

# ODREĐIVANJE MOMENTA TROMOSTI POMOĆU ROTACIJE

---

Rupčić, Marta

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Physics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:160:187841>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-03**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Department of Physics in Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**  
**ODJEL ZA FIZIKU**



**MARTA RUPČIĆ**

**ODREĐIVANJE MOMENTA TROMOSTI POMOĆU  
ROTACIJE**

**Završni rad**

**Osijek, 2020. godine**

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**  
**ODJEL ZA FIZIKU**



**MARTA RUPČIĆ**

**ODREĐIVANJE MOMENTA TROMOSTI POMOĆU  
ROTACIJE**

**Završni rad**

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
radi stjecanja zvanja prvostupnice fizike

**Osijek, 2020. godine**

**„ Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom doc.dr.sc. Denisa Stanića te komentora Igora Miklavčića, pred. u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija Fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku“**

## SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b> .....	1
<b>2. Teorijski dio</b> .....	3
<b>2.1. Homogena šipka</b> .....	4
<b>2.2. Homogeni obruč</b> .....	7
<b>2.3. Steiner-Huygensov teorem</b> .....	8
<b>3. Eksperimentalni dio</b> .....	11
<b>3.1. Određivanje momenta tromosti tijela pomoću rotacije</b> .....	13
<b>3.1.1. Određivanje momenta tromosti velikog obruča</b> .....	14
<b>3.1.2. Određivanje momenta tromosti malog obruča</b> .....	15
<b>3.2. Određivanje momenta tromosti metalne šipke</b> .....	16
<b>3.3. Provjera Steiner-Huygensova teorema na aparatu s obručem</b> .....	18
<b>Zaključak</b> .....	20
<b>Literatura</b> .....	21
<b>Životopis</b> .....	22

## **ODREĐIVANJE MOMENTA TROMOSTI POMOĆU ROTACIJE**

**MARTA RUPČIĆ**

### **Sažetak**

Kroz primjere i teorijsku podlogu upoznajemo se s pojmom momenta tromosti te ih dokazujemo matematičkim izvodima. Također uspoređujemo teorijske vrijednosti dobivene uvrštavanjem u ranije dobivene formule s onima dobivenim eksperimentalnim putem.

**Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku**

**Ključne riječi:** moment tromosti, rotacija, os rotacije, Steiner-Huygensov teorem

**Mentor:** doc.dr.sc. Denis Stanić

**Komentor:** Igor Miklavčić , pred.

**Ocjenjivači:**

**Rad prihvaćen:**

**DETERMINATION OF THE MOMENT OF INERTIA USING ROTATION**  
**MARTA RUPČIĆ**

**Abstract**

Through examples and theoretical background, we get acquainted with the concept of the moment of inertia and prove them with mathematical derivations. We also compare the theoretical values obtained by including them in the previously obtained formulas with those obtained experimentally.

**Thesis deposited in Department of Physics library**

**Key words:** moment of inertia, rotation, rotation axis, Steiner-Huygensov theorem

**Supervisor:** Denis Stanić PhD

**Co – Supervisor:** Igor Miklavčić, lecturer

**Reviewers:**

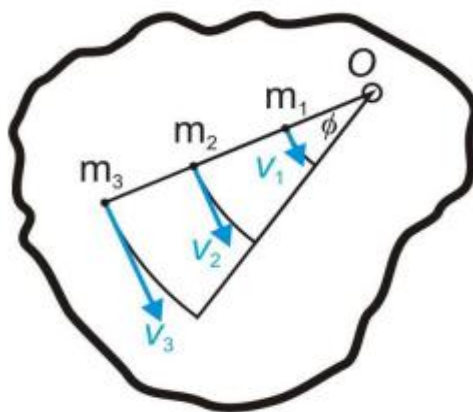
**Thesis accepted:**

## 1. Uvod

Bilo koji objekt koji se kreće ima kinetičku energiju. Razlikujemo dvije vrste gibanja krutog tijela: translaciju i rotaciju. Također, kinetičku energiju krutog tijela, koje se kreće u translacijskom gibanju znamo i izračunati. Ona je jednaka polovini umnoška mase tog tijela i kvadrata njegove brzine.

$$E_t = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Krutim tijelom nazivamo tijelo koje pod djelovanjem sile ne mijenja svoj oblik, koje se kreće u translacijskom gibanju. Kako se kinetička energija računa za kruto tijelo koje se okreće? To se može činiti kompliciranim jer svaka točka krutog tijela ima različitu tangencijalnu brzinu (slika 1.).



Slika 1. Tangencijalna brzina različitih točaka krutog tijela[3].

Međutim, možemo iskoristiti fizikalnu veličinu kutnu brzinu - koja je ista za cijelo kruto tijelo, odnosno za svaku točku krutog tijela, kako bismo izrazili kinetičku energiju rotirajućeg objekta. Kinetička energija rotirajućeg objekta analogna je translacijskoj kinetičkoj energiji i može se izraziti pomoću momenta inercije i kutne brzine. Ukupna kinetička energija predmeta može se izraziti kao zbroj translacijske kinetičke energije središta mase i rotacijske kinetičke energije oko središta mase, koje ćemo redom označavati s  $E_t$  i  $E_r$ . [1]

$$E_k = E_t + E_r$$

Rotacijska kinetička energija nije novi oblik energije, nego je to energija povezana s rotacijskim kretanjem, ista kao i kinetička energija u translacijskom gibanju. Međutim, budući da je translacijska kinetička energija dana s

$$E_t = \frac{m \cdot v^2}{2},$$

a translacijska brzina je veličina koja se razlikuje za svaku točku rotirajućeg tijela oko osi, ima smisla pronaći način zapisivanja kinetičke energije pomoću varijable  $\omega$  (kutne brzine), koja je jednak za sve točke na krutom rotirajućem tijelu. Za pojedinu česticu koja se okreće oko fiksne osi



to je jednostavno izračunati. Kutnu brzinu možemo povezati s veličinom tangencijalne brzine koristeći relaciju

$$v_t = \omega \cdot r$$

gdje je  $r$  udaljenost čestice od osi rotacije, a  $v_t$  njezina tangencijalna brzina. Zamjenom varijabli u jednadžbi translacijske kinetičke energije dolazi se do

$$E_r = \frac{m(\omega \cdot r)^2}{2}$$

$$E_r = \frac{m \cdot r^2}{2} \omega^2$$

Kao primjer takvog gibanja možemo razmatrati bicikl koji se giba pravocrtno, njegov kotač izvodi gibanje složeno od rotacije oko osi kroz centar mase kotača i translacije centra mase kotača u smjeru gibanja bicikla. [2]

Moment tromosti veličina je karakteristična za sva tijela koja se rotiraju oko izabrane osi. Kao što masa utječe na translaciju materijalne točke, tu ulogu kod rotacije obavlja moment tromosti. Pri rotaciji moment tromosti je mjera tromosti tijela, tako je tijela s velikim momentom tromosti teže zarotirati za razliku od onih s manjim. Moment tromosti označavati ćemo velikim slovom  $I$ .

## 2. Teorijski dio

Veličina  $\sum_i m_i r_i^2$  je istovjetna masi u jednadžbi rotacijske kinetičke energije. Ovo je važan novi izraz za rotacijsko gibanje. Ova se veličina naziva momentom inercije  $I$ , s jedinicama  $\text{kgm}^2$ :

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

Primjećujemo da je moment tromosti pojedine točkaste čestice oko fiksne osi jednostavno  $mr^2$ , pri čemu je  $r$  udaljenost od promatrane točkaste čestice do osi rotacije. Kako bi se to vidjelo, uzima se jednostavan primjer utega koji se sastoji od dviju masa na kraju štapa bez mase (zanemarivo male mase) te se izračunava moment tromosti oko dvije različite osi. U slučaju s osi koja prolazi središtem mase, svaka od dvije mase  $m$  je udaljena  $R$  od osi, što daje moment tromosti

$$I_1 = m \cdot R^2 + m \cdot R^2$$

$$I_1 = 2 \cdot m \cdot R^2$$

Dok za drugi slučaj, kada os prolazi kroz jedan od krajeva štapa (kroz jednu od dvije mase), izračunava se moment tromosti

$$I_2 = m \cdot 0^2 + m(2 \cdot R)^2$$

$$I_2 = 4 \cdot m \cdot R^2$$

U ovom je slučaju zbrajanje po masama jednostavno, jer se dvije mase na krajevima štapa mogu aproksimirati kao točkaste mase pa zbroj stoga ima samo dva člana. Kroz ove rezultate može se zaključiti da je dva puta teže zarotirati štap oko jednog kraja, nego oko njegovog središta mase. Što ako objekti nisu točkasti? Treba dobro razmisliti o svakom pojmu u jednadžbi. Jednadžba traži zbrajanje svakog komadića mase te određenu udaljenost od osi rotacije. Ali što točno znači svaki komadić mase? Važno je sjetiti se da je pri izvođenju ove jednadžbe svaki komadić mase imao jednaku veličinu brzine, što znači da je cijeli komad morao imati jednu udaljenost  $r$  do osi rotacije. Međutim, to nije moguće ako se ne uzme infinitezimalni komadić mase  $dm$ . Potreba za korištenjem infinitezimalnog komadića mase  $dm$  sugerira da se moment tromosti može zapisati pomoću integrala nad beskonačno malim masama, umjesto diskretnog zbroja nad konačnim masama. Sada se istražuje integralni oblik ove jednadžbe koji se može koristiti za izračunavanje momenta tromosti nekih krutih tijela pravilnog oblika. Tako jednadžba oblika

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

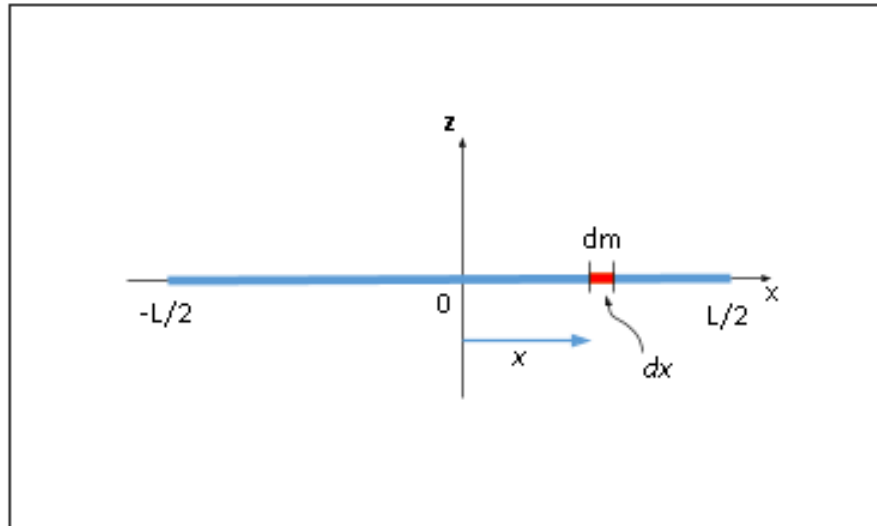
Poprima oblik

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

To je, zapravo, oblik koji je potreban kako bi se generalizirala jednadžba za složene oblike. Najbolje je detaljno razraditi konkretne primjere kako bi se stekao osjećaj kako izračunati moment inercije za određene oblike.

## 2.1. Homogena šipka

Promatra se homogena tanka šipka mase  $M$  i duljine  $L$  kako je prikazano na Slici 2. Budući da je šipka tanka može se pretpostaviti da je površina poprečnog presjeka šipke mala te se na nju može gledati kao na niz masa duž jednodimenzionalne ravne crte. U ovom primjeru, os rotacije okomita je na šipku i radi jednostavnosti prolazi kroz njezin centar mase.



*Slika 2. Homogena tanka šipka mase  $M$  i duljine  $L$  čija os rotacije prolazi središtem mase*

Zadatak je izračunati moment tromosti šipke oko ove osi. Orijentiramo osi tako da je os  $z$  os rotacije, a os  $x$  prolazi kroz duljinu šipke, kao što je prikazano na slici. Ovo je prikladan izbor jer se tada može integrirati duž  $x$  osi. Infinitesimalni element mase koji čini šipku definiramo s  $dm$ , a moment inercije kao integral nad raspodjelom mase. Međutim, znamo integrirati u prostoru, ali sada moramo integrirati po masi. Stoga treba pronaći način povezivanja mase s prostornim varijablama. Masu i prostor povezat ćemo pomoću veličine koju nazivamo linearna gustoća  $\lambda$ , koju definiramo kao masu po jedinici duljine

$$\lambda = \frac{m}{l}$$

Odnosno,

$$m = \lambda \cdot l$$

Diferenciranjem obje strane prethodne jednadžbe dobivamo

$$dm = \lambda \cdot dl$$

Treba imati na umu da šipka  $dl$  u potpunosti leži duž  $x$  osi i ima duljinu  $dx$ ; tj. ,  $dl = dx$  u ovoj situaciji. Stoga možemo napisati  $dm = \lambda \cdot dl$ , dajući nam integracijsku varijablu s kojom znamo kako se nositi. Udaljenost svakog komada mase  $dm$  od osi zadana je varijablom  $x$ , kao što je prikazano na slici. Supstituirajući sve navedeno, dobivamo

$$I_{\xi} = \int r^2 \cdot dm$$

$$I_{\xi} = \int x^2 \cdot \lambda \cdot dx$$

Također treba paziti na granice integracije, budući da se os rotacije nalazi u centru mase šipke, šipka se proteže od  $x = -\frac{L}{2}$  do  $x = \frac{L}{2}$  što nam daje

$$I_{\xi} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \cdot \lambda \cdot dx$$

$$I_{\xi} = \lambda \frac{x^3}{3}$$

$$I_{\xi} = \frac{1}{3} \lambda \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \left( -\frac{L}{2} \right)^3 \right]$$

$$I_{\xi} = \frac{1}{3} \lambda \cdot 2 \cdot \frac{L^3}{8}$$

$$I_{\xi} = \frac{1}{12} \lambda \cdot L^3$$

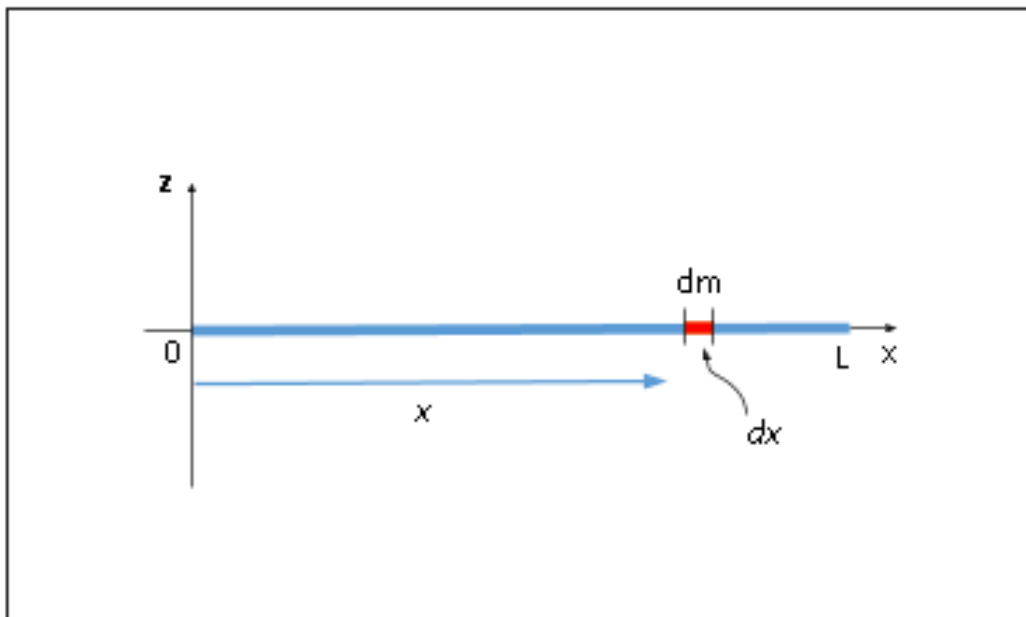
Budući da je šipka homogena vrijedi

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

Pa dobivamo

$$I_{\xi} = \frac{1}{12} M \cdot L^2$$

Zatim treba izračunati moment tromosti za tu istu homogenu tanku šipku, ali s različitim izborom osi rotacije zbog usporedbe rezultata (Slika 3.).



**Slika 3.** Homogena tanka šipka mase  $M$  i duljine  $L$  čija os rotacije prolazi jednim njezinim krajem

Za očekivati je da će moment tromosti biti manji u slučaju kada os rotacije prolazi središtem mase kao što je to bilo u primjeru s utegom. To se događa jer se manje mase raspoređuje dalje od osi rotacije. U ovom slučaju izraz pod integralom ostaje isti, ali se mijenjaju granice integracije. Šipka se sada proteže od  $x = 0$  do  $x = L$ .

$$I_s = \int_0^L x^2 \cdot \lambda \cdot dx$$

$$I_s = \lambda \frac{x^3}{3}$$

$$I_s = \frac{1}{3} \lambda [(L)^3 - (0)^3]$$

$$I_s = \frac{1}{3} \lambda \cdot L^3$$

Šipka je homogena i u ovom slučaju što znači da je

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

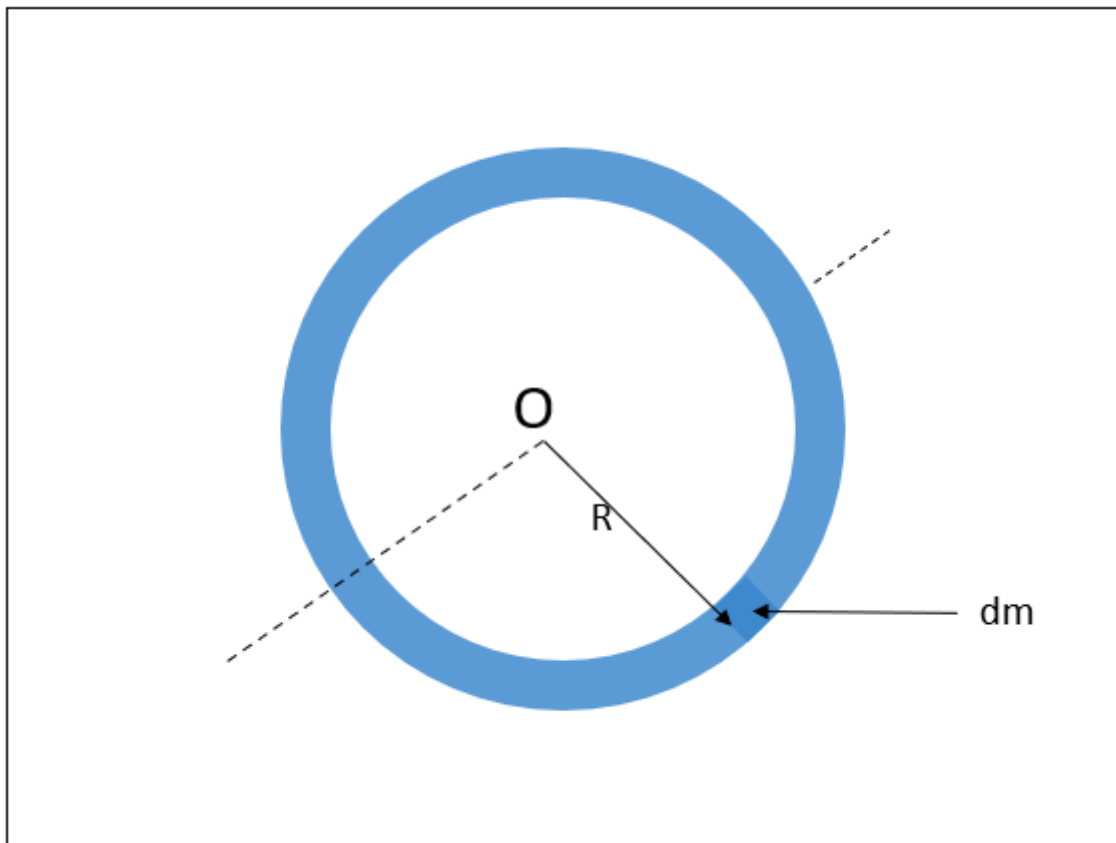
Pa dobivamo

$$I_s = \frac{1}{3} M \cdot L^2$$

Vidi se da rezultati potvrđuju pretpostavke, kao i u primjeru s utegom, moment tromosti manji je u slučaju kada os rotacije prolazi središtem mase šipke, nego jednim od njenih krajeva. Što znači da je teže zarotirati šipku oko jednog od njezinih krajeva, nego oko njezinog središta mase.

## 2.2. Homogeni obruč

Drugi zadatak je izračunati moment tromosti homogenog obruča. Slika 4. prikazuje infinitezimalni komadić obruča s obzirom na os rotacije. Vidljivo je da su svi elementi mase obruča na konstantnoj udaljenosti  $R$  od osi koja prolazi središtem obruča.



*Slika 4. Homogeni obruč mase  $M$  i radijusa  $R$  čija os rotacije prolazi središtem mase*

$$I_o = \int R^2 \cdot dm$$

Budući da je udaljenost  $R$  konstanta veličina, ona se može izvaditi ispred integrala te se tako dobiva izraz

$$I_o = R^2 \int_0^M dm$$

Što vodi na

$$I_o = M \cdot R^2$$

Važno je primijetiti da to nije bilo moguće u slučaju štapa, jer je, u slučaju štapa, elementarna masa na promjenjivoj udaljenosti od osi rotacije. Moramo shvatiti da pojednostavljenje vrednovanja u ovom slučaju proizlazi iz činjenice da su mase na istoj udaljenosti od osi rotacije. Što znači da će izraz  $I_o = M \cdot R^2$  vrijediti samo kada je debljina obruča relativno vrlo mala u usporedbi s njegovim radijusom.

### 2.3. Steiner-Huygensov teorem

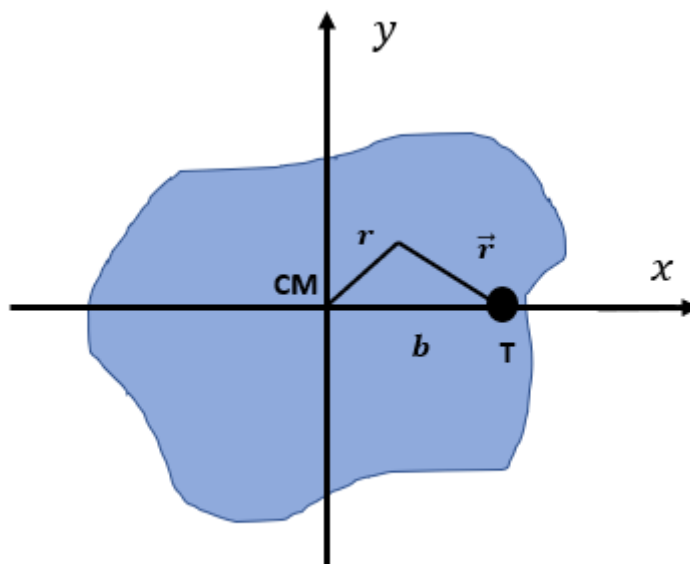
Govoreći o momentu tromosti, nemoguće je ne spomenuti teorem dvojice matematičara Huygensa i Steinera, koji su dali formulaciju definiciji karakteristici usporednih osi. Steiner-Huygensov teorem, ili kako se još naziva teorem o usporednim osima, kaže: moment tromosti tijela oko proizvoljne osi jednak je zbroju momenta tromosti tijela oko osi koja prolazi kroz središte mase usporedno s proizvoljnom osi i umnoška mase tijela i kvadratom udaljenosti između osi.

Ukoliko tijelo koje rotira oko osi  $z$  koja prolazi kroz njegov centar mase okomito na ravninu, njegov moment tromosti kao što je ranije navedeno je

$$I_{CM} = \int r^2 \cdot dm$$

$$I_{CM} = \int (x^2 + y^2) dm$$

Dok je moment tromosti za usporednu os, kroz proizvoljnu točku T, prikazanoj na slici 5.



**Slika 5.** Uz izvođenje Steiner-Huygenosova poučka

$$I_{CM} = \int [(b - x)^2 + y^2] dm$$

$$I_{CM} = \int [b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2 + y^2] dm$$

$$I_{CM} = \int (x^2 + y^2) dm - 2 \cdot b \int x \cdot dm + b^2 \int dm$$

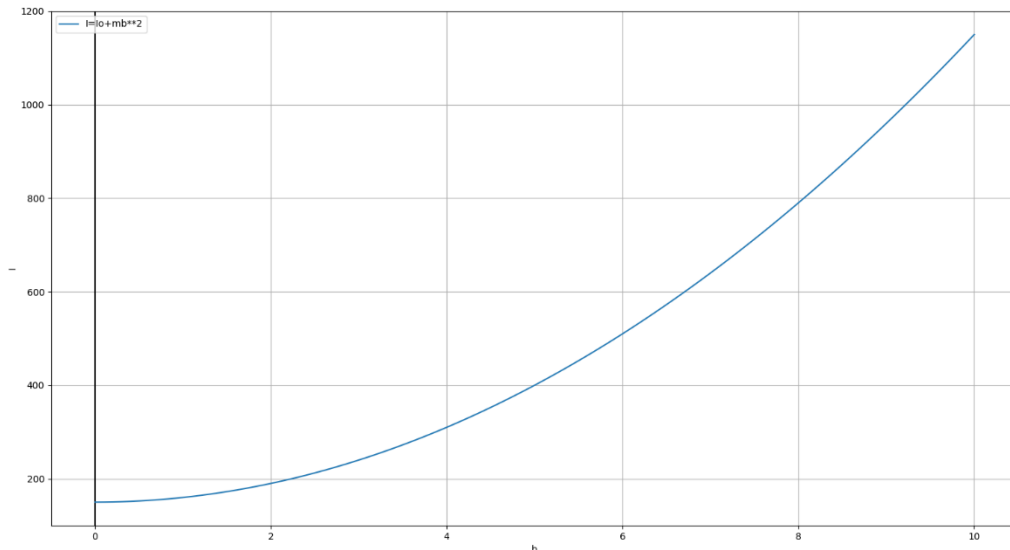
Prvi član se prepoznaje kao moment tromosti tijela oko osi koja prolazi kroz njegov centar mase, drugi član jednak je nuli jer je  $\int x \cdot dm = m \cdot x_{CM}$  što je jednako nuli zbog toga što je centar mase postavljen u ishodište koordinatnog sustava te se time dobiva izraz za moment tromosti oko osi usporedne s osi koja prolazi centrom mase tijela [2]

$$I = I_{CM} + m \cdot b^2$$

Gdje je oznakom  $I$  označen moment tromosti kroz proizvoljnu os, oznakom  $I_{CM}$  te oznakom  $b$  udaljenost između osi. Ovaj teorem uvelike olakšava rješenje mnogih fizičkih problema povezanih s momentom tromosti. Na primjer, objektu proizvoljnog oblika možemo pomoću Steiner- Huygensove formule možemo izračunati moment tromosti tijela u odnosu na bilo koju os usporednu s osi koja prolazi njegovim centrom mase. Budući da je član  $m \cdot b^2 \geq 0$  lako je zaključiti da je tijelu moment tromosti najmanji kada os rotacije prolazi njegovim centrom mase

$$I_{CM} \leq I$$

Kao što je vidljivo iz definicije teorema te Slike 6. moment tromosti tijela raste s kvadratnom udaljenošću odabrane osi rotacije od osi rotacije koja prolazi njegovim centrom mase.



**Slika 6.** Grafički prikaz Steiner-Huygensova teorema

Kako bi se potvrdio ovaj teorem, zadatak je razmotriti jednostavan primjer s početka rada. Pokazano je da je moment tromosti štapa čija os rotacije prolazi njegovim centrom mase jednaka

$$I_{s,CM} = \frac{1}{12} M \cdot L^2$$

dok je moment tromosti tog istog štapa čija os rotacije prolazi njegovim jednim krajem jednaka



$$I_{\xi} = \frac{1}{3} M \cdot L^2$$

Treba pokazati da se ovi isti rezultati mogu dobiti koristeći Steiner-Huygensov teorem

$$I_{\xi} = I_{\xi,CM} + m \cdot b^2$$

Udaljenost osi rotacije od centra mase štapa,  $b$ , jednaka je upravo polovici duljine štapa  $\frac{L}{2}$  pa prethodna jednadžba prelazi u

$$I_{\xi} = \frac{1}{12} M \cdot L^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_{\xi} = \frac{1}{12} M \cdot L^2 + M \frac{L^2}{4}$$

$$I_{\xi} = \frac{1}{3} M \cdot L^2$$

Time je pokazano da su rezultati objema metodama jednaki, no većinom ukoliko je moment tromosti tijela čija os prolazi njegovim središtem mase poznata Steiner-Huygensov teorem uvelike olakšava pronalazak momenta tromosti toga tijela čija je os rotacije usporedna s osom rotacije kroz njegov centar mase.

### 3. Eksperimentalni dio

Zadatak je odrediti kutnu brzinu pri jednolikoj ubrzanoj rotaciji obruča.

Potreban pribor: aparat s obručem na niti, uteg te zaporna ura

Vježba se izvodi tako da se u zdjelicu stavi uteg od 20 g te se postavi aparat kao na slici 7.

Mjeri se vrijeme potrebno obruču da napravi za 1, 2 i 3 puna kruga, tj. za kutove  $2\pi$ ,  $4\pi$  i  $6\pi$  radijana.

**Tablica 1.** Određivanje kutne akceleracije aparata s obručem na niti

$\varphi_1 = 2\pi$		$\varphi_2 = 4\pi$		$\varphi_3 = 6\pi$	
$t_1$ [s]	$\alpha_1$ [rad s <sup>-2</sup> ]	$t_2$ [s]	$\alpha_2$ [rad s <sup>-2</sup> ]	$t_3$ [s]	$\alpha_3$ [rad s <sup>-2</sup> ]
9,50	0,14	15,10	0,11	18,60	0,11
10,10	0,12	14,30	0,12	18,10	0,12
10,80	0,11	14,50	0,12	17,90	0,12
11,10	0,10	14,10	0,13	18,20	0,11
10,30	0,12	15,20	0,11	18,50	0,11
10,00	0,13	13,90	0,13	17,80	0,12
11,20	0,10	13,40	0,14	17,20	0,13
9,80	0,13	14,90	0,11	18,50	0,11
10,20	0,12	14,20	0,12	18,20	0,11
10,30	0,12	14,70	0,12	17,80	0,12
	$\bar{\alpha}_1 = 0,11$		$\bar{\alpha}_2 = 0,12$		$\bar{\alpha}_3 = 0,12$

$$\bar{\alpha}_1 \approx \bar{\alpha}_2 \approx \bar{\alpha}_3$$

Mjerenjem vremena za kutove  $2\pi$ ,  $4\pi$  i  $6\pi$  radijana te izračunom pripadne kutne akceleracije uočava se da je  $\alpha \approx const.$  (do malog odstupanja dolazi zbog nepreciznog mjerenja) te se zaključuje da je gibanje na aparatu s obručem jednoliko ubrzano.

Koristeći isti pribor uz dodatak utega od 40 g i 60 g sljedeći je zadatak pokazati da je, pri jednolikoj ubrzanoj rotaciji, kutna akceleracija proporcionalna momentu sile  $\alpha \sim M$ . Aparatura se postavlja kao na slici te se stavljaju redom utezi od 20 g, 40 g i 60 g te obruč radi dva okreta.

**Tablica 2.** Određivanje kutne akceleracije aparata s obručem na niti za različite sile (mase utega) uz uvjete:

$$\varphi = 4\pi$$

$$r_B = 0,01025 \text{ m}$$

$m_1 = 20 \text{ g}$		$m_2 = 40 \text{ g}$		$m_3 = 60 \text{ g}$	
$t_1[\text{s}]$	$\alpha_1[\text{rad s}^{-2}]$	$t_2[\text{s}]$	$\alpha_2[\text{rad s}^{-2}]$	$t_3[\text{s}]$	$\alpha_3[\text{rad s}^{-2}]$
15,10	0,11	9,50	0,28	8,00	0,39
14,30	0,12	9,90	0,26	8,70	0,33
14,50	0,12	10,90	0,21	7,90	0,40
14,10	0,13	10,50	0,23	8,20	0,37
15,20	0,11	10,10	0,25	8,40	0,36
13,90	0,13	10,40	0,23	8,70	0,33
13,40	0,14	11,00	0,21	8,30	0,36
14,90	0,11	9,80	0,26	8,20	0,37
14,20	0,12	10,10	0,25	7,90	0,40
14,70	0,12	10,40	0,23	8,60	0,34
	$\overline{\alpha}_1 = 0,12$		$\overline{\alpha}_2 = 0,24$		$\overline{\alpha}_3 = 0,37$

$$\alpha = \frac{2\varphi}{t^2}$$

$$M_1 = r_B \cdot F_1$$

$$M_1 = r_B \cdot m_1 \cdot g$$

$$M_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ N m}$$

$$M_2 = r_B \cdot F_2$$

$$M_2 = r_B \cdot m_2 \cdot g$$

$$M_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N m}$$

$$M_3 = r_B \cdot F_3$$

$$M_3 = r_B \cdot m_3 \cdot g$$

$$M_3 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ N m}$$

Treba provjeriti sljedeće jednakosti

$$\overline{\alpha}_1 : \overline{\alpha}_2 : \overline{\alpha}_3 = 1 : 2 : 3$$

$$0,12 : 0,25 : 0,37 = 1 : 2 : 3$$

$$\frac{0,12}{0,12} : \frac{0,25}{0,12} : \frac{0,37}{0,12} = 1 : 2 : 3$$

$$1 : 2,1 : 3,1 \approx 1 : 2 : 3$$

te

$$M_1 : M_2 : M_3 = 1 : 2 : 3$$

$$2 \cdot 10^{-3} : 4 \cdot 10^{-3} : 6 \cdot 10^{-3} = 1 : 2 : 3$$

$$\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} : \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} : \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 1 : 2 : 3$$

$$1 : 2 : 3 = 1 : 2 : 3$$

Ovim rezultatima zaključujemo da kutna akceleracija jest proporcionalna momentu sile

$$\overline{\alpha_1} : \overline{\alpha_2} : \overline{\alpha_3} \sim M_1 : M_2 : M_3$$

$$\alpha \sim M$$

### 3.1. Određivanje momenta tromosti tijela pomoću rotacije

Zadatak je odrediti komponente momenta sile koja ubrzava sustav.

Potreban pribor: aparat s obručom na niti, mali i veliki obruč, zdjelica, uteg te zaporna ura.

Određuju se komponente momenta sile koja ubrzava sustav, dok se preostali dio momenta sile troši na savladavanje trenja. Iz temeljne jednadžbe rotacije proizlazi da je moment sile koji ubrzava obruč  $M_\alpha$  jednak

$$M_\alpha = \alpha \cdot I_0$$

Na zdjelicu se stavlja uteg od  $m_u = 20$  g te postavlja aparatura kao na slici 7.



*Slika 7. Aparatura za određivanje momenta tromosti obruča*

Zapornom urom mjeri se vrijeme potrebno obruču da napravi 2 puna okreta te isto ponovimo za drugi, manji obruč.

### 3.1.1. Određivanje momenta tromosti velikog obruča

Potrebno je izmjeriti radijus velikog obruča  $r_v$ , njegovu masu  $m_v$  te vrijeme potrebno za kut  $4\pi$  rad. Zatim se pomoću dobivenih rezultata izračunava moment sile velikog obruča.

**Tablica 3.** Određivanje kutne akceleracije aparata i izračun momente sile s velikim obručem na niti uz uvjete:

$$\varphi = 4\pi$$

$$r_v = 0,2495 \text{ m}$$

$$m_u = 0,020 \text{ kg}$$

$$m_v = 1,200 \text{ kg}$$

$t_1[\text{s}]$	$\alpha_1[\text{rad s}^{-2}]$
14,80	0,11
14,50	0,12
13,90	0,13
14,30	0,12
14,70	0,12
15,10	0,11
14,80	0,11
14,90	0,11
14,20	0,12
14,70	0,12
	$\bar{\alpha}_1 = 0,12$

$$\alpha = \frac{2\varphi}{t^2}$$

$$I_{v,teo} = m_v \cdot r_v^2$$

$$I_{v,teo} = 0,07 \text{ kg m}^2$$

$$M_v = I_v \cdot \bar{\alpha}_1$$

$$M_v = 0,009 \text{ N m}$$

### 3.1.2. Određivanje momenta tromosti malog obruča

Kao i u prethodnom zadatku, cilj je odrediti momente sile za mali obruč.

**Tablica 4.** Određivanje kutne akceleracije aparata i izračun momente sile s malim obručem na niti uz uvjete :

$$\varphi = 4\pi$$

$$r_2 = 0,1253 \text{ m}$$

$$m_m = 0,600 \text{ kg}$$

$$m_u = 0,020 \text{ kg}$$

$t_2$ [s]	$\alpha_2$ [rad s <sup>-2</sup> ]
5,30	0,89
5,20	0,93
4,80	1,10
5,00	1,00
5,30	0,89
4,80	1,10
5,70	0,77
5,50	0,83
4,90	1,05
5,10	0,97
	$\bar{\alpha}_2 = 0,95$

$$I_{m,teo} = m_m \cdot r_2^2$$

$$I_{m,teo} = 0,009 \text{ kg m}^2$$

$$I_{eksp} = \frac{M_\alpha}{\bar{\alpha}}$$

$$M_m = I_2 \cdot \bar{\alpha}_2$$

$$M_m = 0,009 \text{ N m}$$

### 3.2. Određivanje momenta tromosti metalne šipke

Zadatak je odrediti moment tromosti metalne šipke i usporediti s teorijskom vrijednosti.

Potreban pribor: aparat s posebnim držačem za šipke, nit, uteg, 2 šipke te zaporna ura.

Moment tromosti tijela, s obzirom na vezu iz rotacije definiramo kao svojstvo tijela koje se opire promjeni kutne brzine, tj. kutnom ubrzanju. Momenti tromosti pravilnih tijela nalaze se integralnim računom, a rezultati računa za šipku daju: homogena šipka duljine  $l$  i mase  $m_s$  ima moment tromosti

$$I_s = \frac{1}{12} m_s \cdot l^2$$

Aparatura se složi kao na slici 8. Mjeri se vrijeme potrebno šipci koja rotira oko osi da napuni dva puna okreta. Pokus je potrebno ponoviti više puta.



*Slika 8. Aparatura za određivanje momenta tromosti metalne šipke*

**Tablica 5.** Određivanje momenta tromosti šipke s obručem na niti uz uvjete:

$$\varphi = 4\pi$$

$$b = 0,6390 \text{ m}$$

$$m_s = 0,129 \text{ kg}$$

$$m_u = 0,020 \text{ kg}$$

$t[s]$	$\alpha[\text{rad s}^{-2}]$
4,40	1,30
4,20	1,42
3,70	1,84
3,20	2,45
3,40	2,17
3,10	2,62
3,50	2,05
3,30	2,31
4,00	1,57
3,50	2,05
	$\bar{\alpha} = 1,98$

$$M_\alpha = 0,009 \text{ N m}$$

$$I_{teo} = \frac{1}{12} m \cdot b^2$$

$$I_{teo} = 0,0044 \text{ kg m}^2$$

$$I_{teo} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$



$$I_{eksp} = \frac{M\alpha}{\bar{\alpha}}$$

$$I_{eksp} = 4,55 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$\rho = \frac{|I_{teo} - I_{eksp}|}{I_{teo}} \cdot 100 \%$$

$$\rho = 3 \%$$

Usporedbom teorijske vrijednosti momenta tromosti metalne šipke dobivenu poznavajući masu i duljinu šipke, pomoću ranije izvedenih formula, te eksperimentalne vrijednosti dobivene omjerom moment sile i kutne akceleracije dobiveno relativno odstupanje iznosi 3 %.

### 3.3. Provjera Steiner-Huygensova teorema na aparatu s obručom

Zadatak je provjeriti vrijedi li Steiner-Huygensov teorem te odrediti odstupanje teorijske i eksperimentalne vrijednosti.

Pribor: aparat s obručom na niti, dvije metalne šipke, uteg te zdjelica.

Aparaturu je potrebno postaviti tako da se dvije jednake metalne šipke simetrično objese na obruč. Udaljenost dviju šipki,  $D$ , mora biti jednaka dvostrukoj udaljenosti  $d$  svake šipke od centra mase

$$D = 2 \cdot d$$

U zdjelicu se postavi uteg od 20 g te se zapornom urom mjeri vrijeme potrebno obruču da napravi dva okreta.

**Tablica 6.** Provjera Steiner-Huygensova teorema na aparatu s obručom na niti uz uvjete:

$$m_s = 0,301 \text{ kg}$$

$$m_o = 1,200 \text{ kg}$$

$$l_s = 0,4320 \text{ m}$$

$$r_o = 0,2495 \text{ m}$$

$$r_b = 0,01025 \text{ m}$$

$$d = 0,2200 \text{ m}$$

$t[s]$	$\alpha[\text{rad s}^{-2}]$
19,60	0,065
19,70	0,065
19,80	0,064
20,20	0,062
19,60	0,065
18,90	0,070
19,70	0,065
19,40	0,067
19,50	0,066
20,10	0,062
	$\bar{\alpha} = 0,065$

$$I_{eksp} = \frac{M\alpha}{\bar{\alpha}}$$

$$I_{eksp} = \frac{r_d \cdot F}{\bar{\alpha}}$$

$$I_{eksp} = 0,031 \text{ kg m}^2$$

$$I_{o,teo} = m_o \cdot r_o^2$$

$$I_{o,teo} = 0,075 \text{ kg m}^2$$

$$I_{\check{s},teo} = |I_{eksp} - I_o|$$

$$I_{\check{s},teo} = 0,022 \text{ kg m}^2$$

$$I_{teo} = I_o + m \cdot b^2$$

$$I_{teo} = \frac{1}{12} m_{\check{s}} \cdot l_{\check{s}}^2 + m_{\check{s}} \cdot b^2$$

$$I_{teo} = 0,020 \text{ kg m}^2$$

$$\rho = \frac{|I_{teo} - I_{eksp}|}{I_{teo}} \cdot 100 \%$$

$$\rho = 10 \%$$

Proučavajući Steiner-Huygensov teorem na aparatu s obručem na niti, dobiveni rezultati pokazuju kako eksperimentalne vrijednosti odstupaju od teorijskih za 10 %.

## Zaključak

Moment tromosti fizikalna je veličina koja opisuje koliko se lako tijelo može okretati oko zadane osi rotacije. Ona je kod rotacije veličina analogna masi koja opisuje otpor tijela na translacijsko gibanje. Što je tromost veća, to je potrebna veća sila da se u određenom vremenu obavi neka promjena u njezinoj brzini. Pretpostavimo da kamion veće mase i automobil manje mase miruju, tada intuitivno znamo da će biti potrebno više sile da bi se kamion gurnuo na određenu brzinu u određenom vremenu nego što će biti potrebno za guranje automobila na istu brzinu u istom vremenu. Slično tome, moment inercije je ono svojstvo gdje se tvar opire promjeni u svom stanju rotacijskog gibanja. Što je veći moment tromosti, veća je količina okretnog momenta koja će biti potrebna da se u zadanom vremenu obavi ista promjena njegove kutne brzine. Ovdje su moment sile i kutna brzina analogni sili i brzini kod translacijskog gibanja. Na potpuno isti način na koji se sila i brzina odnose na masu kod translacijskog gibanja, odnose se i moment sile i kutna brzina na moment tromosti pri rotacijskom gibanju. Za razliku od tromosti, moment tromosti ne ovisi samo o masi već i o raspodjeli mase oko osi oko koje treba izračunati trenutak tromosti. Predmet može imati različite momente tromosti oko različitih osi. Odnosno, za rotiranje predmeta oko različitih osi s jednakim kutnim ubrzanjem potreban je različiti zakretni moment. Ovaj je koncept relevantan i prijeko potreban u mehanici. Potrebno je više napora da bi se objekt na većoj udaljenosti od osi rotacije ubrzao do iste kutne brzine. Dakle, može se izračunati da moment tromosti ovisi o udaljenosti od osi. Ako je masa udaljenija od osi, njezin moment inercije je veći.

Eksperimentalni podaci pokazuju kako je kutna akceleracija proporcionalna momentu sile koji ju uzrokuje,  $\alpha \sim M$ , za razliku od momenta tromosti koji je obrnuto proporcionalan kutnoj akceleraciji tijela  $\alpha \sim \frac{1}{I}$ . Eksperimentom je određen moment tromosti velikog i malog obruča te šipke pomoću rotacije pomoću aparata s obručem na niti te potvrdili Steiner-Huygensov teorem unutar pogreške od 10 %. Pokuse smo izvodili za navedena tijela jer ih je najlakše izvesti s opremom koju imamo na Odjelu za fiziku u Osijeku. Za druga tijela bilo bi potrebno prilagoditi aparaturu ili izraditi nova tijela (disk, kugla, ploča,...) što nije bio cilj ovog završnog rada, ali ostavljamo tu ideju kao otvoreno pitanje za druge studente. Također je računom pokazano kako točkasto tijelo na udaljenosti  $r$  od osi rotacije ima jednak moment tromosti kao obruč te iste mase radijusa  $r$ , što uvelike pojednostavljuje račun. Kao što se intuitivno pretpostavlja, rezultati pokazuju da mali obruč ima otprilike 10 puta manji moment tromosti od većeg obruča. Što znači da ćemo 10 puta manjim momentom sile jednakom akceleracijom vrtjeti manji od većeg obruča.

## Literatura

- [1] [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University\\_Physics/Book%3A\\_University\\_Physics\\_\(OpenStax\)/Map%3A\\_University\\_Physics\\_I\\_-\\_Mechanics\\_Sound\\_Oscillations\\_and\\_Waves\\_\(OpenStax\)/10%3A\\_Fixed-Axis\\_Rotation\\_Introduction/10.06%3A\\_Calculating\\_Moments\\_of\\_Inertia](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_(OpenStax)/10%3A_Fixed-Axis_Rotation_Introduction/10.06%3A_Calculating_Moments_of_Inertia) [Pristupljeno 10.09.2020.]
- [2] Petar Kulišić (2005.) Mehanika i toplina
- [3] Kurelec A. (1959.) Pokusi iz elementarne dinamike

## **Životopis**

Marta Rupčić rođena je 3. 1. 1998. godine u Osijeku, u Republici Hrvatskoj. Pohađala je Osnovnu školu Tina Ujevića te po završetku osnovne škole upisuje II. gimnaziju Osijek, koju završava 2016. godine kada upisuje preddiplomski studij fizike na Odjelu za fiziku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera Osijek. 2011. godine Marta započinje svoje volontiranje u Gradskom društvu Crvenog križa Osijek gdje prolazi razne edukacije te se osposobljava za provođenje istih.