RAČUN SMETNJE ZA POLJE CENTRALNE SILE

Špigl, Barbara

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

BARBARA ŠPIGL

RAČUN SMETNJE ZA POLJE CENTRALNE SILE

INTERFERENCE CALCULATIONS FOR THE CENTRAL FIELD FORCE

Završni rad

Osijek, 2020.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

BARBARA ŠPIGL

RAČUN SMETNJE ZA POLJE CENTRALNE SILE

INTERFERENCE CALCULATIONS FOR THE CENTRAL FIELD FORCE

Završni rad

predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

radi stjecanja zvanja prvostupnice fizike

Osijek, 2020.

Ovaj završni rad je izrađen pod vodstvom doc. dr. sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija Fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku Završni rad

Odjel za fiziku

RAČUN SMETNJE ZA POLJE CENTRALNE SILE

INTERFERENCE CALCULATIONS FOR THE CENTRAL FIELD FORCE

Barbara Špigl

Sažetak

U ovom završnom radu *Račun smetnje za polje centralne sile* opisano je kako smetnje utječu na česticu koja se giba u polju centralne sile. Nakon kratkog uvoda o centralnim silama pokazat ćemo kako se dolazi do jednadžbi stabilnih i nestabilnih kružnih orbita te kako se čestica giba po zatvorenoj kružnoj orbiti uz male titraje. Na kraju rada nalaze se dva primjera koja opisuju kako možemo primijeniti račun smetnje na česticu koja se giba u polju centralne sile.

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku.

Ključne riječi: centrale sile/ diferencijalni račun/ kružne orbite/ moment količine gibanja/ račun smetnje/ sačuvanje energije

Mentor: doc. dr. sc. Zvonko Glumac
Ocjenjivači:
Rad prihvaćen:

Josip Juraj Strossmayer University in Osijek
Department of Physics Bachelor of Physics Thesis

RAČUN SMETNJE ZA POLJE CENTRALNE SILE
INTERFERENCE CALCULATIONS FOR THE CENTRAL FIELD FORCE

Barbara Špigl

Abstract

In this thesis *Interference calculations for the central field force* is described how interferences affect particles which are in motion affected by the central field force. After a short introduction to central forces we begin to show the equations of stable and unstable circular orbits for a moving particle, along with closed orbits with small oscillations. At the end of the thesis are described some examples for the use of interference calculations for a particle in motion affected by the central force.

The thesis is deposited in Department of Physics library.

Keywords: central forces/ differential equations/ circular orbits/ angular momentum/ interference calculations/ conservation of energy

Supervisor: doc. dr. sc. Zvonko Glumac
Reviewers:
Thesis accepted:

Sadržaj

1 Uvod

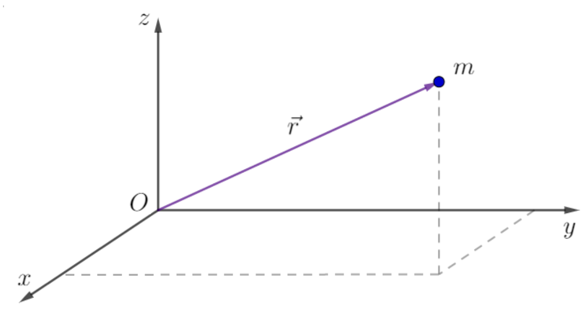
Pod pojmom centralne sile podrazumijeva se bilo koja sila na tijelo koja uvijek ima smjer prema nekoj točki. Među centralne sile ubrajamo i centripetalnu silu kod gibanja tijela po kružnici. U svemiru se javlja i gibanje manjih nebeskih tijela po elipsi oko nekog mnogo većeg tijela, npr. gibanje planeta oko Sunca. Na planet djeluje sila koja uvijek ima smjer prema Suncu (gravitacijska sila), a Sunce se nalazi u jednom od žarišta elipse.

2 Centralne sile

Sila koja, u središtu pokreta, održava tijelo gibanjem na svojoj putanji naziva se centralna sila. Gravitacijska, Coulombova ili elastična sila samo su posebni slučajevi centralne sile.

Sila na česticu je uvijek usmjerena duž spojnice čestice i nepomične točke O koja se zove centar ili središte sile. Ako je sila usmjerena od čestice prema O, sila je privlačna, a ako je usmjerena od točke O prema čestici, sila je odbojna.

Iznos sile ovisi samo u udaljenosti r od čestice do točke O, ali ne i kutovima ili nekim drugim varijablama (npr. brzini, kao kod Lorentzove sile).



$$\vec{f} = f(r)\vec{r}_0$$

Slika 1: Uz opis centralne sile

- $\vec{r}$ – vektor položaja čestice u odnosu na centar sile
- $\vec{r}_0$ – jedinični vektor

Sila je privlačna ako je $f(r) < 0$, a odbojna ako je $f(r) > 0$.

2.1 Sačuvanje momenta količine gibanja

Moment centralne sile $\vec{N}$ u odnosu na njen centar jednak je nuli jer su $\vec{r}$ i $\vec{f}$ istog ili suprotnog smjera

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{f} = 0. \tag{2.1}$$

Vremenska promjena momenta količine gibanja čestice tada iščezava

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\vec{M} = \vec{N} = 0 \quad \Rightarrow \vec{M} = \text{konst.}} \tag{2.2}$$

Moment količine gibanja čestice koja se giba u polju centralne sile je sačuvan. Iz definicije

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} \;\Rightarrow\; \vec{M} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \qquad \vec{p} = \text{količina gibanja} \tag{2.3}$$

slijedi da su vektori položaja $\vec{r}$, brzine $\dot{\vec{r}}$ i momenta količine gibanja $\vec{M}$ međusobno okomiti.

Dakle, vektor položaja je u svakom trenutku gibanja okomit na konstantni vektor $\vec{M}$ pa se putanja čestice, određena vektorom $\vec{r}(t)$ uvijek nalazi u ravnini okomitoj na vektor momenta količine gibanja $\vec{M}$. Također možemo zaključiti da se gibanje čestice odvija u ravnini određenoj vektorima $\vec{r}$ i $\vec{p}$.

2.2 Konzervativnost

Svaki pomak čestice možemo rastaviti na radijalni pomak koji je paralelan centralnoj sili te na tangencijalni pomak koji je okomit na silu. Centralna sila obavlja rad isključivo pri radijalnom pomaku čestice, te ukupni rad ovisi samo o početnoj r_1 i konačnoj r_2 točki

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dW = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\, dr. \tag{2.4}$$

S obzirom na to da rad ne ovisi o odabira putanje, već ovisi isključivo o odabiru krajnjih točaka, slijedi da je centralna sila konzervativna.

2.3 Jednadžba gibanja i sačuvanje energije

Budući da se gibanje odvija u ravnini, najprirodnije je koristiti dvodimenzijski polarni koordinatni sustav definiran koordinatama r i φ.

Neka se čestica mase m giba u polju centralne sile

$$\vec{f}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}_0. \tag{2.5}$$

Jednadžbu gibanja čestice

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\vec{r}_0 \tag{2.6}$$

možemo napisati u polarnim koordinatama

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 + m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{\varphi}_0 = f(r)\vec{r}_0. \tag{2.7}$$

Prethodna jednadžba u sebi sadrži dvije skalarne jednadžbe

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r), \tag{2.8}$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \tag{2.9}$$

Jednadžba (**2.9**) može se riješiti razdvajanjem varijabli

$$\frac{2\dot{r}}{r} = -\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}. \tag{2.10}$$

Koristeći pravilo lančanog deriviranja možemo napisati

$$2\frac{d}{dt}\ln r = -\frac{d}{dt}\ln\dot{\varphi} \qquad\qquad \Longrightarrow \frac{d}{dt}\ln(r^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{2.11}$$

Sačuvana veličina $mr^2\dot{\varphi}$ odgovara z komponenti momenta količine gibanju cilindričnim koordinatama. Već smo zaključili da je kutna količina gibanja $\vec{M}$ sačuvana po smjeru, a koordinatni sustav smo orijentirali tako da se $\vec{M}$ poklapa s osi z. Osim smjera, sačuvan je i iznos momenta količine gibanja

$$M_z \equiv M = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst.} \tag{2.12}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}. \tag{2.13}$$

Tada jednadžba (**2.8**) postaje

$$\ddot{r} - \frac{M^2}{m^2r^3} = \frac{1}{m}f(r). \tag{2.14}$$

Iskoristimo relaciju

$$\frac{M^2}{m^2r^3} = -\frac{M^2}{2m^2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}, \tag{2.15}$$

uz vezu sile i potencijalne energije

$$f(r) = -\frac{dU}{dr}, \tag{2.16}$$

$$\ddot{r} + \frac{M^2}{2m^2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{m}\frac{dU}{dr} \Longrightarrow m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left[U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}\right]. \tag{2.17}$$

Problem se svodi na gibanje u efektivnoj jednodimenzijskoj potencijalnoj energiji

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \tag{2.18}$$

Množenjem jednadžbe gibanja (**2.17**) s $\dot{r}$ dobivamo

$$m\ddot{r}\dot{r} = -\frac{dU_{eff}(r)}{dr}\dot{r} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)\right] = 0, \tag{2.19}$$

i dolazimo do očuvanja energije

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \qquad\qquad E(t) = konst. \tag{2.20}$$

3 Diferencijalna jednadžba orbite

Rješenje diferencijalne jednadžbe (**2.14**)

$$\ddot{r} - \frac{M^2}{m^2 r^3} = \frac{f(r)}{m}, \tag{3.1}$$

daje putanju $r(t)$. Da bismo našli orbitu čestice $r(\varphi)$ moramo eliminirati vrijeme u prethodnoj jednadžbi. U tu svrhu koristimo pravilo lančanog deriviranja i relaciju

$$M = mr^2\dot{\varphi} \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi} = \frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\varphi} \tag{3.3}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}\right). \tag{3.4}$$

Primijenimo operator $\frac{d^2}{dt^2}$ na položaj čestice

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{M}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) = \frac{M^2}{m^2 r^4}\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2M^2}{m^2 r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2. \tag{3.5}$$

Uvrstimo $\ddot{r}$ u jednadžbu (**3.1**)

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r = \frac{mr^4}{M^2} f(r). \tag{3.6}$$

Zamjenom $u = 1/r$ možemo doći do jednostavnije jednadžbe

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}, \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2 u}{d\varphi^2}. \tag{3.8}$$

Prethodne izraze uvrstimo u jednadžbu (**3.6**)

$$\frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - 2u\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{u} = \frac{m}{u^4 M^2} f(1/u) \tag{3.9}$$

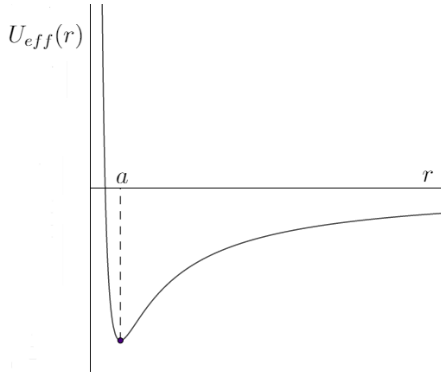
$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{M^2 u^2} f(1/u) \tag{3.10}$$

4 Stabilne i nestabilne kružne orbite

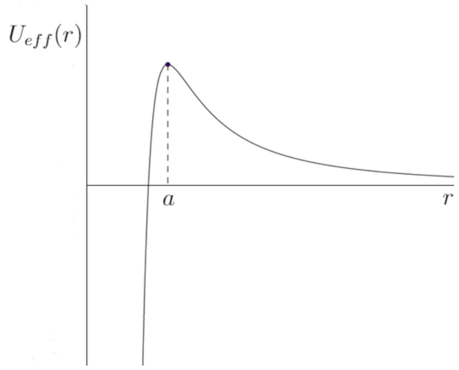
Pretpostavimo da se čestica mase m giba pod utjecajem centralne sile $\vec{f} = f(r)\vec{r_0}$.

Čestica se može gibati po kružnoj orbiti ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

- Efektivna potencijalna energija $U_{eff}(r)$ ima ekstrem (minimum ili maksimum)
- Energija čestice E jednaka je ekstremu potencijalne energije



Slika 2: Efektivna potencijalna energija ima minimum



Slika 3: Efektivna potencijalna energija ima maksimum

Efektivna potencijalna energija (**2.18**) ima ekstrem u točki $r = r_0$ ako njegova prva derivacija iščezava

$$U'_{eff}(r)\big|_{r=r_0} = U'(r_0) - \frac{M^2}{mr_0^3} = 0 \Rightarrow f(r_0) = -\frac{M^2}{mr_0^3} \tag{4.1}$$

Da bi gornji uvjet bio ispunjen, sila mora biti privlačna. To znači da je gibanje po kružnoj orbiti moguće samo ako je sila $\vec{f}(r)$ privlačna. Energija čestice mora biti jednaka ekstremu potencijalne energije

$$E = U(r_0) + \frac{M^2}{2mr_0^2} \tag{4.2}$$

Razlikujemo dva tipa kružne orbite:

- Stabilna kružna orbita (slika **2**)
  - Efektivna potencijalna energija ima minimum
  - Malo povećanje energije čestice vodi na orbitu koja više nije kružna, ali je i dalje omeđena i nalazi se blizu početne kružne orbite
- Nestabilna kružna orbita (slika **3**)
  - Efektivna potencijalna energija ima maksimum
  - Malo povećanje energije čestice vodi na orbitu koja je neomeđena i udaljava se od početne kružne orbite

Efektivna potencijalna energija ima minimum ako mu je druga derivacija u točki r_0 pozitivna

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r_0} = \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{3M^2}{mr_0^4} = -\left.\frac{df}{dr}\right|_{r_0} + \frac{3M^2}{mr_0^4} > 0. \tag{4.3}$$

Iskoristimo činjenicu da se u točki r_0 nalazi ekstrem

$$f(r_0) = -\frac{M^2}{mr_0^3} \Longrightarrow \frac{3M^2}{mr_0^4} = -\frac{3}{r_0}f(r_0). \tag{4.4}$$

Uvjet stabilnosti kružne orbite glasi

$$\left.\frac{df}{dr}\right|_{r_0} < -\frac{3}{r_0}f(r_0). \tag{4.5}$$

Pretpostavimo da se sila u blizini kružne orbite ponaša kao

$$f(r) = -\frac{k}{r^{n+1}}. \tag{4.6}$$

Uvjet stabilnosti kružne orbite (**4.5**) nam daje ograničenje na parametar n

$$\frac{(n+1)k}{r_0^{n+2}} < \frac{3k}{r_0^{n+2}} \qquad \Rightarrow n < 2. \tag{4.7}$$

Samo privlačne sile koje padaju sporije od $1/r^2$ mogu dati stabilnu kružnu orbitu, dok sile koje padaju brže od $1/r^2$ daju nestabilne kružne orbite.

5 Mali titraji oko kružne orbite

Pretpostavimo da se čestica mase m giba po stabilnoj kružnoj orbiti polumjera r_0. Ako energiju čestice povećamo za mali iznos, orbita više neće biti kružnica, ali će i dalje biti omeđena. Pericentar i apocentar će se pritom malo razlikovati od polumjera početne kružne orbite r_0. Drugim riječima, malo povećanje energije čestice vodi na mala odstupanja od kružne orbite

$$r(\varphi) = r_0 + r_1(\varphi), \qquad r_1 \ll r_0, \tag{5.1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + r_1} = \frac{1}{r_0}\frac{1}{1+\frac{r_1}{r_0}} \approx \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{r_1}{r_0}\right) \tag{5.2}$$

Uz zamjenu $u = 1/r$, dolazimo do zaključka

$$u \approx u_0 + u_1, \qquad u_1 \ll u_0. \tag{5.3}$$

U diferencijalnoj jednadžbi orbite (**3.10**) pojavljuje se funkcija

$$J(u) \equiv -\frac{m}{M^2u^2} f(1/u), \tag{5.4}$$

Koju možemo razviti u Taylorov red oko vrijednosti u_0

$$J(u) = J(u_0) + J'(u_0)(u - u_0) + \cdots. \tag{5.5}$$

Uvrstimo Taylorov razvoj funkcije $J(u)$ u diferencijalnu jednadžbu orbite

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = J(u_0) + J'(u_0)(u - u_0). \tag{5.6}$$

Iskoristimo uvjet ravnoteže sile $f(r)$ i centrifugalne sile u početnoj kružnoj orbiti

$$f(r_0) = -\frac{M^2}{mr_0^3} \Rightarrow \frac{mr_0^2}{M^2} f(r_0) = -\frac{1}{r_0} \tag{5.7}$$

da bismo izračunali $J(u_0)$

$$J(u_0) = -\frac{m}{M^2u_0^2} f(1/u_0\,) = u_0. \tag{5.8}$$

Diferencijalna jednadžba (**5.6**) poprima oblik

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - u_0 = J'(u_0)(u - u_0). \tag{5.9}$$

Definiramo odstupanje od ravnotežne vrijednosti

$$x = u - u_0 \tag{5.10}$$

i uvrstimo ga u jednadžbu (**5.9**)

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = J'(u_0)x \Longrightarrow \frac{d^2x}{d\varphi^2} + [1 - J'(u_0)]x = 0. \tag{5.11}$$

Ako je ispunjen uvjet za frekvenciju

$$\omega^2 \equiv 1 - J'(u_0) > 0 \tag{5.12}$$

radi se o jednadžbi harmonijskog oscilatora. Računamo derivaciju funkcije $J(u)$ u točki ravnoteže

$$J'(u) = \frac{d}{du}\left[-\frac{m}{M^2u^2}f(1/u)\right] \tag{5.13}$$

$$= \frac{2m}{M^2u^3}f(1/u) - \frac{m}{M^2u^2}f'(1/u)\left(\frac{-1}{u^2}\right) \tag{5.14}$$

$$= \frac{2m}{M^2u^3}f(1/u) + \frac{m}{M^2u^4}f'(1/u). \tag{5.15}$$

Iskoristimo uvjet (**5.8**)

$$\frac{m}{M^2u_0^2}f(1/u_0) = -u_0, \tag{5.16}$$

da bismo dobili traženu derivaciju

$$J'(u_0) = -2 - \frac{f'(1/u_0\,)}{u_0 f(1/u_0\,)}. \tag{5.17}$$

Frekvencija u jednadžbi (**5.11**) iznosi

$$\omega^2 = 1 - \left[-2 - \frac{f'(1/u_0\,)}{u_0 f(1/u_0\,)}\right] \tag{5.18}$$

ili izraženo pomoću varijable r_0

$$\omega^2 = 3 + \frac{r_0}{f(r_0)}f'(r_0). \tag{5.19}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (**5.11**) glasi

$$u = u_0 + a\cos\omega\varphi. \tag{5.20}$$

Vratimo se na varijablu r

$$r(\varphi) = \frac{1}{u_0 + a\cos\omega\varphi} = \frac{1}{u_0}\frac{1}{1 + \frac{a}{u_0}\cos\omega\varphi} \tag{5.21}$$

i razvijemo rješenje u Taylorov red

$$r(\varphi) \approx \frac{1}{u_0}\left[1 - \frac{a}{u_0}\cos\omega\varphi\right] = r_0 - b\cos\omega\varphi, \tag{5.22}$$

gdje je $b = a/u_0^2$.

6 Zatvorene orbite

Da bi orbita pri malim odstupanjima od kružnice ostala zatvorena, frekvencija ω mora biti omjer dva cijela broja

$$\omega = \frac{p}{q}. \tag{6.1}$$

U tom slučaju se orbita zatvara nakon što vektor položaja prebriše kut $2q\pi$. Ako promatramo samo male titraje oko kružnih orbita, zatvorene orbite su moguće za široku klasu potencijalne energije. U općenitom slučaju, omeđene orbite su uvijek zatvorene samo za Keplerove potencijalne energije i potencijalne energije harmonijskog oscilatora (Bertrandov teorem).

7 Primjer 1

Čestica mase m giba se po krivulji bliskoj kružnici polumjera r_0 u centralnom polju

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}, \qquad n \geq 0. \tag{7.1}$$

Pronađite orbitu. Koji uvjet mora biti ispunjen da bi orbita bila zatvorena?

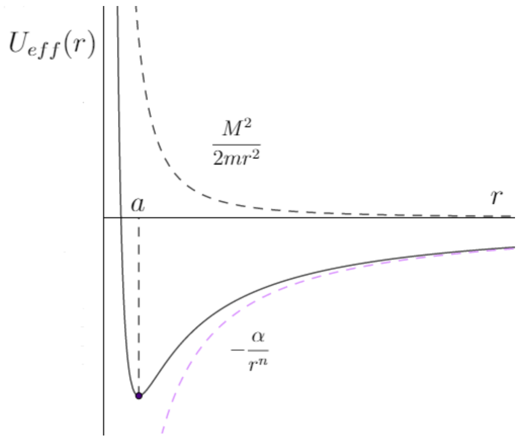
Rješenje:

Da bi se čestica gibala po orbiti bliskoj kružnici, kružna orbita polumjera r_0 mora biti stabilna. Efektivna potencijalna energija

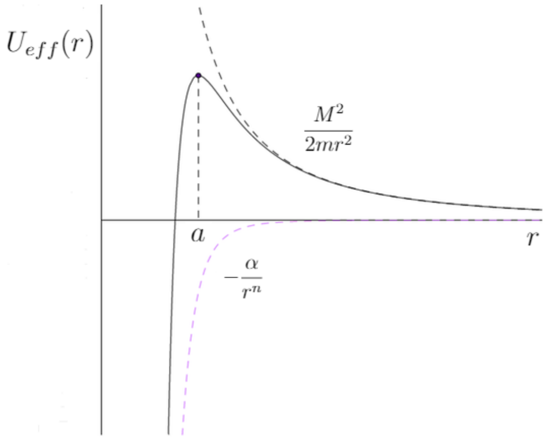
$$U_{eff} = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{M^2}{2mr^2}, \tag{7.2}$$

mora imati minimum na udaljenosti r_0 od centra sile. Izgled efektivne potencijalne energije ovisi o parametru n (slika **4** i slika **5**). Stabilne kružne orbite su moguće samo ako vrijedi

$$0 < n < 2, \tag{7.3}$$



Slika 4: Efektivna potencijalna energija ima minimum za $n < 2$.



Slika 5: Efektivna potencijalna energija ima maksimum za $n > 2$.

dok u ostalim slučajevima kružne orbite ne postoje ili su nestabilne. Ograničimo se stoga na slučaj $0 < n < 2$. Silu koja djeluje na česticu možemo izračunati iz zadane potencijalne energije

$$f(r) = -\frac{dU}{dr} = -\frac{\alpha n}{r^{n+1}}. \tag{7.4}$$

Diferencijalna jednadžba orbite u ovom slučaju glasi

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{M^2u^2}(-\alpha n u^{n+1}) = \frac{mn\alpha}{M^2}u^{n-1}. \tag{7.5}$$

Desnu stranu razvijemo u Taylorov red oko ravnotežne točke u_0

$$u^{n-1} = u_0^{n-1} + (n-1)u_0^{n-2}(u - u_0) + \cdots, \tag{7.6}$$

a zatim uvrstimo Taylorov razvoj u diferencijalnu jednadžbu orbite

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{mn\alpha}{M^2}u_0^{n-1} + (n-1)\frac{mn\alpha}{M^2}u_0^{n-2}(u - u_0). \tag{7.7}$$

U ravnotežnoj točki (kružna orbita) vrijedi

$$\frac{M^2}{mr_0^3} = f(r_0) \Rightarrow \frac{M^2}{m}u_0^3 = \alpha n u_0^{n+1} \Rightarrow \frac{mn\alpha}{M^2} = u_0^{2-n}. \tag{7.8}$$

Uvrstimo prethodne rezultate u diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = u_0^{2-n}u_0^{n-1} + (n-1)u_0^{2-n}u_0^{n-2}(u - u_0) \tag{7.9}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = u_0 + (n-1)(u - u_0). \tag{7.10}$$

Prijelazom na varijablu $x = u - u_0$ dolazimo do konačnog oblika diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + (2-n)x = 0. \tag{7.11}$$

Radi se o jednadžbi harmonijskog oscilatora s frekvencijom

$$\omega^2 = 2 - n, \tag{7.12}$$

Pri čemu je frekvencija realna jer smo pretpostavili da vrijedi $2 - n > 0$. Koordinatni sustav orijentiramo tako da vrijedi $u(\varphi = 0) = u_0$

$$u(\varphi) = u_0 + a\sin\omega\varphi. \tag{7.13}$$

Da bi orbita bila zatvorena, ω mora biti racionalan broj

$$\omega = \sqrt{2-n} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 - n = \frac{p^2}{q^2}. \tag{7.14}$$

Uvjet na parametar n potencijalne energije da bi orbita bila zatvorena

$$n = 2 - \frac{p^2}{q^2}. \tag{7.15}$$

Da bismo skicirali orbitu, moramo se vratiti na radijalnu varijablu

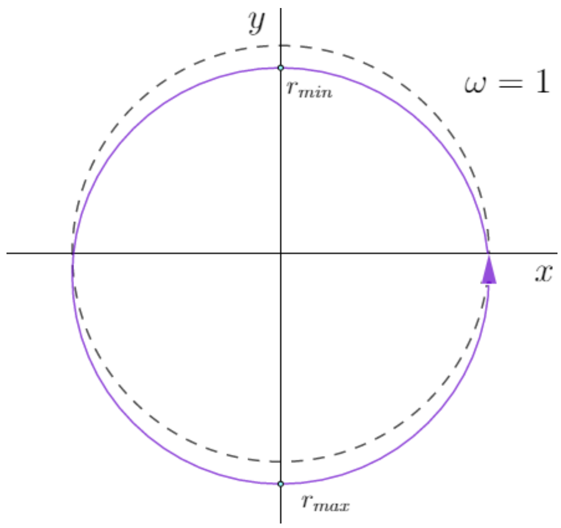
$$r(\varphi) = \frac{1}{u_0 + a \sin \omega\varphi} = \frac{1}{u_0} \frac{1}{1 + \frac{a}{u_0} \sin \omega\varphi}. \tag{7.16}$$

Napravimo Taylorov razvoj

$$r(\varphi) \approx \frac{1}{u_0}\left(1 - \frac{a}{u_0} \sin \omega\varphi\right) = r_0(1 - a r_0 \sin \omega\varphi). \tag{7.17}$$

Najjednostavniji primjer je $n = 1$, odnosno $\omega = 1$. Radi se o Keplerovoj potencijalnoj energiji pa ako čestici u kružnoj orbiti malo povećamo energiju, ona će se gibati po elipsi. Položaji pericentra i apocentra određeni su uvjetima

$$\sin \varphi_p = 1 \Rightarrow \varphi_p = \frac{\pi}{2}, \qquad \sin \varphi_a = -1 \Rightarrow \varphi_a = \frac{3\pi}{2}. \tag{7.18}$$



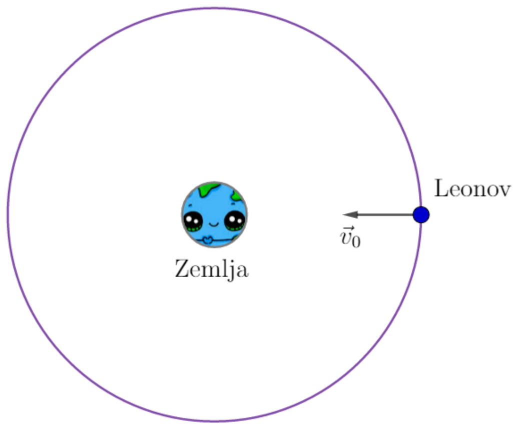
Slika 6: Mali titraji oko kružne orbite u slučaju Keplerove potencijalne energije

8 Primjer 2

Za vrijeme šetnje svemirom astronaut Leonov baci poklopac objektiva kamere prema Zemlji. Opišite u prvom redu računa smetnje gibanja poklopca u odnosu na svemirski brod ako je poklopac izbačen brzinom 10 m/s. Brod se giba u kružnoj orbiti s periodom $\tau = 1.4$h.

Rješenje:

Pri rješavanju zadatka koristimo tri skupa koordinata



Slika 7: Astronaut izbacuje poklopac radijalno prema Zemlji.

- Koordinate broda u odnosu na Zemlju: r_0, φ_0
- Koordinate poklopca u odnosu na brod: r_1, φ_1
- Koordinate poklopca u odnosu na Zemlju: r, φ

Veza između pojedinih koordinata glasi

$$r = r_0 + r_1 \quad \text{i} \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1. \tag{8.1}$$

Svemirski brod se giba u kružnoj orbiti pa je radijalna udaljenost konstantna, kao i kutna brzina broda

$$\dot{r_0} = 0, \qquad \dot{\varphi_0} \equiv \Omega = \frac{2\pi}{\tau}. \tag{8.2}$$

Brzina kojom astronaut baca poklopac je mnogo manja od brzine broda pa očekujemo da se poklopac oko Zemlje giba u orbiti bliskoj orbiti broda

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1 \ll \dot{\varphi}_0 \quad \text{i} \quad r_1 \ll r_0. \tag{8.3}$$

Jednadžbe gibanja u polju centralne sile

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\alpha}{r^2} \tag{8.4}$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \tag{8.5}$$

Prvi red računa smetnje znači da u svim jednadžbama zadržavamo samo linearne članove malih veličina, dok kvadratične i sve ostale članove višeg reda zanemarujemo. Takav postupak obično zovemo linearizacija jednadžbi gibanja. Promotrimo jednadžbu gibanja **(8.4)**. Prvi član je jednostavan jer je radijalna udaljenost broda konstantna

$$\ddot{r} = \ddot{r}_0 + \ddot{r}_1 = \ddot{r}_1 \tag{8.6}$$

U drugom članu zanemarujemo sve kvadratične članove malih veličina r_1 i $\dot{\varphi}_1$, te uz oznake $\dot{\varphi}_0 = \Omega$ i $\ddot{r}_0 = 0$ možemo pisati

$$(r_0 + r_1)(\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1)^2 = (r_0 + r_1)(\dot{\rho}_0^2 + 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1^2) \tag{8.7}$$

$$\approx (r_0 + r_1)(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\varphi}_1) \tag{8.8}$$

$$\approx r_0\Omega^2 + 2r_0\Omega\dot{\varphi}_1 + \Omega^2 r_1. \tag{8.9}$$

Desnu stranu jednadžbe razvijemo u Taylorov red

$$\frac{\alpha}{(r_0 + r_1)^2} = \frac{\alpha}{r_0^2}\frac{1}{\left(1 + \frac{r_1}{r_0}\right)^2} \approx \frac{\alpha}{r_0^2}\left(1 - \frac{2r_1}{r_0} + \cdots\right). \tag{8.10}$$

Dobivenu jednadžbu

$$\ddot{r}_1 - (r_0\Omega^2 + 2r_0\Omega^2\dot{\varphi}_1 + \Omega^2 r_1) = -\frac{\alpha}{r_0^2}\left(1 - \frac{2r_1}{r_0}\right), \tag{8.11}$$

možemo podijeliti u nulti i prvi red

- nulti red:

$$r_0\Omega^2 = \frac{\alpha}{r_0^2} \Longrightarrow \Omega^2 = \frac{\alpha}{r_0^3} \tag{8.12}$$

- prvi red

$$\ddot{r}_1 - 2r_0\Omega\dot{\varphi}_1 - 3\Omega^2 r_1 = 0 \tag{8.13}$$

Da bismo izračunali $\dot{\varphi}_1$ koristimo jednadžbu (**8.5**)

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \tag{8.14}$$

Uvrstimo $r = r_0 + r_1$ i $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$

$$2(\dot{r}_0 + \dot{r}_1)(\,\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1) + (r_0 + r_1)(\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_1), \tag{8.15}$$

te zatim iskoristimo činjenicu da se brod giba u kružnoj orbiti

$$\dot{r}_0 = 0\,, \qquad \ddot{\varphi}_0 = 0, \qquad \dot{\varphi}_0 = \Omega \tag{8.16}$$

$$2\Omega\dot{r}_1 + 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 + r_0\ddot{\varphi}_1 + r_1\ddot{\varphi}_1 = 0. \tag{8.17}$$

U prvom redu računa smetnje zadržimo samo linearne članove malih veličina

$$2\Omega\dot{r}_1 + r_0\ddot{\varphi}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi}_1 = -\frac{2\Omega}{r_0}\dot{r}_1 \tag{8.18}$$

Integriramo prethodnu jednadžbu

$$\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_1(0) = -\frac{2\Omega}{r_0}\big(r_1(t) - r_1(0)\big). \tag{8.19}$$

Leonov u početnom trenutku poklopac baca radijalno

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1(0) = 0, \tag{8.20}$$

a u početnom trenutku se poklopac nalazi u njegovoj ruci

$$\Rightarrow r_1(0) = 0. \tag{8.21}$$

Od rješenja (**8.19**) preostaje

$$\dot{\varphi}_1(t) = -\frac{2\Omega}{r_0}r_1(t). \tag{8.22}$$

Uvrstimo prethodni rezultat u jednadžbu u (**8.13**)

$$\ddot{r}_1 - 2r_0\Omega\dot{\varphi}_1 - 3\Omega^2 r_1 = 0 \Longrightarrow \ddot{r}_1 + \Omega^2 r_1 = 0 \tag{8.33}$$

Radi se o jednadžbi harmonijskog oscilatora s rješenjem

$$\Longrightarrow r_1(t) = A\sin(\Omega\mathrm{t}) + B\cos(\Omega\mathrm{t}) \tag{8.34}$$

Konstante A i B određujemo iz početnih uvjeta

- poklopac je u astronautovoj ruci

$$\Longrightarrow r_1(0) = 0 \Longrightarrow B = 0 \tag{8.35}$$

- poklopac je bačen radijalno

$$\dot{r}_1(0) = -v_o \Longrightarrow A = -\frac{v_0}{\Omega} \tag{8.36}$$

Radijalna koordinata poklopca

$$r(t) = r_0 - \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega\mathrm{t}) \tag{8.37}$$

Iz jednadžbe

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{2\Omega}{r_0}r_1(t) \tag{8.38}$$

Integriranjem dolazimo do

$$\varphi_1(t) = -\frac{2v_0}{r_0\Omega}\cos(\Omega t) + C. \tag{8.39}$$

Poklopac se u početnom trenutku nalazi u astronautovoj ruci

$$\varphi_1(0) = 0 \Longrightarrow C = \frac{2v_o}{r_0\Omega}. \tag{8.40}$$

Kutna koordinata poklopca

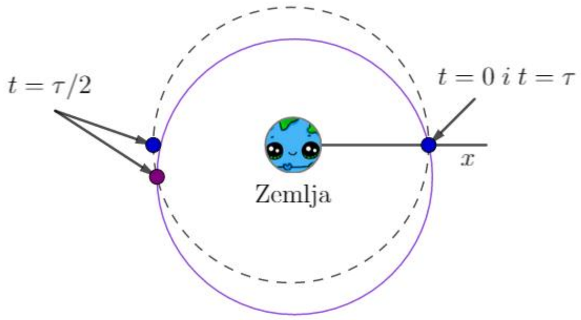
$$\varphi(t) = \Omega t + \frac{2v_o}{r_0\Omega}(1 - \cos\Omega t). \tag{8.41}$$

Koordinate poklopca su

$$r(t) = r_0 - \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t) \tag{8.42}$$

$$\varphi(t) = \Omega t + \frac{2v_0}{r_0\Omega}(1 - \cos\Omega t)\,. \tag{8.43}$$

Amplituda radijalnih titraja iznosi $v/\Omega\ \approx 8km$. Nakon vremena $\tau = 2\pi/\Omega = 1.4h$ poklopac opet dolazi u ruku astronautu. Brod i poklopac se u početnom trenutku nalaze na osi x, kao i u trenutku $t = \tau$. U svim ostalim trenucima poklopac i brod su razdvojeni.



Slika 8: Orbite broda, tj. astronauta (crtkana linija) i poklopca (puna linija).

9 Zaključak

Čestica se samo uz određene uvjete može gibati po kružnoj putanji u polju centralne sile. Pomoću uvjeta stabilnosti smo pokazali smo da privlačne sile koje padaju sporije od $1/r^2$ mogu dati stabilnu kružnu orbitu, dok sile koje padaju brže od $1/r^2$ daju nestabilne kružne orbite. U primjeru Keplerove potencijalne energije ako čestici u kružnoj orbiti malo povećamo energiju, ona će se gibati po elipsi.

10 Literatura

[1] Nikšić T., Klasična mehanika 1

URL: https://vdocuments.mx/klasicna-mehanika-1-phypmfunizghr-tniksicklasicnaibiljeske-klasicna.html

[2] Glumac Z., Klasična mehanika kratak uvod

URL: http://gama.fizika.unios.hr/~zglumac/utm.pdf

[3] Ilijić S., Mehanika – pojmovi, načela i odabrani primjeri

URL: http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika.pdf

[4] Dulčić A., Mehanika

URL: http://www.phy.pmf.unizg.hr/~matko/GRAD/Mehanika.pdf

11 Životopis

Barbara Špigl rođena je 06.05.1994. godine u Požegi, RH. Pohađala je osnovnu glazbenu školu i istu završila 2008. godine. Srednju tehničku školu, smjer mehatronika, upisuje 2009. godine u Požegi i završava ju 2013. godine te iste godine upisuje preddiplomski studij fizike na Odjelu za fiziku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, gdje trenutno studira.