnoteže prvo ćemo na temelju jednadžbe gibanja (4.82) definirati efektivnu potencijalnu energiju (centripetalne i gravitacijske sile)

$$mR^2 \ddot{\theta} + \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{mR^2 \omega^2}{2} \sin^2 \theta - mgR \cos \theta \right) = 0. \quad (4.83)$$

Iz gornjeg izraza zaključujemo da je efektivna potencijalna energija

$$U_{ef} = -\frac{mR^2 \omega^2}{2} \sin^2 \theta - mgR \cos \theta \quad (4.84)$$

pa je novi lagranžijan sada dan s

$$L = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 - U_{ef}. \quad (4.85)$$

Pronađimo prvu derivaciju efektivne potencijalne energije

$$\frac{dU_{ef}}{d\theta} = -mR^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta \quad (4.86)$$

i izjednačimo ju s nulom

$$\sin \theta \left( \cos \theta - \frac{g}{R\omega^2} \right) = 0. \quad (4.87)$$

Rješavanjem trigonometrijske jednadžbe u intervalu  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  pronalazimo tri ekstrema.

Iz  $\sin \theta = 0$  zaključujemo

$$\theta_0^{(1)} = 0, \quad \theta_0^{(2)} = \pi, \quad (4.88)$$

a iz  $\cos \theta = \frac{g}{R\omega^2}$  proizlazi

$$\theta_0^{(3)} = \cos^{-1} \frac{g}{R\omega^2}. \quad (4.89)$$

Prirodu i uvjete ekstrema odredit će druga derivacija potencijalne energije

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = -mR^2 \omega^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta \quad (4.90)$$

koju ćemo zbog specifičnosti ekstrema  $\theta_0^{(3)}$  svesti potpuno na funkciju kosinus uz  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = -mR^2 \omega^2 (2\cos^2 \theta - 1) + mgR \cos \theta. \quad (4.91)$$

Slučajevi po ekstremima su:

1) **Ekstrem**  $\theta_0^{(1)} = 0$

$$\left. \frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} \right|_{\theta_0^{(1)}} = -mR^2 \omega^2 + mgR. \quad (4.92)$$

Priroda ekstrema ovisi o predznaku druge derivacije pa razlikujemo dva moguća ishoda:

$$-mR^2 \omega^2 + mgR > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega < \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{stabilna ravnoteža}, \quad (4.93)$$

$$-mR^2 \omega^2 + mgR < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{nestabilna ravnoteža}. \quad (4.94)$$

2) **Ekstrem**  $\theta_0^{(2)} = \pi$

$$\left. \frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} \right|_{\theta_0^{(2)}} = -mR^2\omega^2 - mgR. \quad (4.95)$$

Za ovu točku ekstrema druga derivacija je uvijek negativna pa vrijedi da je ravnoteža uvijek nestabilna, neovisno o iznosu kružne brzine.

3) **Ekstrem**  $\theta_0^{(3)} = \cos^{-1} \frac{g}{R\omega^2}$

Da bi ovaj položaj ravnoteže postojao mora vrijediti da je

$$0 \leq \frac{g}{R\omega^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (4.96)$$

Izračunajmo drugu derivaciju u toj točki

$$\left. \frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} \right|_{\theta_0^{(3)}} = mR^2\omega^2 - \frac{mg^2}{\omega^2} \quad (4.97)$$

iz čega na temelju uvjeta (4.96) zaključujemo da se radi o položaju stabilne ravnoteže za uvjetovane vrijednosti kružne brzine.

Definirajmo pobliže mali pomak  $\phi$  i njegovu prvu derivaciju

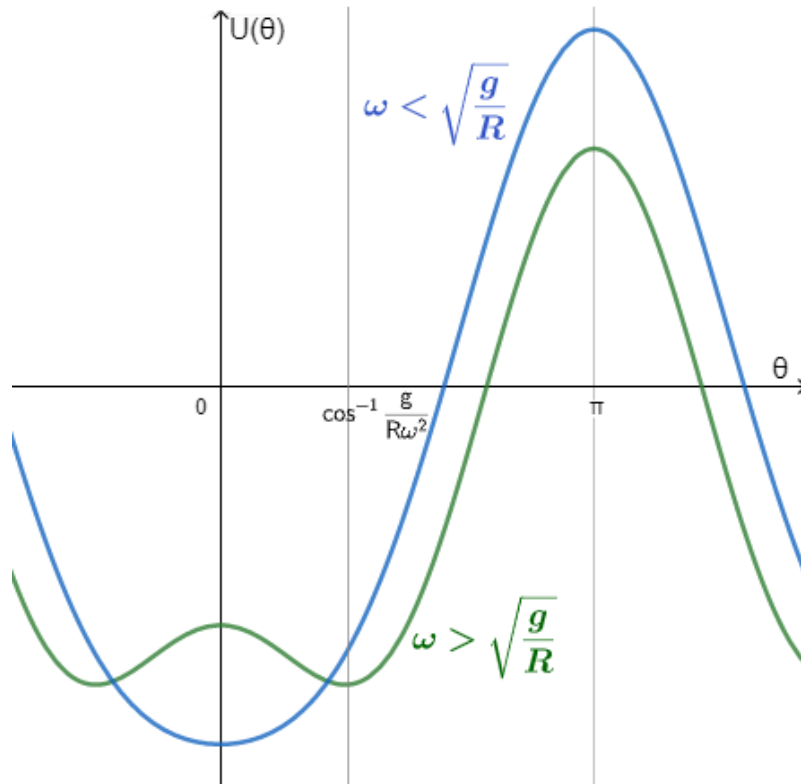
$$\phi = \theta - \theta_0, \quad \dot{\phi} = \dot{\theta}. \quad (4.98)$$

Kad petlja miruje ( $\omega = 0$ ) čestica se nalazi u položaju  $\theta = 0$ , a ako ju izmaknemo za maleni kut  $\phi$  ona će se vraćati u početni položaj i titrati oko njega. Isto vrijedi i za male iznose kružne brzine.

Kad kružna brzina ima iznos  $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$  položaj  $\theta = 0$  više nije stabilan, a čestica se pomiče prema položaju  $\theta = \cos^{-1} \frac{g}{R\omega^2}$  oko kojeg će titrati kad ju iz tog položaja pomaknemo za maleni kut  $\phi$ .

Za sve iznose kružne brzine položaj  $\theta = \pi$  je točka nestabilne ravnoteže. Ako se čestica nađe u tom položaju, za svaki infitezimalno mali pomak čestica će se sve više udaljavati od tog položaja.





Slika 4.10. Prikazan je graf efektivnog potencijala za dva slučaja iznosa kružne brzine  $\omega$ . Plava linija pokazuje kako je za male iznose kutne brzine točka stabilne ravnoteže položaj opisan s  $\theta = 0$ . Zelena linija pokazuje kako je za veće iznose kružne brzine položaj stabilni položaj  $\theta = 0$  nestabilan, a stabilni položaj je dan s  $\theta = \cos^{-1} \frac{g}{R\omega}$ . Za sve iznose kružne brzine je položaj  $\theta = \pi$  nestabilan.

Sad razvijmo efektivnu potencijalnu energiju u Taylorov red oko dvaju mogućih položaja stabilne ravnoteže. Prvi član je definiran do na konstantu, drugi iščezava zbog uvjeta za ekstrem, pa se zadržavamo na trećem članu razvoja

$$U_{ef} \approx \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 U_{eff}}{d\theta^2} \right|_{\theta_0} (\theta - \theta_0)^2. \quad (4.99)$$

Razdijelimo jednadžbe malih titraja na dva slučaja, za dvije moguće točke stabilne ravnoteže:

1) titranje oko položaja  $\theta_0 = 0$  opisano je lagranžijanom

$$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (-mR^2 \omega^2 + mgR) \phi^2. \quad (4.100)$$

Prema (3.17) pripadajuća jednadžba gibanja je

$$\ddot{\phi} + \left( \frac{g}{R} - \omega^2 \right) \phi = 0. \quad (4.101)$$

Jednadžba se svodi na diferencijalnu jednadžbu harmoničkog oscilatora iz koje možemo iščitati frekvenciju malih titranja oko položaja ravnoteže

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}. \quad (4.102)$$

2) titranje oko položaja  $\theta_0 = \cos^{-1} \frac{g}{R\omega^2}$  opisano je lagranžijanom

$$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \left( mR^2 \omega^2 - \frac{mg^2}{\omega^2} \right) \phi^2. \quad (4.103)$$

Prema (3.17) jednadžba gibanja je

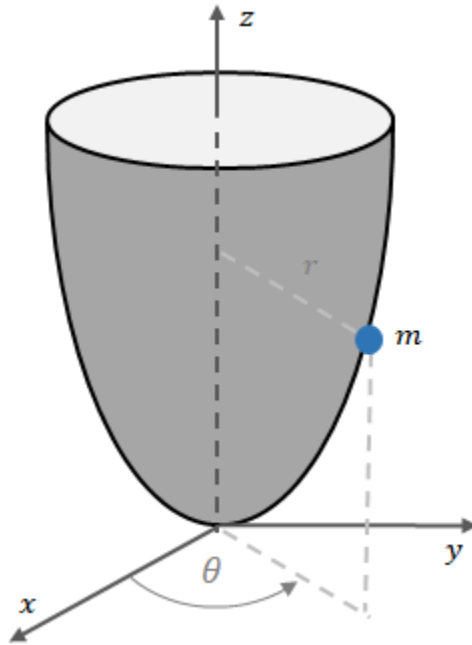
$$\ddot{\phi} + \left( \omega^2 - \frac{g^2}{R^2 \omega^2} \right) \phi = 0. \quad (4.104)$$

Frekvencija malih titraja oko položaja ravnoteže je

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{R^2 \omega^2}}. \quad (4.105)$$

## Primjer 7

Čestica mase  $m$  giba se unutar paraboloida opisanog jednađbom  $z = c(x^2 + y^2)$  po stalnoj kružnoj putanji polumjera  $r_0$ .



Slika 4.11. Čestica unutar paraboloida.

Prikažimo položaj čestice u polarnim koordinatama

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = cr^2. \quad (4.106)$$

Komponente brzine su

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{z} = 2cr\dot{r} \quad (4.107)$$

pa je kinetička energija čestice u polarnim koordinatama dana s

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4c^2r^2\dot{r}^2). \quad (4.108)$$

Potencijalna energija čestice je

$$U = mgcr^2. \quad (4.109)$$

Definiramo lagranžijan

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4c^2r^2\dot{r}^2) - mgcr^2. \quad (4.110)$$

Potrebne derivacije za Euler-Lagrangeovu jednadžbu gibanja su

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}(1 + 4r^2c^2), \quad (4.111)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{r}(1 + 4r^2c^2) + 8mr\dot{r}^2c^2, \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 + 4mc^2r\dot{r}^2 - 2mgcr, \quad (4.113)$$

a jednadžba gibanja je

$$m\ddot{r}(1 + 4r^2c^2) + 4mr\dot{r}^2c^2 - m\dot{\theta}^2 - 2mgc = 0. \quad (4.114)$$

Da bismo jednadžbu sveli na jednodimenzionalni problem definiramo kutnu količinu gibanja  $p_\theta$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad (4.115)$$

pa jednadžba gibanja poprima oblik

$$m\ddot{r}(1 + 4r^2c^2) + 4mr\dot{r}^2c^2 - \frac{p_\theta^2}{mr^3} + 2mgcr = 0. \quad (4.116)$$

Nadalje, prikazat ćemo jednadžbu na idući način

$$m\ddot{r}(1 + 4r^2c^2) + 4mr\dot{r}^2c^2 + \frac{d}{dr}\left(\frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgcr^2\right) = 0 \quad (4.117)$$

te definirati efektivnu potencijalnu energiju u kojem se čestica giba

$$U_{eff} = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgcr^2. \quad (4.118)$$

Da bismo pronašli ekstreme i ispitali njihovu prirodu pronaći ćemo derivacije efektivne potencijalne energije.

Prva derivacija je

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + 2mgcr, \quad (4.119)$$

a izjednačavanjem prve derivacije s nulom pronalazimo da je

$$\frac{p_\theta^2}{mr^3} = 2mgcr \rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{p_\theta^2}{2m^2gc}} \equiv r_0 \quad (4.120)$$

položaj ravnoteže. Prirodu tog položaja saznat ćemo preko druge derivacije efektivne potencijalne energije

$$\frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} = \frac{3p_\theta^2}{mr^4} + 2mgc, \quad (4.121)$$

a uvrštavajući izraz (4.115) u drugu derivaciju dobivamo da je

$$\frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} = 8mgc > 0. \quad (4.122)$$

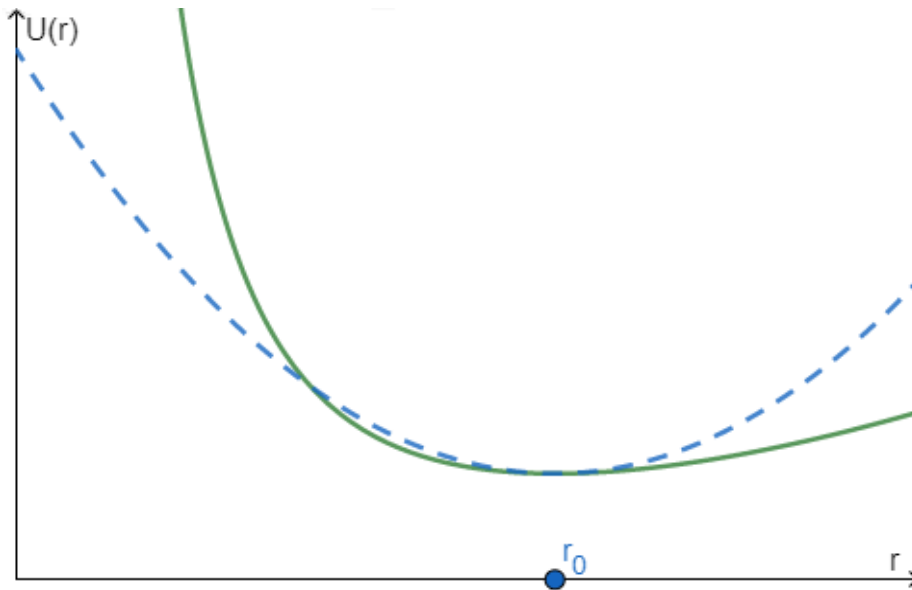
Zaključujemo da položaj (4.120) predstavlja stabilnu ravnotežu. Tijelo će za male pomake

$$\rho = r - r_0, \quad \dot{\rho} = \dot{r}, \quad \ddot{\rho} = \ddot{r} \quad (4.123)$$

titrati oko tog položaja.

Razvijmo efektivnu potencijalnu energiju u red oko položaja stabilne ravnoteže

$$U_{ef} = U_0 + \left. \frac{dU_{eff}}{dr} \right|_{r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} \right|_{r_0} (r - r_0)^2 + \dots \quad (4.124)$$



Slika 4.12. Egzaktni potencijal je funkcija sastavljena od člana proporcionalnog s  $1/r^2$  i člana proporcionalnog s  $r^2$  (prikazano punom zelenom linijom). U blizini točke ravnoteže aproksimacija je prikazana isprekidanom plavom linijom.

Prvi član razvoja zanemarujemo jer je definiran do na konstantu, drugi član razvoja iščezava po definiciji položaja ravnoteže, pa efektivnu potencijalnu energiju u blizini položaja ravnoteže aproksimiramo s

$$U_{ef} \approx \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} \right|_{r_0} (r - r_0)^2, \quad (4.125)$$

a uz (4.122) i (4.123) dobivamo

$$U_{ef} = 4mgc\rho^2. \quad (4.126)$$

Jednadžba gibanja uz (4.117) i (4.126) postaje

$$m\ddot{\rho} (1 + 4(\rho + r_0)^2 c^2) + 4m(\rho + r_0)\dot{\rho}^2 c^2 + 8mgc\rho = 0, \quad (4.127)$$

a uzimajući u obzir aproksimacije  $\dot{\rho}^2 \approx 0$  i  $(\rho + r_0)^2 \approx r_0^2$  jednadžbu svodimo na linearizirani oblik

$$\ddot{\rho} + \left( \frac{8gc}{1 + 4r_0^2 c^2} \right) \rho = 0. \quad (4.128)$$

Iz izraza u zagradi definiramo frekvenciju malih titraja oko ravnotežnog položaja

$$\omega = \sqrt{\frac{8gc}{1 + 4r_0^2 c^2}}. \quad (4.129)$$

### Primjer 8

Dvije čestice jednakih masa  $m$  imaju potencijalnu energiju vanjskog potencijala  $U_V$  i potencijalnu energiju međudjelovanja  $U_M$ .

$$U_V = U_0 \frac{x^4}{b^4} \qquad U_M = -U_0 \frac{(x_1 - x_2)^2}{a^2}$$

Pronađimo točke stabilne ravnoteže i lagranžijan malih titraja oko tih točaka.

Krenimo od potencijalne energije za obje čestice pojedinačno:

$$U_1 = U_0 \frac{x_1^4}{b^4} - U_0 \frac{(x_1 - x_2)^2}{a^2},$$

$$U_2 = U_0 \frac{x_2^4}{b^4} - U_0 \frac{(x_1 - x_2)^2}{a^2}.$$

Ukupna potencijalna energija je

$$U = U_0 \frac{x_1^4}{b^4} + U_0 \frac{x_2^4}{b^4} - U_0 \frac{(x_1 - x_2)^2}{a^2}$$

$$U = U_0 \left( \frac{x_1^4}{b^4} + \frac{x_2^4}{b^4} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{a^2} \right). \quad (4.130)$$

Prve derivacije potencijalne energije po prostornim koordinatama su redom

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = U_0 \left[ \frac{4}{b^4} x_1^3 - \frac{2}{a^2} (x_1 - x_2) \right], \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = U_0 \left[ \frac{4}{b^4} x_2^3 + \frac{2}{a^2} (x_1 - x_2) \right],$$

a izjednačavanjem prve derivacije s nulom dobivamo sustav dviju jednadžbi kojima su rješenja

$$x_1 = \pm \frac{b^2}{a} \quad i \quad x_2 = \mp \frac{b^2}{a}. \quad (4.131)$$

Drugom derivacijom potencijalne energije u tim točkama utvrdit ćemo prirodu ekstrema. Za potrebe hesijana računamo

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right|_0 = U_0 \left( \frac{12}{b^4} x_1^2 - \frac{2}{a^2} \right) \Big|_0 = \frac{10}{a^2} U_0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right|_0 = U_0 \left( \frac{12}{b^4} x_2^2 - \frac{2}{a^2} \right) \Big|_0 = \frac{10}{a^2} U_0.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{2}{a^2} U_0$$

pa je determinanta matrice hesijan jednaka

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{10}{a^2} U_0 & \frac{2}{a^2} U_0 \\ \frac{2}{a^2} U_0 & \frac{10}{a^2} U_0 \end{vmatrix} = \frac{96}{a^2} U_0. \quad (4.132)$$

Uvjeti za minimume  $H > 0$  i  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$  su zadovoljeni, pa točke (4.131) predstavljaju položaje stabilne ravnoteže.

Ako tijelo malo izmaknemo iz položaja stabilne ravnoteže za  $\xi$ , ono će titrati oko te točke. Definiramo male pomake iz položaja ravnoteže

$$\xi_1 = x_1 - x_1^{(0)}, \quad \xi_2 = x_2 - x_2^{(0)} \quad (4.133)$$

kao i njihove pripadajuće prve derivacije

$$\dot{\xi}_1 = \dot{x}_1, \quad \dot{\xi}_2 = \dot{x}_2. \quad (4.134)$$



Potencijalnu energiju (4.130) razvijamo koristeći Taylorov razvoj funkcije dviju varijabli oko točka stabilne ravnoteže koristeći oznake za male pomake (4.133) i (4.134)

$$\begin{aligned}
 U(\xi_1, \xi_2) = & U(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + \left. \frac{\partial U}{\partial x_1} \right|_0 \xi_1 + \left. \frac{\partial U}{\partial x_2} \right|_0 \xi_2 \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right|_0 \xi_1^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_0 \xi_1 \xi_2 + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right|_0 \xi_2^2 \right].
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

Prvi izraz u razvoju zanemarujemo jer je definiran do na konstantu. Prve derivacije iščezavaju zbog definicije točka ravnoteže. U razvoju preostaje

$$U(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right|_0 \xi_1^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_0 \xi_1 \xi_2 + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right|_0 \xi_2^2 \right]. \tag{4.136}$$

Uvrštavanjem drugih derivacija u prethodni izraz dobivamo

$$U(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \left[ \frac{10}{a^2} U_0 \xi_1^2 + 2 \frac{2}{a^2} U_0 \xi_1 \xi_2 + \frac{10}{a^2} U_0 \xi_2^2 \right] \tag{4.137}$$

$$U(\xi_1, \xi_2) = \frac{5}{a^2} U_0 \xi_1^2 + \frac{2}{a^2} U_0 \xi_1 \xi_2 + \frac{5}{a^2} U_0 \xi_2^2. \tag{4.138}$$

Kinetička energija dviju čestica je jednaka

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2, \tag{4.139}$$

a koristeći prve derivacije malih pomaka (4.134) izraz postaje

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{\xi}_2^2. \tag{4.140}$$

Lagranžijan malih titraja dviju čestica oko točke ravnoteže je

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{\xi}_2^2 - \frac{5}{a^2} U_0 \xi_1^2 - \frac{2}{a^2} U_0 \xi_1 \xi_2 - \frac{5}{a^2} U_0 \xi_2^2. \quad (4.141)$$

Pronađimo jednađbe gibanja. Uvrstimo dobiveni lagranžijan u Euler-Lagrangeovu jednađbu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Za  $i = 1$  dobivamo

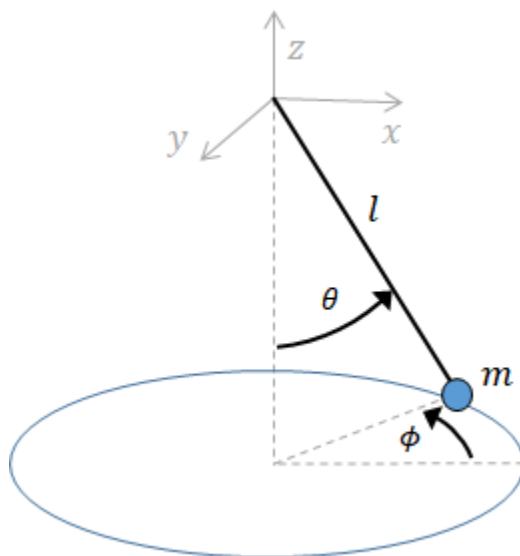
$$\ddot{\xi}_1 + \frac{10 U_0}{m a^2} \xi_1 + \frac{2}{m a^2} \xi_2 = 0,$$

a za  $i = 2$  dobivamo

$$\ddot{\xi}_2 + \frac{10 U_0}{m a^2} \xi_2 + \frac{2}{m a^2} \xi_1 = 0.$$

## Primjer 9

Pronađimo lagranžijan sfernog njihala u blizini točke stabilne ravnoteže u Kartezijevim koordinatama. Sferno njihalo prikazano je na slici ispod.



Slika 4.13 Sferno njihalo.

Duljinu njihala označimo s  $l$ , a sa slike uočavamo relaciju koja povezuje duljinu i koordinate položaja

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (4.142)$$

Izlučujemo  $z$ -koordinatu iz (4.142)

$$z = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = l \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}}$$

i razvijamo u red binom

$$\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{l^2}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)^2 + \dots$$

Za mala odstupanja vrijedi da su  $x, y \ll 1$  pa se u razvoju zadržavamo samo na prva dva člana jer su ostali članovi zanemarivo malog iznosa.

Za z-koordinatu sad dobivamo

$$z = l \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} \right) = l - \frac{x^2 + y^2}{2l}, \quad (4.143)$$

a vremenska derivacija je

$$\dot{z} = -\frac{1}{l}(x\dot{x} + y\dot{y}). \quad (4.144)$$

Masa  $m$  koja visi na kraju niti ima kinetičku energiju koja je jednaka

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

a uz (4.144) postaje

$$T = \frac{m}{2} \left[ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{l^2} (x\dot{x} + y\dot{y})^2 \right]. \quad (4.145)$$

Pritom je zadnji član  $\dot{z}^2$  zanemarivo malen u odnosu na  $\dot{x}^2$  i  $\dot{y}^2$  pa se kinetička energija svodi na konačni izraz

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (4.146)$$

Sustav se nalazi u homogenom gravitacijskom polju pa je potencijalna energija

$$U = -mgz = -mgl + \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2). \quad (4.147)$$

Lagranžijan sfernog njihala je prema (4.146) i (4.147) jednak

$$L = \frac{m}{2} \left[ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{g}{l} (x^2 + y^2) \right] \quad (4.148)$$

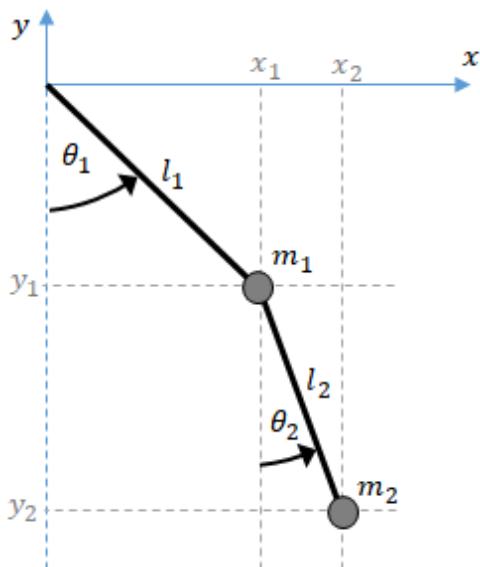
gdje prepoznajemo frekvenciju malih titraja

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Dobiveni lagranžijan je zbroj lagranžijana dva nezavisna harmonijska oscilatora.

## Primjer 10

Pronađimo lagranžijan malih titraja i jednadžbe gibanja za dvostruko njihalo sastavljeno od dvije mase  $m_1$  i  $m_2$  koje vise na niti zanemarive mase kako je prikazano na slici ispod.



Slika 4.14. Dvostruko njihalo.

Sustav opisan slikom je pojednostavljen model dvostrukog njihala. Za poopćene koordinate odaberimo kutove  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , a za poopćene brzine odaberimo kutne brzine  $\dot{\theta}_1$  i  $\dot{\theta}_2$ . Sustav ima dva stupnja slobode. Prikažimo koordinate položaja za obje mase koristeći poopćene koordinate.

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2,$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1, \quad y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2.$$

Derivacijom koordinata položaja dobivamo brzine prikazane pomoću poopćenih brzina.

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1, \quad \dot{x}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2,$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1, \quad \dot{y}_2 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2.$$

Kinetičke energije čestica  $T_1$  i  $T_2$  su

$$T_1 = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{m_1}{2} (l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2) = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2,$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} (l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \\ & l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_2^2 \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2) = \\ &= \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)], \end{aligned}$$

gdje smo primijenili formulu za kosinus razlike kutova

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Potencijalne energije čestica  $U_1$  i  $U_2$  su

$$U_1 = m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1,$$

$$U_2 = m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2).$$

Lagranžijan je razlika ukupne kinetičke i ukupne potencijalne energije.

$$\begin{aligned} L &= (T_1 + T_2) - (U_1 + U_2) = \\ &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \\ & m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2). \end{aligned}$$

Uz pretpostavku da su kutovi  $\theta_1$  i  $\theta_2$  malog iznosa titranje dvostrukog njihala možemo opisati lineariziranim jednadžbama gibanja ako razvijemo funkciju kosinus u Taylorov red oko ravnotežnog položaja.

$$\cos \theta = \cos \theta_0 - \sin(\theta_0) (\theta - \theta_0) - \frac{1}{2} \cos(\theta_0) (\theta - \theta_0)^2 + \dots$$

U gornjem izrazu zanemarujemo drugi član, jer je prema definiciji ravnotežnog položaja prva derivacija jednaka nuli, te članove od četvrtog nadalje, jer sadrže veće potencije kuteva  $\theta_1$  i  $\theta_2$  koje su zanemarivo male.

Uzmemo li za ravnotežni položaj  $\theta_0 = 0$  dobivamo

$$\cos \theta_1 \approx 1 - \frac{\theta_1^2}{2}, \quad \cos \theta_2 \approx 1 - \frac{\theta_2^2}{2}, \quad \cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1 - \frac{(\theta_1 - \theta_2)^2}{2} \approx 1.$$

U zadnjem razvoju zanemarili smo član s  $(\theta_1 - \theta_2)^2$  jer sadrži umnožak malih kuteva  $\theta_1 \cdot \theta_2$ .

Langranžijan sada možemo zapisati u nešto jednostavnijem obliku primjenjujući aproksimacije i pretpostavljajući da je potencijalna energija definirana do na konstantu.

$$L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) - m_1 g l_1 \frac{\theta_1^2}{2} - m_2 g l_1 \frac{\theta_1^2}{2} - m_2 g l_2 \frac{\theta_2^2}{2}.$$

Grupirajmo članove da dobijemo pregledniji oblik

$$L = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) g l_1 \theta_1^2 - m_2 g l_2 \theta_2^2.$$

Jednadžbe gibanja dobit ćemo rješavajući Euler-Lagrangeove jednadžbe

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Potrebne parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \theta_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \theta_2.$$

Dobivene linearizirane jednadžbe gibanja dvostrukog njihala su

$$1) \quad (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 = 0, \quad (4.149)$$

$$2) \quad m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g l_2 \theta_2 = 0. \quad (4.150)$$

Primijetimo da se prva jednađžba uz uvjet  $\ddot{\theta}_2 = 0$  svodi na

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l_1} \theta_1 = 0 ,$$

a druga jednađžba uz uvjet  $\ddot{\theta}_1 = 0$  se svodi na

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_2} \theta_2 = 0 ,$$

što su linearizirane jednađžbe gibanja jednostavnog matematičkog njihala.

Promotrimo slučaj dvostrukog njihala za koji vrijedi da je  $m_1 = m_2 = m$  i  $l_1 = l_2 = l$ .

Jednađžbe gibanja (4.149) i (4.150) tad poprimaju oblik

$$2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 + 2mgl\theta_1 = 0 \quad /: 2ml^2$$

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_1 = 0 \tag{4.151}$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\theta_2 = 0 \quad /: ml^2$$

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_2 = 0 \tag{4.152}$$

Sustav jednađžbi (4.151) i (4.152) može se zapisati u matričnom obliku. Uvedimo vektor i matrice

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{bmatrix}.$$

Sustav jednađžbi gibanja može se pomoću navedenih matrica zapisati u obliku

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = 0 .$$

Rješenje gornje jednađžbe sadrži vlastite frekvencije titranja  $\omega$  koje ćemo pronaći rješavanjem jednađžbe

$$\det (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0.$$



Izjednačavanjem determinante s nulom

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} - \omega^2 & -\frac{1}{2}\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

dobivamo bikvadratnu jednadžbu

$$\frac{1}{2}\omega^4 - \frac{2g}{l}\omega^2 - \frac{g^2}{l^2} = 0$$

kojoj su rješenja

$$\omega_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

a to su vlastite frekvencije titranja.

## 5 Zaključak

Kroz nekoliko primjera uvidjeli smo na koji način dobivamo jednadžbe gibanja za sustave s jednim i više stupnjeva slobode. Čak i kod jednostavnijih gibanja s jednim stupnjem slobode, kao što je slučaj matematičkog njihala, dobivene jednadžbe mogu sadržavati nelinearne članove. Takve jednadžbe nekad je teško riješiti ili kompjuterski obrađivati pa ih je prikladno linearizirati. Jednadžba može poprimiti linearni oblik za male pomake od ravnotežnog položaja jer na tom području postoji podudaranje između aproksimacije i stvarne jednadžbe gibanja.

## 6 Literatura

1. T. Nikšić, Klasična mehanika 2 (skripta): Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2008.
2. Z. Glumac, Klasična mehanika, uvod, <http://gama.fizika.unios.hr/~zglumac/utm.pdf> (preuzeto u listopadu 2019.)
3. M. Paić, Gibanja, sile, valovi: Zagreb, 1997.
4. Kulišić P., Mehanika i toplina: Zagreb 1987., drugo izdanje
5. H. Goldstein, C. P. Poole Jr., J. L. Safko, Classical Mechanics: Third Edition
6. M. Spiegel, Theory and Problems in Theoretical Mechanics: First Edition
7. [http://www.nhn.ou.edu/~gut/notes/cm/lect\\_10.pdf](http://www.nhn.ou.edu/~gut/notes/cm/lect_10.pdf) (preuzeto 13. siječnja 2020.)

## 7 Životopis

Mario Matić rođen je 20. studenog 1989. godine u Dubrovniku. Pohađao je Prirodoslovno - matematičku gimnaziju u Dubrovniku. Upisuje Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu, a od 2019. godine student je preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.