

ANALIZA DETERMINISTIČKOG KAOSA KORIŠTENJEM NUMERIČKIH ALATA U PYTHONU

Savanović, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Physics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:160:805068>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-04**



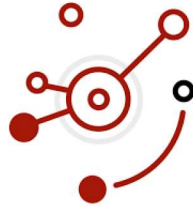
Repository / Repozitorij:

[Repository of Department of Physics in Osijek](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU



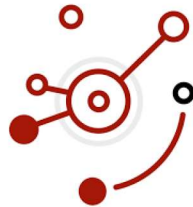
FILIP SAVANOVIĆ

**ANALIZA DETERMINISTIČKOG KAOSA
KORIŠTENJEM NUMERIČKIH ALATA U PYTHONU**

Osijek, 2022.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU



FILIP SAVANOVIĆ

**ANALIZA DETERMINISTIČKOG KAOSA
KORIŠTENJEM NUMERIČKIH ALATA U PYTHONU**

Diplomski rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku radi
stjecanja akademskog naziva magistra edukacije fizike i informatike

Osijek, 2022.

Ovaj diplomski rad izrađen je pod vodstvom mentora doc. dr. sc. Darija Hrupeca u sklopu Sveučilišnog diplomskog studija Fizike i informatike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

Najviše me zanima filozofija života. Želim prodrijeti u misterij života.

Blaženi Ivan Merz, DNEVNIK, 2. IV. 1914.

Sadržaj

1	Uvod	1
I Teorijska podloga		
2	Uvod u teoriju nelinearnih sustava	3
2.1	Općenito	3
2.2	Slom determinizma	4
2.3	Nelinearni sustavi	5
2.3.1	Nekoliko važnih svojstava	6
3	Uvod u teoriju determinističkog kaosa	8
3.1	Formalizam i klasifikacija	10
3.1.1	Čudni atraktori	10
3.1.2	Probabilistički pristup	10
3.2	Ljapunovljevi eksponenti	11
3.2.1	Procjena vodećeg eksponenta	12
II Rezultati i rasprava		
4	Deterministički kaos u diskretnim klasičnim sustavima	14
4.1	Logistička jednadžba	14
4.1.1	Periodički atraktori	15
4.1.2	Kaotični atraktor	20
4.2	Osjetljivost na početne uvjete	21
4.3	Bifurkacijski dijagram	24
4.4	Prozori regularnosti	25
4.5	Računalna preciznost	27
5	Deterministički kaos u kontinuiranim klasičnim sustavima	28
5.1	Tjerano njihalo	28
5.1.1	Jednadžba gibanja	28

5.1.2	Rješenje jednačbe gibanja i prijelaz u kaos	30
5.1.3	Fazni prostor	39
5.1.4	Analiza rezultata	40
5.2	Lorenzov model	41
5.2.1	Opis modela	42
5.2.2	Vizualizacija	45
5.2.3	Osjetljivost na početne uvjete	50
5.2.4	Veza s meteorologijom	56
6	Zaključak	57
	Literatura	59
	Životopis	60

Odjel za fiziku

ANALIZA DETERMINISTIČKOG KAOSA KORIŠTENJEM NUMERIČKIH ALATA U PYTHONU

Sažetak

Deterministički je kaos teorija koja opisuje određene nelinearne sustave koji posjeduju izrazitu osjetljivost na početne uvjete. Takvi su sustavi deterministički u smislu da im je vremenska evolucija u potpunosti određena rješavanjem pripadne diferencijalne jednadžbe i poznavanjem početnih uvjeta. Ponašanje ovakvih u načelu jednostavnih sustava može biti izrazito nepredvidljivo i kaotično za dovoljno duge vremenske serije. U ovom ćemo diplomskom radu analizirati tri takva deterministička sustava i demonstrirati pod kojim će uvjetima doći do prijelaza u kaos. Najprije ćemo u teorijskoj podlozi uvesti notaciju i dati pregled osnovnih svojstava, a zatim u drugom dijelu riješiti pripadne diferencijalne jednadžbe te varirati kontrolni parametar i početne uvjete. U toj ćemo analizi koristiti numeričke alate u Pythonu.

(60 stranica, 37 slika, 5 tablica, 29 literaturnih navoda)

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: nelinearni sustavi; deterministički kaos; diferencijalne jednadžbe; početni uvjeti; atraktor; Python.

Mentor: doc. dr. sc. Dario Hrupec

Ocjenjivači:

Rad prihvaćen:

Department of Physics

ANALYSIS OF DETERMINISTIC CHAOS BY USING NUMERICAL TOOLS IN PYTHON

Abstract

Deterministic chaos is a theory which describes certain nonlinear dynamical systems that have a very sensitive dependence on initial conditions. Those system are deterministic in a sense that their time evolution is determined by solving corresponding differential equations and knowing the initial conditions. Behavior of this in principle simple systems can be very chaotic if the time series are long enough. In this master's thesis we will analyse three such deterministic systems and thus demonstrate the route to chaos. Firstly, we will introduce notation and give some basic properties in the theoretical introduction and after that we will solve corresponding differential equations and vary the control variable along with the initial conditions. In this analysis we will use numerical tools in Python.

(60 pages, 37 figures, 5 tables, 29 references)

Thesis deposited in Department of Physics library

Keywords: nonlinear systems; deterministic chaos; differential equations; initial conditions; attractor; Python.

Supervisor: Dario Hrupec, PhD, Assistant Professor

Reviewers:

Thesis accepted:

1 Uvod

Budući da ovaj diplomski rad u svome naslovu sadrži sintagmu deterministički kaos, to bi valjalo na samom početku objasniti značenje obje riječi. Krenimo najprije od riječi kaos. Kaos dolazi od grčke riječi "λαος", koja u svom originalnom značenju označava beskonačnu praznu tvar koja je postojala prije svega. U ovom ćemo radu ipak koristiti ponešto drukčije značenje riječi kaos te će riječ kaos imati značenje takvog stanja sustava koje je neregularno, nepredvidljivo. Također, promatrat ćemo takve sustave čija je eksplicitna ovisnost o vremenu deterministička, tj. postoji jasan zakon, izražen diferencijalnim jednadžbama, koji u potpunosti određuje vremensku evoluciju sustava za dane početne uvjete. Ono što ćemo vidjeti jest da je naivna pretpostavka kako se deterministički sustavi, generirani npr. rješavanjem kontinuiranih diferencijalnih jednadžbi, ponašaju regularno, tj. ne ponašaju se kaotično, ipak bila samo naivna. Jasno ćemo pokazati da se čak i mehanički sustavi, čija je vremenska evolucija u potpunosti deterministička, mogu ponašati kaotično. Dakle, glavni cilj ovoga rada jest pokazati iregularno, odnosno kaotično ponašanje koje pokazuju NELINEARNI sustavi čija je vremenska evolucija u potpunosti određena rješavanjem pripadnih diferencijalnih jednadžbi te poznavanjem početnih uvjeta. U toj ćemo se analizi koristiti računalom, konkretno programskim jezikom Python i pripadnim numeričkim alatima. [1], [2], [3], [24]

Sama kompizicija rada bit će sljedeća. Najprije će biti dan kratak teorijski uvod, više s ciljem da se uvede notacija i iskažu osnovna svojstva, nego da se dane teorije izlože na nekakav sustavan način. Nakon toga će biti dan i pregled numeričkih alata u Pythonu koji će biti korišteni zajedno s njihovim značenjem. Konačno, riješit ćemo nekoliko primjera i za diskretne i za kontinuirane vremenske serije kako bi pokazali prijelaz u kaotični način rada.

Dio I

Teorijska podloga

2 Uvod u teoriju nelinearnih sustava

Da bismo uopće mogli proučavati sustave koji posjeduju mogućnost prijelaza u kaotični režim (deterministički kaos), treba najprije odgovoriti na pitanje: postoji li neko općenito svojstvo koje posjeduju svi sustavi koji mogu prijeći u kaotičan (nasumičan, nepredvidljiv) način rada? Odgovor na ovo pitanje je potvrđan i on se zove NELINEARNOST. U tom se smislu korisno najprije upoznati, barem na načelnoj razini, sa sustavima koji su nelinearni kako bi bolje razumijeli porijeklo kaosa u sustavima koji su deterministički¹. [4], [5]

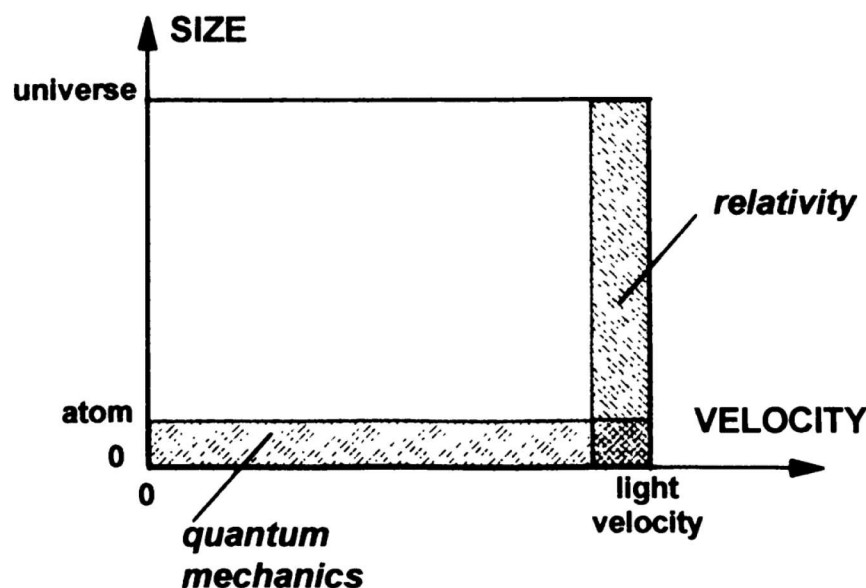
2.1 Općenito

Slika svijeta kao krutog i zadanog, determinističkog sustava prvi je put značajno potkopana upravo u okviru jednog dijela fizike koji se zove dinamika. Konkretno, u okviru dvije nove, do tada potpuno nepoznate teorije: *teorije relativnosti* i *kvantne mehanike*. S ove je dvije teorije pokazano da deterministička slika svijeta prestaje vrijediti za dva slučaja: ako je brzina promatranog objekta bliska brzini svjetlosti, $v \approx c$, (specijalna teorija relativnosti) te ako su dimenzije promatranog objekta mikroskopske ($< 10^{-8}$ cm, kvantna mehanika). [5]

Konkretno, klasična je mehanika kretala od pretpostavke da su dvije veličine beskonačnog iznosa: brzina svjetlosti, c , te recipročna vrijednost Planckove konstante, $1/h$. Konačan karakter ove dvije veličine vodio je najprije do specijalne teorije relativnosti, a zatim i do kvantne mehanike.

U tom su smislu bile potrebne dvije značajne reformulacije (popravka) – prostor i vrijeme više nije smatran apsolutnim (specijalna teorija relativnosti) te razbijanje iluzije o apsolutnoj objektivnosti prilikom procesa mjerenja (kvantna mehanika). Konačno, pokazalo se da još jedna pretpostavka klasične mehanike također nije točna – ona o beskonačnoj računalnoj i opservacijskoj preciznosti. Upravo je još jednom reformulacijom klasične mehanike, poradi rušenja ove treće pretpostavke, rođena jedna posve nova teorija – *teorija determinističkog kaosa*. Teorija determinističkog kaosa, po svome se značaju, može smatrati važnom za razumijevanje onih fizičkih procesa čije je ponašanje bilo shvaćeno kao potpuno nasumično. [11], [12]

¹Dakle, da bi neki sustav posjedovao svojstvo determinističkog kaosa on mora najprije biti nelinearan.



Slika 2.1: Prikaz područja za koje vrijedi teorija relativnosti te kvantna mehanika. Za razliku od ove dvije teorije, teoriju o nelinearnim sustavima možemo primijeniti na čitavom području prikazanom na grafu. [11]

2.2 Slom determinizma

U prethodnom dijelu teksta, često smo spominjali sintagmu deterministički sustav stoga objasnimo sada pobliže što ona znači. U slici svijeta koju nudi klasična mehanika, ili kako se još zna reći Newtonova mehanika, svi dinamički sustavi ponašaju se deterministički – vremenska je evolucija sustava u potpunosti određena, s proizvoljnim stupnjem točnosti, rješavajući pripadne jednadžbe gibanja te poznavajući položaj i brzinu svih elemenata sustava u nekom fiksnom vremenskom trenutku (početne uvjete). U tom su smislu trajektorije takvih objekata u potpunosti određene².

Ovakav je pogled na zbivanja u prirodi možda najbolje izrazio Laplace, kada je rekao otprilike sljedeće; *mi bismo trebali smatrati sadašnje stanje svemira kao posljedicu svih prethodnih stanja svemira i kao uzrok njegovog budućeg stanja.*

Ono što je kasnije shvaćeno jest to da naše poznavanje *sadašnjeg stanja svemira* nije potpuno, nego tek aproksimativno. U tom se smislu kao kontrapunkt ovoj Laplaceovoj tezi može uzeti fizičar Henri Poincare, koji je, između ostalog, razmatrao jedan problem u klasičnoj mehanici koji se naziva *Problem tri tijela* iz nebeske mehanike gdje je ustanovio da čak i sustavi koji su u potpunosti vođeni determinističkim zakonima mogu proizvesti opažanja koju su posve nasumična. Nakon tih zapažanja Poincare je rekao otprilike; *Čak i u situaciji kada su nam prirodni zakoni potpuno poznati, možemo početno stanje sustava znati tek približno, aproksimativno, te se može dogoditi da i neznatno male promijene u početnim uvjetima mogu uzrokovati znatne promijene u kranjem rezultatu.*

²Za razliku od npr. kvantne mehanike gdje, zbog Heisenbergovih relacija neodređenosti, ne možemo uopće govoriti o pojmu trajektorije čestice.

Također valja napomenuti da ovo naizgled nasumično ponašanje sustava ne možemo pripisati utjecaju nepoznatih faktora budući da je takav utjecaj posve eliminiran. Također, ovakvo se ponašanje sustava ne može pripisati niti činjenici da postoje sustavi sa beskonačno mnogo stupnjeva slobode (kao npr. Brownovo gibanje čestice okružene molekulama medija), budući da je ovakvo kaotično gibanje moguće i za sustave sa samo dva stupnja slobode. [5]



Slika 2.2: Pierre-Simon Laplace [29]



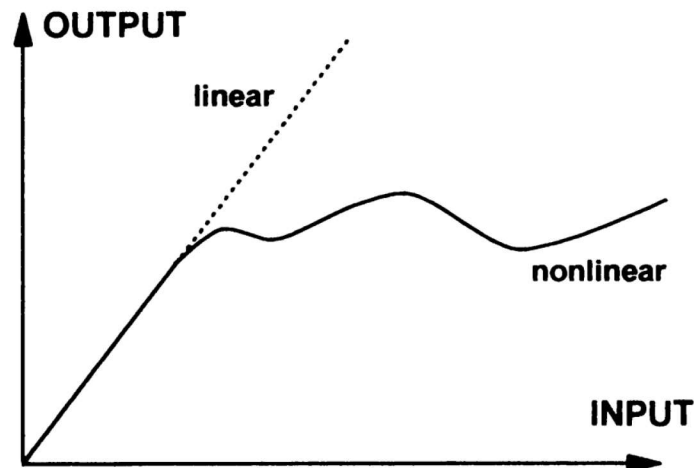
Slika 2.3: Henri Poincaré [28]

Sve nas ovo vodi na jasan zaključak da uvijek mora postojati određena količina neznanja o samom sustavu, koju je nemoguće izbjeći. Time je u potpunosti razbijena gore spomenuta laplasijanska iluzija o potpunoj determinističkoj predvidljivosti.

2.3 Nelinearni sustavi

Za neki ćemo sustav reći da je nelinearan ako izlazni parametri sustava nisu razmjerni ulaznim parametrima sustava, tj. ono što iz sustava izlazi nije razmjerno onom što u sustav ulazi. Npr. dielektrični kristal postaje nelinearan ako intenzitet svjetlosti koja izlazi iz kristala više nije razmjernan intenzitetu svjetlosti koja upada na kristal. Ili, još plastičnije, sustav ocjenjivanja kojeg koriste neki profesori npr. fizike, postaje nelinearan ako ocjene koje dobivaju studenti/učenici ne rastu linearno s vremenom koje su studenti/učenici uložili u pripremu ispita (što je gotovo uvijek slučaj). Općenito gledano, gotovo su svi sustavi, razmatrani bilo u prirodnim ili društvenim znanostima, nelinearni, ali uz uvjet DA JE BROJ ULAZNIH PARAMETARA SUSTAVA DOVOLJNO VELIK. [5], [11]

Kao ogledni primjer dobro poznatog nelinearnog sustava u literaturi se često navodi primjer elastične opruge. U slučaju kada pomak iz položaja ravnoteže (elongacija) postane dovoljno velik, Hookeov zakon više ne vrijedi te elastična žica postaje nelinearni oscilator. Slično vrijedi i za matematičko njihalo (koje će biti detaljno obrađeno u poglavlju 5.).



Slika 2.4: Uz definicije nelinearnog sustava. Isprekidana linija predstavlja linearni sustav, kod kojeg su izlazni parametri razmjerni ulaznim parametrima sustava. Podebljana linija predstavlja nelinearni sustav, kod kojeg to nije slučaj. [11]

Ako bismo pak poželjeli iskazati definiciju nelinearnih sustava koja je ipak ponešto formalnija, onda se može uočiti da svi nelinearni sustavi ostavljaju jednak *matematički otisak*. Naime, za sve nelinearne sustave vrijedi to da se na njima ne može primijeniti princip superpozicije, koji kaže da je linearna kombinacija dva rješenja jednadžbe gibanja sustava također rješenje jednadžbe gibanja sustava. Postoje dva slučaja za koja princip superpozicije jednadžbe gibanja više ne vrijedi;

(1) Sama jednadžba gibanja jest nelinearna. Npr. jednadžba gibanja jednostavnog matematičkog njihala (bez prigušenja i vanjske sile)

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right) \sin \theta = 0 \quad (2.1)$$

gdje je nelinearni član oblika $\sin \theta$. Ono što se može pokazati da ako su $\theta_1(t)$ i $\theta_2(t)$ rješenja jednadžbe (2.1), njihova linearna kombinacija $\theta_1(t) + \theta_2(t)$ neće biti rješenje. To proizlazi iz jednostavne trigonometrijske činjeice $\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) \neq \sin(\theta_1 + \theta_2)$;

(2) Druga je pak mogućnost da je sama jednažba gibanja linearna, no da je granica između elemenata sustava ili nepoznata ili nestacionarna (dinamična). Npr. mješanje dva viskozna fluida koji su odvojeni propusnom pločom čiji je oblik i način kretanja nepoznat. [9]

2.3.1 Nekoliko važnih svojstava

Nelinearnost nekog dinamičkog sustava čini taj sustav visoko netrivialnim te je stoga analiza takvih sustava razmjerno kompleksna. Međutim, takvi sustavi posjeduju nekoliko općenitih svojstava koje valja spomenuti;

- Svaki nelinearni sustav podvrgnut bilo kakvoj vrsti male promijene parametara koji utječu na sustav, npr. neznatna promjena u početnim uvjetima, ponaša se znatno

drukčije u nekom kasnijem vremenskom trenutku. Ovo svojstvo čini ponašanje sustava kompleksnim (netrivijalnim).

- Ako su diferencijalne jednačbe koje u potpunosti opisuju nelinearni dinamički sustav poznate, tada činjenica da ne vrijedi princip superpozicije čini Fourierovu transformaciju neupotrebljivom, a ne postoji slična simetrična metoda za rješavanje nelinearnih diferencijalnih jednačbi.
- Također, za mnoge nelinearne sustave (npr. sustav ljudske ekonomije) diferencijalne jednačbe koje u potpunosti opisuju sustav nisu još niti poznate.

Zbog svega gore navedenog, dolazimo do zaključka da jedino što nam preostaje za analizu nelinearnih jednačbi jeste upotreba računala. U tom je smislu opsežnija analiza takvih sustava pa prema tome i teorija determinističkog kaosa novijeg datuma - budući da je njezin razvoj nemoguć bez upotrebe računalne tehnologije. Još jedno važno svojstvo koje posjeduju računala jeste to da prilikom rješavanja diferencijalnih jednačbi ne razlikuju linearne od nelinearnih, stoga je moguća razmjerno jednostavna vizualizacija kompleksnih problema. Više o upotrebi računala u analizi ovakvih sustava nalazi se u poglavljima 4. i 5. [12], [13], [14]

3 Uvod u teoriju determinističkog kaosa

S obzirom na naše svojstvo da predvidimo ponašanje nekog dinamičkog sustava, u fizici razlikujemo dvije vrste sustava: DETERMINISTIČKE i STOHAISTIČKE. Deterministički su svi sustavi čije je trenutno stanje (u načelu) u potpunosti određeno poznavanjem početnih uvjeta. Kod stohastičkih sustava, početni uvjeti određuju trenutno stanje sustava samo djelomično, zbog vanjskih utjecaja koji su izvan naše kontrole.

Kao što je ranije spomenuto, deterministički će kaos ovdje imati značenje neregularnog ili kaotičnog ponašanja sustava koje je dobiveno rješavanjem nelinearnih jednadžbi gibanja čija je vremenska evolucija u potpunosti određena poznavajući stanje sustava u nekom fiksnom vremenskom trenutku. Zbog argumenata navedenih u prethodnom poglavlju, jasno je da je razvoj teorije determinističkog kaosa usko vezan uz razvoj računalne tehnologije. Budući da je u posljednje vrijeme, razvoj računalne tehnologije doživio značajan napredak, to je i teorija determinističkog kaosa doživjela svoju potpuno afirmaciju. Ono što je potvrđeno jest da je svojstvo determinističkog kaosa posjeduju mnoge prirodne pojave kao i da se takva teorija može primijeniti i na neke pojave iz društvenih znanosti. [4], [8]

Tablica 3.1: Neki nelinearni sustavi sa svojstvom determinističkog kaosa. [4]

Tjerano njihalo
Laseri
Nelinearni optički sustavi
Kemijske reakcije
Problem tri tijela iz klasične mehanike
Nelinearni ubrzivači čestica
Biološki modeli za dinamiku populacije
Stimulirane stanice srca

Ono što valja primijetiti jest to da vrijedi sljedeća teza;

NELINEARNOST JE NUŽAN, ALI NE I DOVOLJAN UVJET DA BI NEKI SUSTAV POSJEDOVAO SVOJSTVO DETERMINISTIČKOG KAOSA

Dakako, neka od važnih pitanja na koja bismo htjeli odgovoriti jesu;

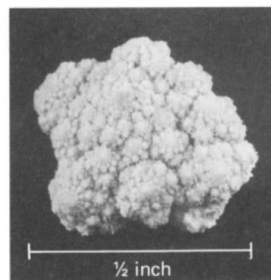
1. Možemo li previdjeti, poznavajući pripadne diferencijalne jednačbe, hoće li neki sustav posjedovati svojstvo determinističkog kaosa?
2. Može li se takvo kaotično ponašanje opisati kvantitavno (matematički)?
3. Hoće li razumijevanje mehanizma determinističkog kaosa imati utjecaj i na ostale znanosti?
4. Nosili li kaotični signal također neke nove informacije o sustavu ili postojanje determinističkog kaosa naprosto znači kraj dugoročnog predviđanja ponašanja sustava?

Deterministički kaos možemo promatrati u dvije vrste sustava: konzervativnim i disipativnim sustavima. Također, u literaturi su do sada poznata najmanje tri načina na koja neki nelinearni sustav može preći u kaotični režim varijacijom vanjskog kontrolnog parametra. Neke od njih pokazat ćemo na primjerima u poglavljima 4 i 5. Proučavanje determinističkog kaosa na primjeru konzervativnih sustava može voditi na neka zanimljiva pitanja. Primjerice, je li sunčev sustav stabilan? Kako izbjeći iregularno gibanje u ubrzivačima čestica? itd. [4]

Ono što je zanimljivo, a što je u posljednje vrijeme pokazano proučavanjem teorije determinističkog kaosa, jest to da je deterministički kaos moguće kontrolirati. Na primjer, nestabilne periodične putanje, koje možemo pronaći u gotovo svim nelinearnim kaotičnim sustavima, mogu postati stabilne uz male promjene vremenski ovisnog kontrolnog parametra. U tom smislu ponašanje sustava može prijeći iz kaotičnog u regularno. Ovakva kontrola kaotičnog ponašanja nekog sustava mogla bi se pokazati iznimno korisnom, napose u tehničkim znanostima te analizi prostorno vezanih kaotičnih sustava. [4]

Sama geometrija kaotičnih sustava također je zanimljiva. Naime, kao što ćemo kasnije vidjeti, kaotični sustavi posjeduju određene točke ili dijelove prostra koje nazivamo ATRAKTORI, a jedna posebna vrsta atraktora zove se ČUDNI ATRAKTOR. Struktura ovih čudnih atraktora posjeduje određena svojstva – ona je samoslična. To znači da takvi atraktori imaju jednaku strukturu neovisno o skali na kojoj ih promatramo. Konkretno, ako izoštrimo sliku čudnog atraktora, vidjet ćemo istu strukturu kao i na makro skali. Objekti koji posjeduju ovo svojstvo nazivaju se FRAKTALI.

Ono što ćemo vidjeti na primjeru logističke jednačbe (poglavlje 4) jest da bifurkacijski dijagram za logističku jednačbu posjeduje fraktalnu strukturu. Jedan zanimljiv primjer iz svakodnevnog života koji posjeduje veliki stupanj samosličnosti jest biljka pod nazivom Cvjetača (karfiol). Čija je struktura upravo nalik fraktalnoj. [6]



Slika 3.1: Svojstvo samosličnosti na primjeru Cvjetače. Mali dijelovi izgledaju slično čitavoj glavi Cvjetače. [6]

3.1 Formalizam i klasifikacija

3.1.1 Čudni atraktori

Izraz koji se često nalazi u literaturi vezanoj uz nelinearne kaotične sustave jest *čudni*¹ atraktor. Naime, ono što se može uočiti da se trajektorije nekih kaotičnih sustava asimptomatski približavaju određenim područjima (npr. u faznom prostoru). Ovakav se atraktor može dobiti za npr. disipativne sustave opisane skupom autonomnih diferencijalnih jednadžbi gibanja oblika

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$$

Za ovakve se sustave pokazuje da se trajektorija približava određenom području i to na način da kruži oko tog područja, a promjer kružne putanje postaje sve manji. Ovakav se atraktor naziva ČUDAN ATRAKTOR i on se pojavljuje u analizi niza nelinearnih sustava. Svaki čudni atraktor posjeduje sljedeća svojstva

- Radi se o omeđenom području u prostoru kojem sve trajektorije iz *bazena* atraktora konvergiraju za dovoljno duge vremenske intervale;
- Trajektorija sustava prolazi kroz svaku točku atraktora;
- Svojstvo koje čini atraktor čudnim jest ekstremna osjetljivost na početne uvjete – točke koje su u početku proizvoljno bliske jedna drugoj postaju eksponencijalno daleke za dovoljno duge vremenske intervale;

Iako se čudni atraktori pojavljuju dosta često, još uvijek ne postoji formalna definicija čudnog atraktora, ali ih se može analizirati vizualizacijom. Najčešće se pojavljuju u sustavima koji opisuju tok fluida koji se na jednom mjestu širi, a na drugom skuplja (npr. struja zraka u atmosferi).[8]

Konkretan primjer čudnog atraktora nalazi se u poglavlju 5 (Lorenzov atraktor).

3.1.2 Probabilistički pristup

Jedan od mogućih pristupa teoriji determinističkog kaosa jest onaj sa stanovišta teorije vjerojatnosti². Konkretno, ako razmatramo logističku jednadžbu (detaljnije u poglavlju 4) oblika

$$x(t+1) = f_r(x(t))$$

onda možemo postaviti dva temeljna pitanja koja proizlaze iz teorije vjerojatnosti.

(1) Kolika je vjerojatnost nalaženja trajektorije $x(t)$ unutar intervala $[x, x + dx]$. Funkcija gustoće vjerojatnosti je oblika

$$\rho(x; x(0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta(x - x(t)) \quad (3.1)$$

gdje valja primjetiti da funkcija gustoće vjerojatnosti posjeduje eksplicitnu ovisnot o početnom uvjetu $x(0)$.

¹engl. *strange*

²Slično kao u kvantnoj mehanici, gdje se takav pristup pokazao kao jedini moguć.

(2) Promatramo ansambl trajektorija s početnim uvjetima, koji su nasumično raspodjeljeni, gdje je vjerojatnost $\rho_0(x)dx$ da x_0 poprimi vrijednost iz intervala $[x, x + dx]$ također proizvoljna. Tada treba odrediti vremensku evoluciju funkcije gustoće vjerojatnosti $\rho_t(x)$, tj. treba odrediti redom

$$\rho_0(x), \rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_t(x), \dots$$

Dakako, treba provjeriti granični slučaj $t \rightarrow \infty$ te, ako granica za $t \rightarrow \infty$ postoji, odrediti koliko će brzo granična raspodjela $\rho_\infty(x)$ biti dostignuta. [8]

3.2 Ljapunovljevi eksponenti

Kako bi smo u uvodnom dijelu izlaganja o teoriji determinističkog kaosa rekli kako je nelinearnost sustava nužan, ali ne i dovoljan uvjet za kaos, to bi sada željeli odgovoriti na pitanje: Kako ćemo znati je li neki promatrani sustav kaotičan? I, ako je, u kojoj mjeri? Ako sve točke u okolini trajektorije sustava konvergiraju ka istoj točki tada je atraktor ili točkast ili kružnoga oblika. No, ako se pak radi o *čudnom atraktoru*, tada bilo koje dvije trajektorije $x(t) = f^t(x_0)$ te $x(t) + \delta x(t) = f^t(x_0 + \delta x_0)$, koje su u početku bliske jedna drugoj, u daljnjem se tijekom vremena eksponencijalno udaljavaju jedna od druge te u konačnom vremenskom intervalu njihova razlika postaje makroskopski vidljiva.

Ono što vrijedi jest da ovo razilaženje trajektorije s vremenom postaje eksponencijalno te se ono izražava na način

$$\epsilon e^{N\lambda(x_0)} = |f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)| \quad (3.2)$$

gdje λ označava brzinu kojom se trajektorije međusobno udaljavaju, i taj se član naziva vodeći Ljapunovljev eksponent³.

Dakle, Ljapunovljev eksponent na neki način *mjeri* kako se brzo dvije trajektorije međusobno udaljavaju, tj. on nam govori kada će trajektorije postati kvalitativno različite. U granici kada vrijeme postaje beskonačno dugo, Ljapunovljev eksponent je GLOBALNA MJERA BRZINE KOJOM SE TRAJEKTORIJE RAZILAZE ILI KVANTITATIVNA MJERA KAOSA.

U granici kada $\epsilon \rightarrow 0$ te $N \rightarrow \infty$ dolazimo do formalnog izraza za $\lambda(x_0)$ na način

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \log \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \quad (3.3)$$

izraz sa desne strane gornje jednakosti prepoznaje se kao derivacija funkcije $f^N(x_0)$ po varijabli x_0 pa imamo

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \quad (3.4)$$

³Aleksandr Ljapunov, ruski matematičar i fizičar (1857. - 1918.). Obrađivao probleme iz diferencijalnih jednačini, hidrostatičke i hidrodinamičke, matematičke fizike i teorije vjerojatnosti.

Iz čega zaključujemo da izraz $e^{\lambda(x_0)}$ predstavlja prosječnu vrijednost faktora za kojeg se dvije trajektorije udalje nakon jedne iteracije. Ljapunovljev eksponent se još može shvatiti i kao MJERA PROSJEČNOG GUBITKA INFORMACIJA NAKON JEDNE ITERACIJE. [7]

3.2.1 Procjena vodećeg eksponenta

Ono što treba napraviti jest uzeti malu varijaciju δx_0 te pratiti razliku između bliskih trajektorija sve dok $\|\delta x(t_1)\|$ ne postane znatno velik te zabilježiti vrijednost $t_1 \lambda_1 = \ln(\|\delta x(t_1)\| / \|\delta x_0\|)$. Nakon toga treba postaviti varijaciju $\delta x(t_1)$ na vrijednost koja se razlikuje za faktor $\delta x_0 / \delta x(t_1)$. Nakon toga, ovaj postupak ponavljamo te je vodeći Ljapunovljev eksponent tada dan kao

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_i t_i \lambda_i, \quad t = \sum_i t_i$$

Nakon toga se uzima srednja vrijednost za Ljapunovljev eksponent. Ono što vrijedi jest

- $\lambda > 0$ Sustav je u kaotičnom režimu; čudni atraktor
- $\lambda < 0$ Sustav je u regularnom režimu (periodičnost)

Dakle, pomoću vodećeg Ljapunovljevog eksponenta možemo utvrditi je li sustav u kaotičnom režimu li ne te prirodu atraktora sustava. [7]

Dio II

Rezultati i rasprava

4 Deterministički kaos u diskretnim klasičnim sustavima

4.1 Logistička jednadžba

Logističku je jednadžbu prvi put formulirao belgijski matematičar Verhulst¹ i ona opisuje kako se iz godine u godinu mijenja populacija određene biološke vrste na nekom mjestu (npr. populacija skakavaca na nekom otoku). Logistička jednadžba jedan je vrlo jednostavan primjer dinamičkog sustava koji može postati kaotičnim. [1], [8], [16]

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (4.1)$$

za $x \in [0, 1]$ iz čega slijedi $r \in [0, 4]$.

U jednadžbi (4.1) pojavljuju se sljedeće veličine: veličina x_n koja je razmjerna broju npr. skakavaca u n -toj godini, a x_{n+1} broju skakavaca u godini $n + 1$. Konkretno, x_n ima značenje broja skakavaca u n -toj godini u odnosu na maksimalan broj skakavaca N koji bi mogli preživjeti na toj lokaciji. Npr. vrijednost $x_n = 1$ znači najveću moguću održivu populaciju, a primjerice $x_n = 0.2$ znači da je broj skakavaca jednak 20% od maksimalne moguće populacije. Veličina x_n opisuje dakle stanje dinamičkog sustava u n -toj godini.

Veličina r je konstantna veličina i ona se naziva KONTROLNI PARAMETAR za jednadžbu (4.1). Značenje veličine r jest da ona odražava brzinu razmnožavanja skakavaca i raspoložive životne uvjete. Njezina je vrijednost, kao što gore piše, između 0 i 4. [1]

Napišimo jednadžbu (4.1) u malo drukčijem obliku

$$x_{n+1} = rx_n - rx_n^2 \quad (4.2)$$

Prvi član desne strane jednadžbe (4.2) ima značenje linearnog porasta populacije neke vrste zbog razmnožavanja. Drugi član ograničuje rast populacije zbog loših životnih uvjeta (nedostatak hrane, itd.) i životnog prostora. Dakle, prvi član opisuje kako se populacija povećava, a drugi kako se smanjuje. Što je populacije neke vrste veća, tj. što je x_n bliži maksimalnoj vrijednosti 1, to je drugi član bliži prvom i utječe na sve veće smanjenje populacije. [8]

Primijetimo još i da je jednadžba (4.2) nelinearna zbog člana x_n^2 .

¹Pierre François Verhulst, 1804. - 1849., belgijski matematičar.

4.1.1 Periodički atraktori

Jednadžbu (4.2) rješavat ćemo koristeći se Pythonom. Budući da imamo jednadžbu za diskretne vremenske serije, to nam neće trebati alati za rješavanje kontinuiranih diferencijalnih jednadžbi. Nakon što smo uvezli pripadne biblioteke, treba najprije postaviti vrijednost konstantnih članova te kontrolnog parametra. Postavimo početnu vrijednost x_0 na $x_0 = 0.9$, tj. neka je u početku populacija neke vrste bila na 90% od maksimalne moguće. Postavimo također i vrijednost kontrolnog parametra na $r = 2.5$. Nakon toga rješimo jednadžbu (4.2) za 80 vremenskih trenutaka. [8]

RAČUNALNI KOD ZA GENERIRANJE VRIJEDNOSTI x_n

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
import numpy
r = 2.5
x = 0.9
ys = []
def f(x,r):
    return r*x-r*x*x
for i in range(1,31):
    x = f(x,r)
    ys.append([i,x])
    print(i, "{:10.7f}".format(x))
```

RAČUNALNI KOD ZA CRTANJE OVISNOSTI x_n O n

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
import numpy

r = 2.5
x = 0.9
ys = []

def f(x,r):
    return r*x-r*x*x
for i in range(0,81):
    x = f(x,r)
    ys.append([i,x])
ys=np.array(ys)
plt.scatter(ys[:,0], ys[:,1])
pylab.plot(ys[:,0], ys[:,1], 'm-.')
#plt.xlim(0.0)
plt.ylim(0.0)
plt.xlabel("$n$", size = 18)
```

```
plt.ylabel("$x_{n}$", size = 18)
pylab.show()
```

Tablica 4.1: Neke vrijednosti za x_n , $r = 2.5$

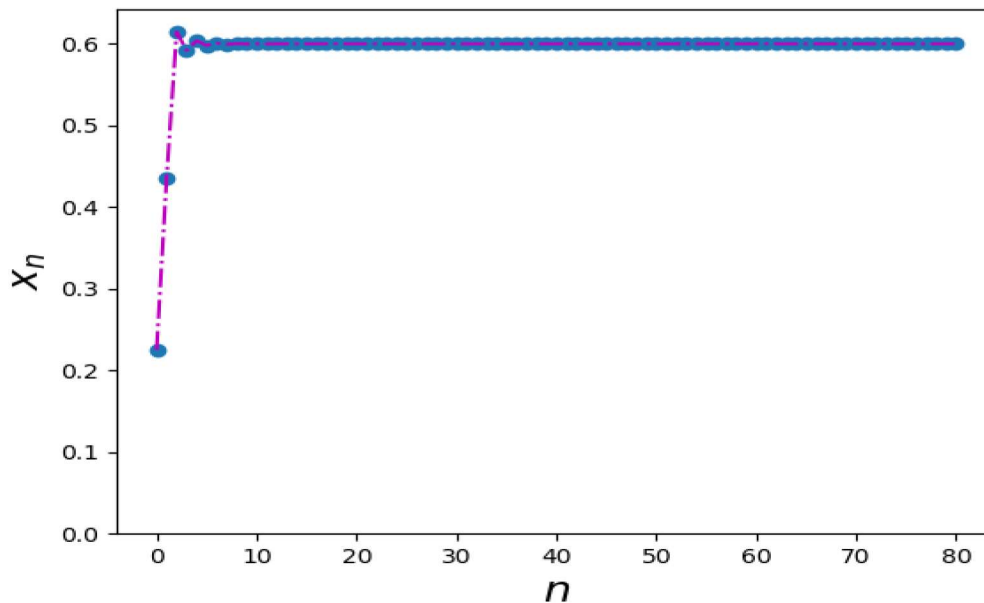
n	x_n
0	0,9
1	0.2250000
2	0.4359375
3	0.6147400
4	0.5920868
5	0.6038000
6	0.5980639
7	0.6009587
8	0.5995184
9	0.6002402
10	0.5998797
11	0.6000601
12	0.5999699
13	0.6000150
14	0.5999925
15	0.6000038
...	...
22	0.6000000
23	0.6000000
24	0.6000000

Iz tablice 4.1, a i sa slike 4.1, vidimo da kada se vrijednost iteranda n povećava tada vrijednost x_n konvergira jednoj određenoj vrijednosti. Ta vrijednost koja je dobivena računalom, iznosi²: 0.6000000.

Granična vrijednost kojoj konvergiraju svi iterandi, naziva se ATRAKTOR.

Budući da se svi iterandi približavaju jednoj vrijednosti, takav se atraktor još zna nazvati ATRAKTOR PERIODA 1.

²Vrijednost je zaokružena na sedam decimala.



Slika 4.1: Ovisnost x_n o n za vrijednosti $x_0 = 0.9$ te $r = 2.5$.

Postavimo sada vrijednost kontrolnog parametra na neku drugu, veći vrijednost. Dakle, neka sada bude $r = 3.2$. Ponovimo postupak tako što ćemo opet riješiti logističku jednadžbu i diskutirati rezultate.

Iz tablice 4.2 zaključujemo da nakon prvih nekoliko iteracija vrijednost x_n ne slijedi nikakvu očitu na pravilnosst. Međutim, kako broj iteranda raste, kod vrijednosti $n = 20$, dolazi do određene pravilnosti. Vidimo da vrijednost x_n oscilira između dvije vrijednosti. Iterandi x_{27}, x_{29}, x_{31} , itd. konvergiraju vrijednosti 0.7994555. Iterandi x_{28}, x_{30}, x_{32} , itd. konvergiraju vrijednosti 0.5130445.

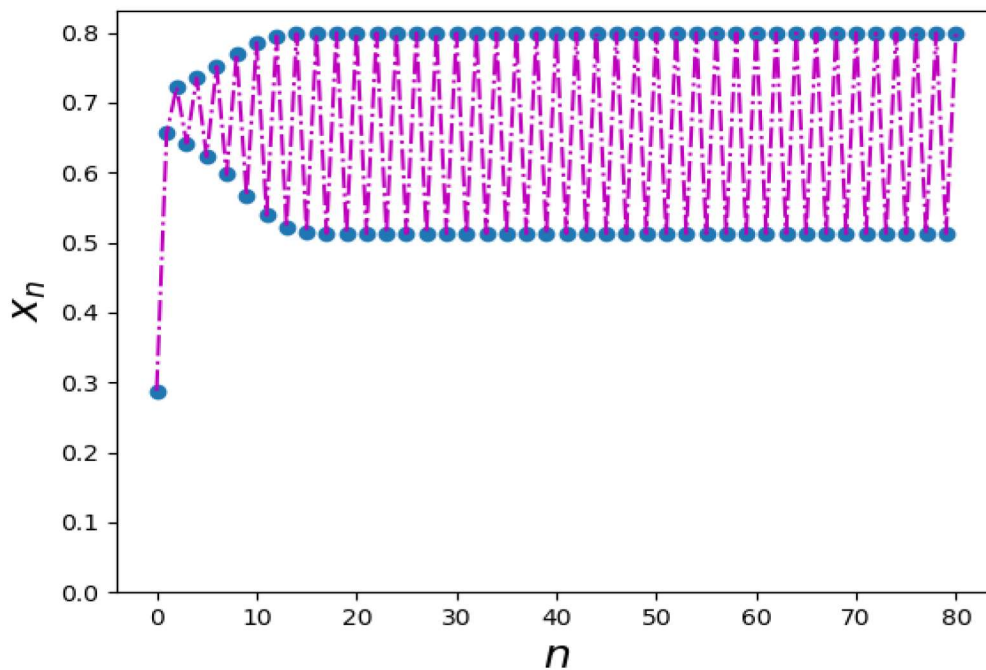
Dakle, zaključujemo da za vrijednost kontrolnog parametra $r = 3.2$, za logističku jednadžbu općenito vrijedi

$$x_n = x_{n+2} = x_{n+4} = \dots$$

Do istog zaključka možemo doći ako ovisnost x_n vizualiziramo pomoću grafa (slika 4.2) gdje vidimo da nakon kraćeg intervala vremena, vrijednost x_n *skače* između dvije vrijednosti, jedne nešto manje od 0.8, a druge neznatno veće od 0.5, što je u skladu s rezultatima prikazanim u tablici 4.2. [1]

Tablica 4.2: Neke vrijednosti za $x_n, r = 3.2$

n	x_n
0	0,9
1	0.2880000
2	0.6561792
3	0.7219458
4	0.6423682
...	...
27	0.7994555
28	0.5130445
29	0.7994555
30	0.5130445
31	0.7994555
32	0.5130445



Slika 4.2: Ovisnost x_n o n za vrijednosti $x_0 = 0.9$ te $r = 3.2$.

Pogledajmo sada što će se dogoditi ako vrijednost kontrolnog parametara povećamo na još veću vrijednost. Dakle, postavimo sada vrijednost r na $r = 3.5$ i ponovimo sada već uhodani postupak.

Nakon 45. iteranda počinjemo uočavati pravilnost;

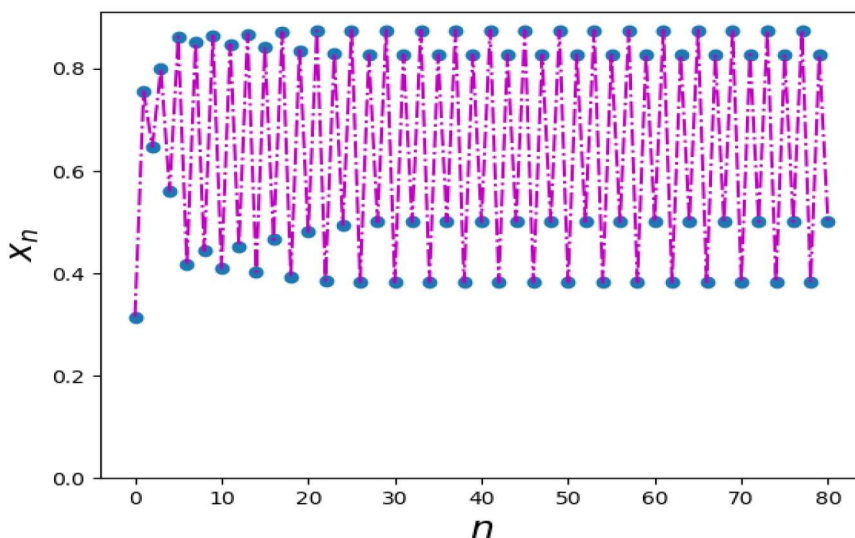
Tablica 4.3: Neke vrijednosti za $x_n, r = 3.5$.

n	x_n
0	0,9
...	...
46	0.8749973
47	0.3828197
48	0.8269407
49	0.5008842
50	0.8749973
51	0.3828197
52	0.8269407
53	0.5008842
54	0.8749973

Iterandi dakle konvergiraju prema 4 različite vrijednosti te se takav obrazac ponašanja ciklički ponavlja. Dakle, to razmišljanje možemo poopćiti te zaključiti da za vrijednost kontrolnog parametra $r = 3.5$, za logističku jednadžbu općenito vrijedi

$$x_n = x_{n+4} = x_{n+8} = \dots$$

Budući da vrijednosti iteranda konvergiraju ka 4 različite vrijednosti, takav ćemo atraktor zvati ATRAKTOR PERIODA 4.



Slika 4.3: Ovisnost x_n o n za vrijednosti $x_0 = 0.9$ te $r = 3.5$.

4.1.2 Kaotični atraktor

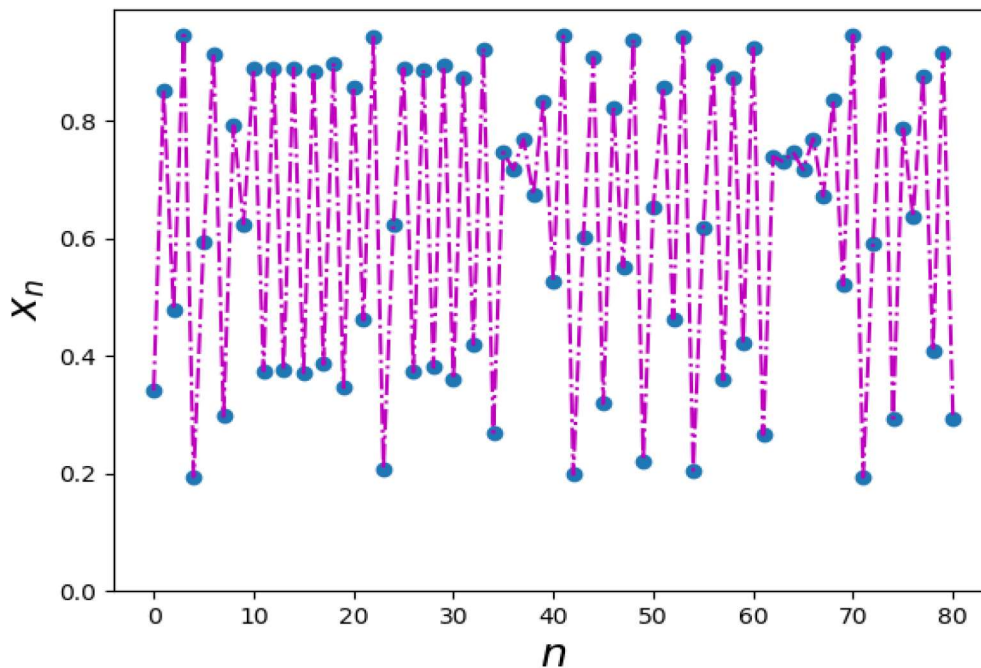
Gornji bi postupak mogli nastaviti dalje povećavajući vrijednost kontrolnog parametra r za proizvoljno mali iznos. Ono što bi uočili da se period atraktora povećava. Dakle, dobili bismo atraktor perioda 8, atraktor perioda 16, itd. No, svi atraktori koje bi dobili i dalje bi bili PERIODIČNI.

Međutim, ono što je poznato jest da postoji neka granična vrijednost za kontrolni parametar r za koji atraktor više nije periodičan, nego postaje KAOTIČAN. Dakle, za takav kaotičan atraktor, vrijednost iteranada ne slijedi nikakvu pravilnost, tj. vrijednost iteranada ne konvergira ni jednoj vrijednosti, ma koliko velika vremenska serija bila.

U literaturi je poznato da ta kritična vrijednost za kontrolni parametar iznosi [18]

$$r_c = 3.79$$

tj. to je ona vrijednost r za koju atraktor postaje kaotičan. Postavimo sada vrijednost kontrolnog parametra upravo na tu vrijednost i pogledajmo grafički prikaz x_n u ovisnosti o n . Dakle,



Slika 4.4: Ovisnost x_n o n za vrijednosti $x_0 = 0.9$ te kritičnu vrijednost $r = r_c = 3.79$.

kako što vidimo sa slike 4.4, za vrijednost kontrolnog parametra r koja je jednaka kritičnoj vrijednosti $r = r_c = 3.79$, više nema nikakve periodičke pravilnosti vezane uz vrijednost iteranada x_n . Kažemo da se dinamički sustav koji opisuje populacijsku dinamiku neke vrste sada nalazi u KAOTIČNOM REŽIMU. U ovom je režimu nemoguće dugoročno previdjeti kako će se kretati populacija neke vrste zbog jednog svojstva koje se zove EKSTREMNA OSJETLJIVOST NA POČETNE UVJETE. Pokažimo na istom primjeru što to konkretno znači. [18]

4.2 Osjetljivost na početne uvjete

Kao što je rečeno ranije, dinamički sustavi koji se nalaze u kaotičnom načinu rada posjeduju jednu svojstvo koje se zove ekstremna osjetljivost na početne uvjete. Konkretno, to znači da neznatno mala promjena početnih uvjeta može dovesti do drastičnog drukčijeg rezultata. To ćemo pokazati na sljedeći način; [8]

- Uzet ćemo logističku jednadžbu (4.2) sa vrijednosti kontrolnog parametra $r = 3.79$. Dakle, osigurat ćemo to da se sustav nalazi u kaotičnom režimu;
- Nakon toga ćemo riješiti jednadžbu za vrijednost početnog uvjeta $x_0 = 0.9$ te vrijednost jako blisku toj, npr. za $x_0 = 0.9000001$;
- Tako mala razlika između početnih uvjeta izabrana je upravo tako da bude u okviru male pogreške pri mjerenju početnog stanja sustava, što je za očekivati u bilo kakvoj realnoj situaciji;
- Nakon toga ćemo usporediti vrijednost iteranada i vidjeti postoji li kakva razlika;
- Za deterministički sustav intuitivno bi bilo pretpostaviti da značajne razlike neće biti, no za deterministički sustav koji se nalazi u kaotičnom načinu rada, ova pretpostavka, kao što ćemo vidjeti, više ne vrijedi.

Radi jednostavnosti, vrijednosti iteranada za $x_0 = 0.9$ nazivmo x_1, x_2, \dots , a vrijednosti iteranada za $x_0 = 0.9000001$ nazovimo x'_1, x'_2, \dots

RAČUNALNI KOD ZA GENERIRANJE DVIJU BLISKIH VREMENSKIH SERIJA ZA LOGISTIČKU JEDNADŽBU KADA SU POČETNI UVJETI JAKO BLISKI

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
import numpy
r = 3.79
x = 0.9000000
ys = []
ys2 = []
def f(x,r):
    return r*x-r*x*x
for i in range(1,61):
    x = f(x,r)
    ys.append([i,x])
    print(i, "{:10.7f}".format(x))
ys=np.array(ys)
print('\n')
r2 = 3.79
x2 = 0.9000001
def f2(x2,r2):
    return r2*x2-r2*x2*x2

for i in range(1,61):
```

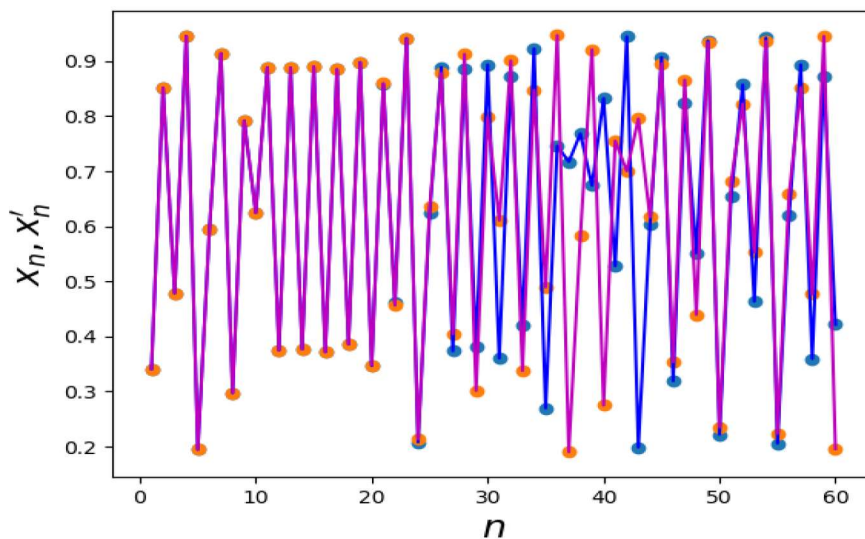
```

x2 = f2(x2,r2)
ys2.append([i,x2])
print(i, "{:10.7f}".format(x2))
ys2=np.array(ys2)

```

Tablica 4.4: Usporedba dvije vremenske serije jednadžbe (4.2) za vrlo bliske početne uvjete za vrijednost kontrolnog parametra $r = r_c = 3.79$.

x_n	x'_n
0.9000000	0.9000001
0.3411000	0.3410997
0.8518055	0.8518051
0.4784227	0.4784236
...	...
$x_{40} = 0.8327076$	$x'_{40} = 0.2748577$
$x_{41} = 0.5279685$	$x'_{41} = 0.7553884$
$x_{42} = 0.9445353$	$x'_{42} = 0.7003039$



Slika 4.5: Usporedba dvije vremenske serije x_n i x'_n iz tablice 4.4.

Ono što možemo vidjeti jest da je za prvih nekoliko vremenskih trenutaka vrijednost iteranada prilično slična (tablica 4.4). No kako vremenska serija postaje veća, tako i razlika $|x_n - x'_n|$ postaje sve veća te već nakon nekoliko desetaka iteracija postaje usporediva sa samim iterandima. Dakle, ove dvije serije postaju potpuno različite i među njima više nema nikakve sličnosti.

Također, iz slike 4.5 vidimo da kod vrijednosti vremenskog trenutka $n = 30$, vremenske serije x_n i x'_n postaju makroskopski odvojive, tj. moguće ih je razlikovati i među njima više nema nikakve sličnosti. [1], [18]

Iz gornjih razmatranja možemo izvući nekoliko važnih općenitih zaključaka;

(1.)

Dvije se kaotične vremenske serije već nakon malog broja ponavljanja potpuno razlikuju, tj. među njima više nema nikakve sličnosti. To je posljedica izvanredno male promjene u početnim uvjetima zbog koje su dobivene dvije potpuno različite vremenske serije. Takva se osobina kaotičnih vremenskih serija naziva EKSTREMNA OSJETLJIVOST NA POČETNE UVJETE.

(2.)

Svojstvo ekstremne osjetljivosti na početne uvjete za posljedicu ima potpuni slom determinizma. Naime, početni se uvjeti u bilo kojem znanstvenom razmatranju ne mogu nikada znati posve točno, nego samo aproksimativno s nekom određenom KONAČNOM PRECIZNOŠĆU.

(3.)

Konkretno su izračunate serije u kaotičnom režimu uvijek pogrešne. Budući da su od dviju bliskih vrijednosti početnih uvjeta, koje su u granicama pogreške mjerenja početnog uvjeta, dobivene dvije potpuno različite vremenske serije, to je nemoguće reći koja je od tih serija vjerodostojnija.

(4.)

Ako znamo mjerenu vrijednost početnog uvjeta, upotrebom računala u kaotičnom režimu nije moguće izračunati pravu vremensku seriju. Stoga je predviđanje događaja u determinističkom kaosu nemoguće.

(5.)

Dakle, kada se neki dinamički sustav nalazi u kaotičnom stanju, nema više determinizma: uz pomoć poznavanja stanja sustava u prošlosti i sadašnjosti nije moguće pretkazati buduća stanja sustava.

4.3 Bifurkacijski dijagram

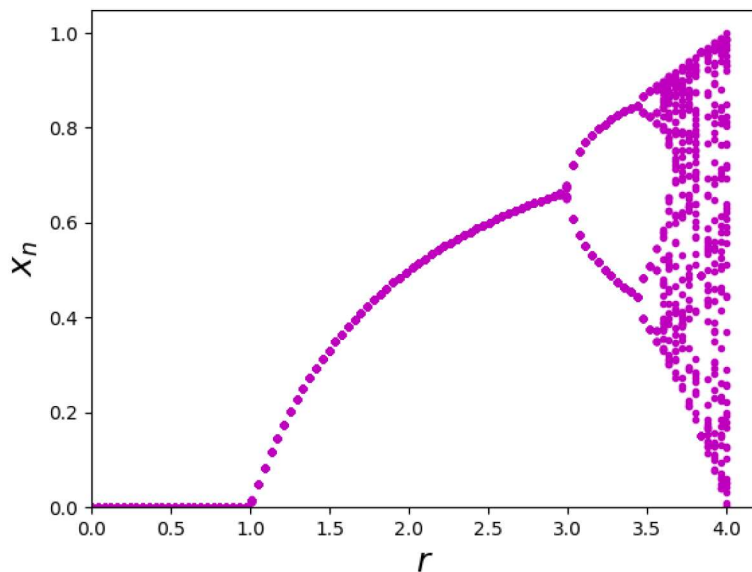
Ono što smo mogli zaključiti iz prethodnih razmatranja jest da u razmatranju nelinearnih dinamičkih sustava, bilo u regularnom bilo u kaotičnom načinu rada, veliku ulogu ima posebna vrijednost koju smo zvali ATRAKTOR. Stoga se u nelinearnoj dinamici često zna crtati poseban dijagram, koji za svaku vrijednost kontrolnog parametra r prikazuje samo vrijednosti atraktora. Dakle, na osi apscisa nalazi se vrijednost r a na osi ordinata vrijednost atraktora x_n . Takav se dijagram zove BIFURKACIJSKI DIJAGRAM.

Kako bismo nacrtali bifurkacijski dijagram za jednadžbu (4.2), naš ćemo računalni kod morati malo modificirati. Najprije ćemo morati pravilno označiti koordinatne osi. Najveća izmjena sastoji se u tome da sada KONTROLNI PARAMETAR r VIŠE NEMA SAMO JEDNU ODABRANU VRIJEDNOSTI, NEGO SE NJEGOVA VRIJEDNOST MIJENJA. Konkretno, ona je u intervalu $[0,4]$.

RAČUNALNI KOD ZA CRTANJE BIFURKACIJSKOG DIJAGRAMA

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
import numpy
ys = []
rk = np.linspace(0,4,100)
def f(x,r):
    return r*x-r*x*x
for r in rk:
    x = 0.9
    for i in range(0,81):
        x = f(x,r)
    for i in range(50):
        x = f(x,r)
        ys.append([r,x])
ys=np.array(ys)
#plt.scatter(ys[:,0], ys[:,1])
pylab.plot(ys[:,0], ys[:,1], 'm.')
#plt.xlim(0.0)
plt.ylim(0.0)
plt.xlabel("$r$", size = 18)
plt.ylabel("$x_{n}$", size = 18)
pylab.show()
```

Dobiveni rezultat jest sljedeći;



Slika 4.6: Bifurkacijski dijagram za jednadžbu (4.2).

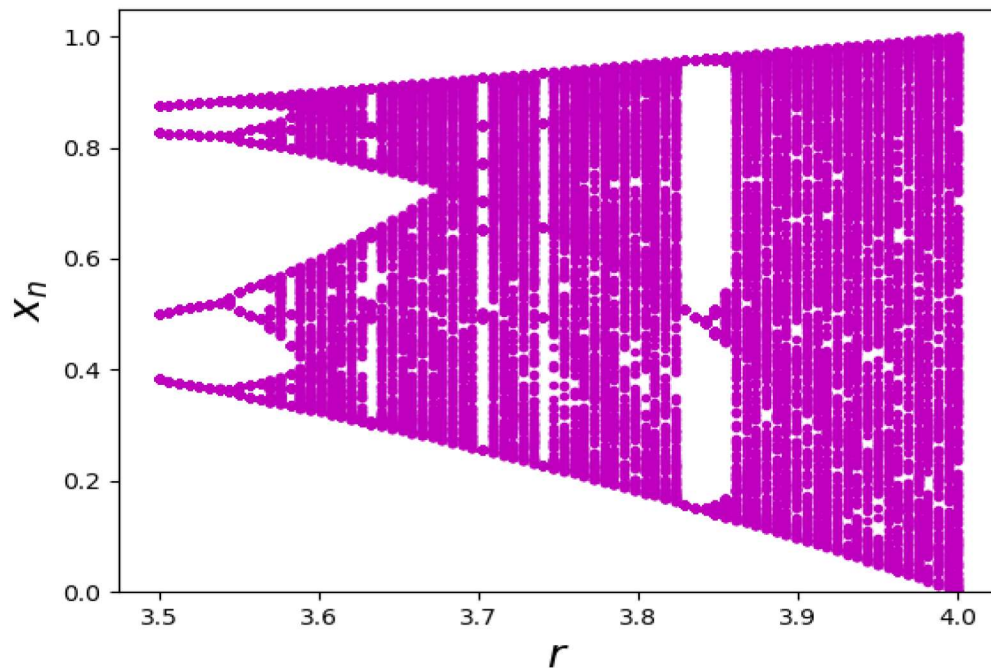
Ono što vidimo na slici 4.6 u skladu je s ranijim razmatranjima. Kod vrijednosti nešto veće od $r = 3.0$, atraktor perioda 1 prelazi u atraktor perioda 2, tj. u literaturi se kaže da dolazi do BIFURKACIJE atraktora perioda 1 u atraktor perioda 2. Nadalje, period se atraktora opet udvostručava za neku vrijednosti r koja je malo veća od $r = 3.4$ kada atraktor perioda 2 prelazi u atraktor perioda 4. Nadalje za vrijednost $r = 3,545$ ponovno dolazi do bifurkacije i atraktor perioda 4 prelazi u atraktor perioda 8, itd. Ove vrijednosti kontrolnog parametra r za koje dolazi do bifurkacije nazivaju se kritične vrijednosti i one se obilježavaju s r_1, r_2, r_3, \dots . Ovaj se postupak ponavlja sve do vrijednosti $r = 3.569946$ i ta se vrijednost označava s r_∞ . Dakle, vrijedi

za $r = r_\infty$ dolazi do prijelaza na kaotični atraktor.

Bifurkacijski dijagram izrazito je koristan alat budući da iz njega možemo iščitati za koju vrijednost kontrolnog parametra r atraktor postaje kaotičan, tj. sustav prelazi u kaotičan režim. [1], [18]

4.4 Prozori regularnosti

U prethodnom smo poglavlju crtali bifurkacijski dijagram za cijeli segment kontrolnog parametra r te iz toga izveli određene zaključke. Međutim, jedna zanimljivost vezana uz bifurkacijski dijagram može se uočiti ako crtamo bifurkacijski dijagram, ali samo za segment u kojem je sustav u kaotičnom načinu rada. Budući da je prethodno zaključeno kako je r_∞ nešto veći od 3.5, to ćemo nacrtati bifurkacijski dijagram, ali za segment $r \in [3.5, 4]$.



Slika 4.7: Bifurkacijski dijagram za jednadžbu (4.2) za segment $r \in [3.5, 4]$.

Ono što vidimo jest da čak i unutar kaotičnog režima, postoje manji intervali za koje atraktor postaje opet periodičan (npr. za vrijednost r između 3.8 i 3.9). Ti se intervali nazivaju PROZORI REGULARNOSTI. Dakle, čak i unutar kaotičnog načina rada moguće je naći određene segmente kontrolnog parametra za koje se sustav ponovno vraća u regularan način rada.

Gornja je pojava izrazito korisna, budući da je pomoću nje moguće eliminirati deterministički kaos u onim pojavama u kojima je on nepoželjan, a inducirati ga u onim pojavama u kojima je on poželjan. Ono što trebamo napraviti jest odrediti kontrolni parametar za promatrani sustav, riješiti jednadžbu koja ga opisuje te nacrtati bifurkacijski dijagram. Iz bifurkacijskog dijagrama onda možemo odrediti postoji li prozor regularnosti i ako postoji za koju vrijednosti kontrolnog parametra možemo *ući* nazad u regularni režim.

Drugim riječima, ako želimo vratiti neki sustav nazad u regularan način rada, to ne znači nužno da vrijednost kontrolnog parametra moramo značajno mijenjati, budući da bi to moglo značiti utrošak velikog broja resursa. Dapače, možda ćemo vrijednost kontrolnog parametra morati promijeniti za izrazito malu vrijednosti (čime štedimo resurse), koja je blizu prozora regularnosti.

Vrijednost Ljapunovljevog eksponenta je pozitivna, osim unutar prozora regularnosti gdje je negativna.

4.5 Računalna preciznost

Svi gornji računi koji su provedeni bili su ograničeni s preciznošću računala koje smo koristili. Naime, kao što je poznato računalo ne računa s apsolutnom preciznošću, nego zbog zaokruživanja rezultata postoji određena konačna preciznost. Konkretno, u gornjim je računima korišten zapis zaokružen na sedam decimala dok se sve ostale zanemare. To znači da na primjeru populacijske jednadžbe, računalo u svakom koraku već nakon drugog iteranda vrijednosti računa približno. U tom smislu čak i najpreciznija računala posjeduju određeni inherentni stupanj nepreciznosti, tj. svako računalo, ma koliko jako, uvijek će posjedovati KONAČNU PRECIZNOST.

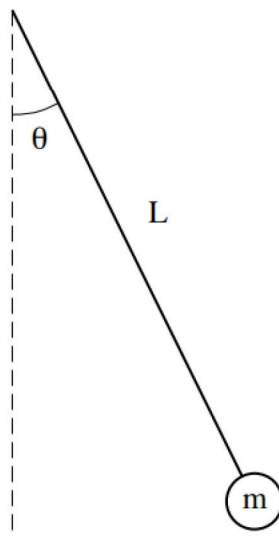
Dakako, imajući u vidu zaokruživanje koje koristi računalo pri izračunima, postavlja se pitanje: hoće li činjenica da računalo računa približno točno imati utjecaj na rezultate računa? Odgovor na ovo pitanje je dvojak: i da i ne. Naime, za sve one sustave koje se nalaze u regularnom režimu ovo zaokruživanje rezultata neće imati bitniji utjecaj na daljni račun, tj. u regularnom su režimu rezultati dobiveni računalom vjerodostojni. Međutim, za sustave koji se nalaze u kaotičnom režimu male pogreške prilikom zaokruživanja rezultata imat će značajan utjecaj na konačan rezultat. U tom smislu, možemo reći da postoje dva temeljna ograničenja zbog kojih će ponašanje sustava u kaotičnom režimu uvijek biti nemoguće dugoročno predskazati; [1]

1. Greške mjerenja - početno stanje sustava utvrđuje se pomoću mjernih instrumenata. Svako mjerenje u sebi uvijek sadrži grešku mjerenja i stoga je nemoguće u načelu znati početno stanje sustava s apsolutnom preciznošću.
2. Konačna računalna preciznost - preciznost računala će se s vremenom povećavati no uvijek će ostati konačna.

5 Deterministički kaos u kontinuiranim klasičnim sustavima

5.1 Tjerano njihalo

Kao ogledni primjer, uzet ćemo dobro poznati primjer matematičkog njihala. Sjetimo se, matematičko je njihalo mehanički sustav koji se sastoji od točke mase m , koja visi na niti zanemarive mase i duljine L koja je pričvršćena na objesište. Rastezivost niti je također zanemarena.[4]



Slika 5.1: Jednostavno njihalo [4]

5.1.1 Jednadžba gibanja

Uz gore navedene specifikacije, jednadžba gibanja za jednostavno slobodno matematičko njihalo jest¹

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (5.1)$$

¹Bez aproksimacije za male kuteve.

gdje je g ubrzanje Zemljinog gravitacijskog polja, L duljina njihala, a točkice iznad člana θ označavaju vremensku derivaciju. Također, primijetimo da je jednadžba nelinearna zbog člana $\sin \theta$.

Jednadžba (5.1) vrijedi za njihalo koje se nalazi u vakuumu. Budući da se u realnoj situaciji njihalo uvijek nalazi u nekom sredstvu (npr. zrak) tada na njihalo djeluje i sila prigušenja² (npr. trenje) zbog koje dolazi do prigušenog titranja, tj. amplituda titranja smanjuje se u vremenu. Izraz koji opisuje prigušenje njihala je oblika $\gamma \dot{\theta}$ (prigušenje je razmjerno brzini, tj. prvoj derivaciji kuta po vremenu) gdje se član γ naziva koeficijent prigušenja³ i on opisuje koliko *jako* djeluje sila prigušenja na njihalo. Implementacijom ovog izraza u jednadžbu (5.1), dolazimo do jednadžbe gibanja prigušenog njihala oblika

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta + \gamma \dot{\theta} = 0 \quad (5.2)$$

Konačno, ako želimo *poništiti* djelovanje sile prigušenja na njihalo, moramo djelovati dodatnom vanjskom silom i time ćemo dobiti slučaj TJERANOG NJIHALA, koje će biti predmet našeg interesa.

Neka je vanjska sila koja djeluje na matematičko njihalo periodična, tj. neka je oblika

$$F_v = A \cos(\omega t)$$

Uz ovaj uvjet jednadžba gibanja periodički tjeranog matematičkog njihala jest

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = A \cos(\omega t) \quad (5.3)$$

Član koji opisuje djelovanje vanjske sile je oblika $A \cos(\omega t)$ gdje je A amplituda, a ω kružna frekvencija djelovanja vanjske sile. Vrijednost za ω zadajemo i ne mijenjamo. Dakle, amplituda A je član koji je varijabilan i KOJI ĆE ODLUČITI KADA ĆE SUSTAV PREĆI U KAOTIČAN REŽIM.

Njihalo opisano jednadžbom (5.3) primjer je jednog klasičnog, nelinearnog, DETERMINISTIČKOG sustava sa svojstvom determinističkog kaosa. Sada ćemo, koristeći numeričke alate u Pythonu, riješiti jednadžbu (5.3) te diskutirati pod kojim uvjetima možemo generirati deterministički kaos.

Želimo pokazati da ovisnost kuta θ o vremenu *izgleda* kaotično za neku vrijednost amplitude, $A = A_c$, koju ćemo radi jednostavnosti nazvati kritična vrijednost amplitude kojom djeluje vanjska sila. Prije no što pređemo na rješavanje pripadne diferencijalne jednadžbe, dva komentara;

²engl. *damping force*

³engl. *damping coefficient*

- Opće je poznato da je regularna, linearna jednačbe gibanja slobodnog harmonijskog oscilatora egzaktno rješiva⁴ te ne vodi u kaos. Prijelaz u kaos, dobiven kao posljedica rješavanja jednačbe (5.3), je dakle moguć zbog nelinearnog člana $\sin(\theta)$ koji se pojavljuje u jednačbi.
- Također je važno napomenuti da ovisno o vrijednosti parametara A i ω sustav može po volji prelaziti iz regularnog režima u kaotični i obratno.

[4], [15], [19]

5.1.2 Rješenje jednačbe gibanja i prijelaz u kaos

Sa stanovišta matematike, jednačba (5.3) je nelinearna, obična, nehomogena diferencijalna jednačba drugog reda. Takvu je jednačbu moguće riješiti u Pythonu, koristeći odgovarajuće numeričke alate koji su nam na raspolaganju.

Krenimo najprije od jednačbe (5.1) za jednostavno njihalo. Nju ćemo riješiti tako da najprije uvedemo potrebne biblioteke i to na način

```
import scipy.integrate as ing
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import *
```

Nakon toga, unosimo jednačbu gibanja jednostavnog njihala (bez prigušenja i vanjske sile) u obliku pripadne funkcije

```
def jednačba(theta,t):
    g = 9.8 #m/s2
    l = 9.8 #m
    thetadot = theta[1]
    thetadotdot = -(g/l)*theta[0]
    return [thetadot,thetadotdot]
```

gdje smo također definirali vrijednosti za konstantne članove (g, l).

Nadalje, zadajemo interval za vrijeme i početne uvjete

```
vrijeme = np.linspace(0.0, 50.0,1000)
kut0 = 10*2*pi)/360 #mora biti manji od 1
brzina0 = 0.0
```

Nehomogenu diferencijalnu jednačbu drugog reda (5.1) riješit ćemo pomoću funkcije *odeint* iz biblioteke *scipy* i to na način

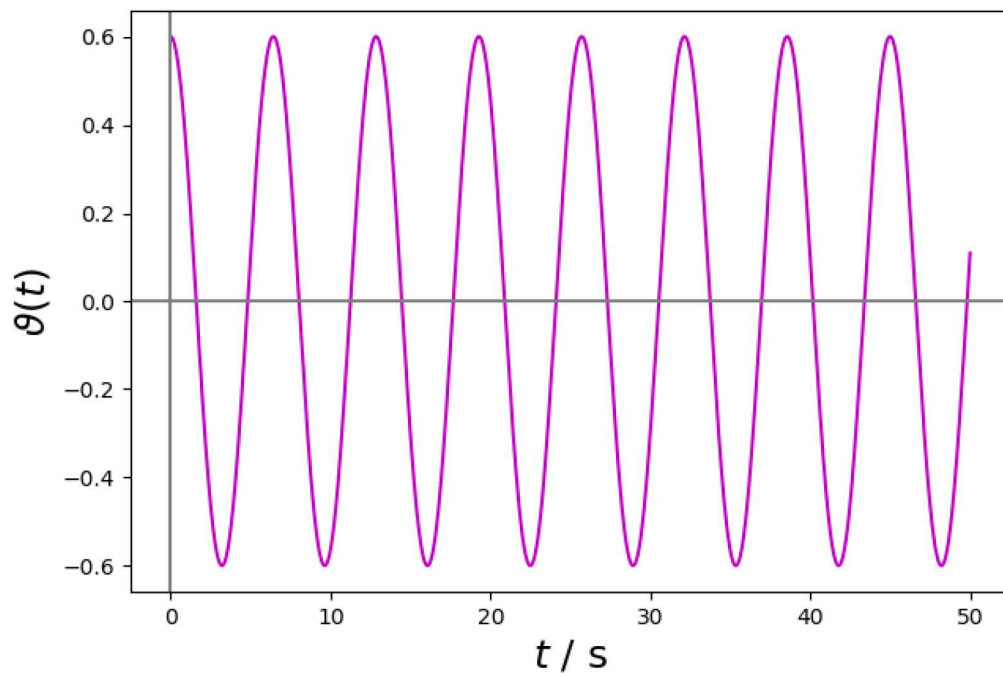
```
rjesenje = ing.odeint(jenačba, [kut0,brzina0], vrijeme)
kut = rjesenje[:,0]
brzina = rjesenje[:,1]
```

⁴Budući da za male kuteve vrijedi $\sin\theta \approx \theta$, to je jednačba (5.2), uz aproksimaciju malih kuteva, analogna jednačbi za slobodni 1D harmonijski oscilator.

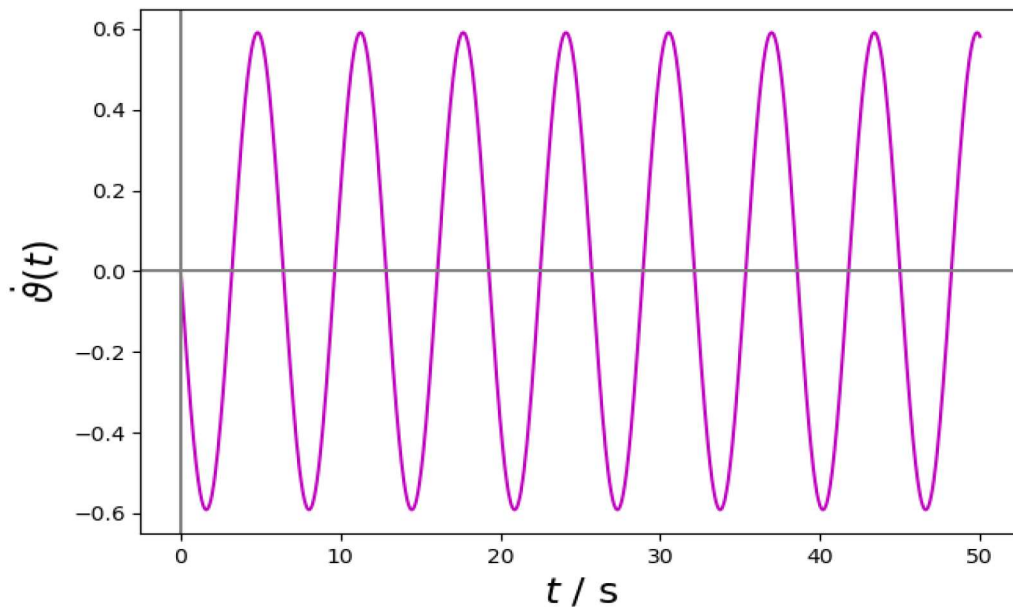
Konačno, crtamo naše rješenje – ovisnost kuta o vremenu

```
plt.plot(vrijeme, kut, 'm-')  
plt.xlabel("$t$ / s", size = 18)  
plt.ylabel("$\\vartheta(t)$", size = 18)  
plt.show()
```

[19]

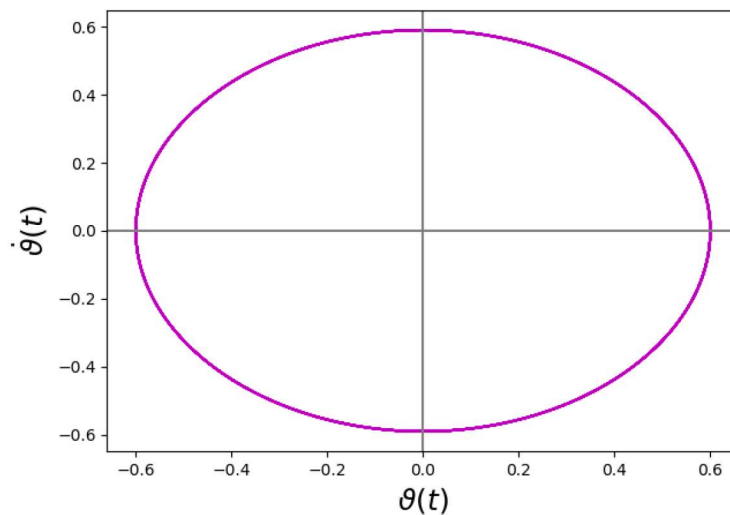


Slika 5.2: Ovisnost kuta o vremenu za jednostavno matematičko njihalo.



Slika 5.3: Ovisnost kutne brzine o vremenu za jednostavno matematičko njihalo.

Prikazat ćemo gibanje jednostavnog matematičkog njihala i u faznom prostoru⁵.



Slika 5.4: Prikaz gibanja jednostavnog matematičkog njihala u faznom prostoru. Trajektorija je oblika zatvorene krivulje (elipse).

⁵Fazni je prostor 2S-dimenzijski prostor s poopćenom brzinom i poopćenom koordinatom kao koordinatnim osima. U našem slučaju to jedna poopćena koordinata (stupanj slobode) - kut θ pa stoga imamo dvodimenzijski fazni prostor s prvom derivacijom kuta θ i kutem θ kao koordinatnim osima.

Ako sada jednakim postupkom riješimo jednađbu gibanja za prigušeni harmonijski oscilator dobit ćemo

```
import scipy.integrate as ing
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import *

def jednadzba(theta,t):
    g = 9.8 #m/s2
    l = 9.8 #m
    gamma=0.05
    thetadot = theta[1]
    thetadotdot = -(g/l)*np.sin(theta[0]) -gamma*theta[1]
    return [thetadot,thetadotdot]

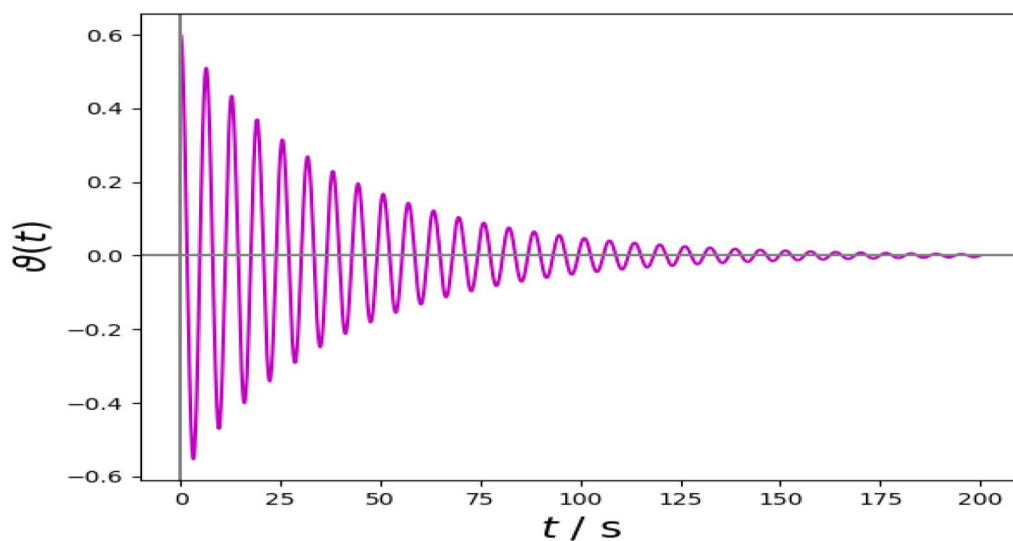
vrijeme = np.linspace(0.0, 200.0,3000)
kut0 = 0.6#mora biti manji od 1
brzina0 = 0.0
rjesenje = ing.odeint(jednadzba, [kut0,brzina0], vrijeme)

kut = rjesenje[:,0]
brzina = rjesenje[:,1]

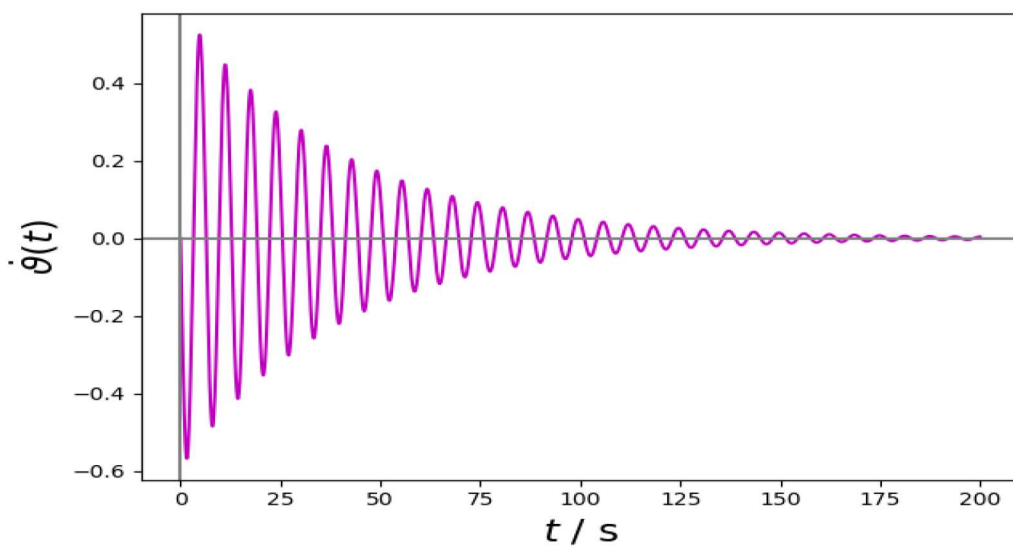
plt.plot(vrijeme, kut, 'm-')
plt.xlabel("$t$ / s", size = 18)
plt.ylabel("$\vartheta(t)$", size = 18)

#vrijeme-brzina
plt.plot(vrijeme, brzina, 'm-')
plt.xlabel("$t$ / s", size = 18)
plt.ylabel("$\dot{\vartheta}(t)$", size = 18)
plt.ylim(-1.0,1.0)

#fazni prostor
plt.plot(kut, brzina, 'm-')
plt.xlabel("$\varphi(t)$", size = 18)
plt.ylabel("$\dot{\varphi}(t)$", size = 18)
plt.xlim(-1.0,1.0)
plt.ylim(-4.0,4.0)
plt.axhline(0,color='gray')
plt.axvline(0,color='gray')
plt.show()
```

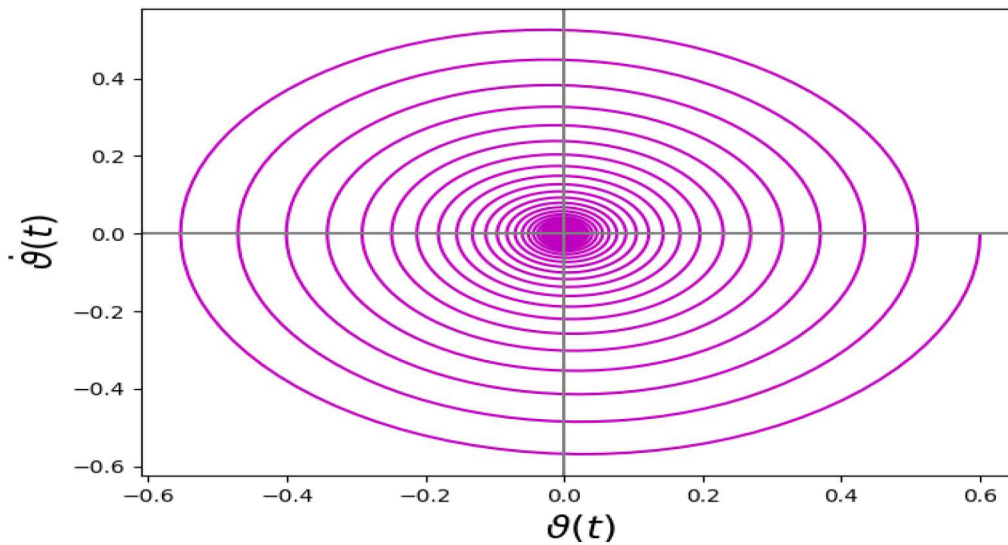


Slika 5.5: Ovisnost kuta o vremenu za prigušeno njihalo. Amplituda se s vremenom smanjuje te konačno iščezava.



Slika 5.6: Ovisnost kutne brzine o vremenu za prigušeno njihalo.

Konačno, riješimo sada jednadžbu gibanja za tjerano njihalo i pokažimo pod kojim će uvjetima tjerano njihalo prijeći iz regularnog u kaotični režim.



Slika 5.7: Prikaz gibanja prigušenog njihala u faznom prostoru.

Kao što je vidljivo iz jednadžbe (5.3), prijelaz u kaos ovisit će o amplitudi djelovanja vanjske sile A . Ako vrijednost A postavimo na nulu, dobit ćemo prigušeno njihalo kao na slici (5.5). Postavimo najprije vrijednost amplitude $A = 0.1$ te vidimo kako će izgledati ovisnost kuta o vremenu.

```
import scipy.integrate as ing
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import *

def jednadzba(theta,t):
    #konstante
    g = 9.8 #m/s2
    l = 9.8 #m
    gamma=0.05
    omega=1/3
    A=0.1
    thetadot = theta[1]
    thetadotdot = -(g/l)*np.sin(theta[0]) -gamma*theta[1] + A*np.cos(omega*t)
    return [thetadot,thetadotdot]

#pocetni uvijeti
vrijeme = np.linspace(0.0,200.0,3000)
kut0 = 0.2#mora biti manji od 1
brzina0 = 0.0

#rjesenje jed. gibanja
rjesenje = ing.odeint(jednadzba, [kut0,brzina0], vrijeme)
```

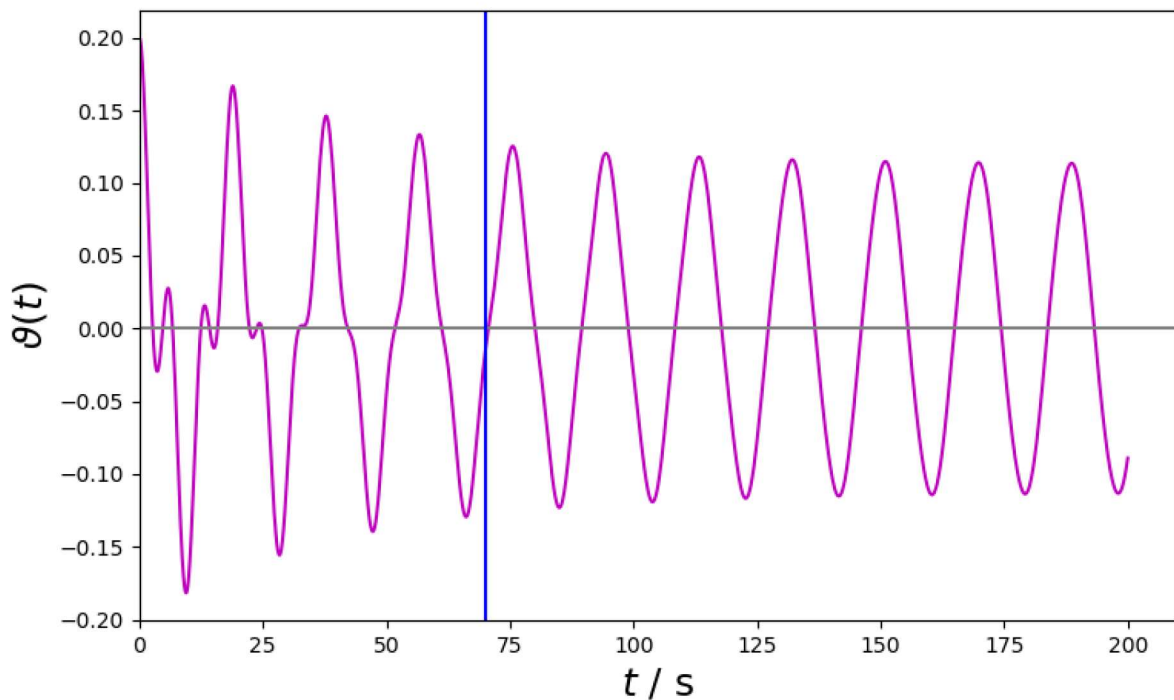


```

kut = rjesenje[:,0]
brzina = rjesenje[:,1]

plt.plot(vrijeme, kut, 'm-')
plt.xlabel("$t$ / s", size = 18)
plt.ylabel("$\vartheta(t)$", size = 18)
plt.axhline(0,color='gray')
plt.axvline(0,color='gray')
plt.axvline(70,color='blue')
plt.show()

```



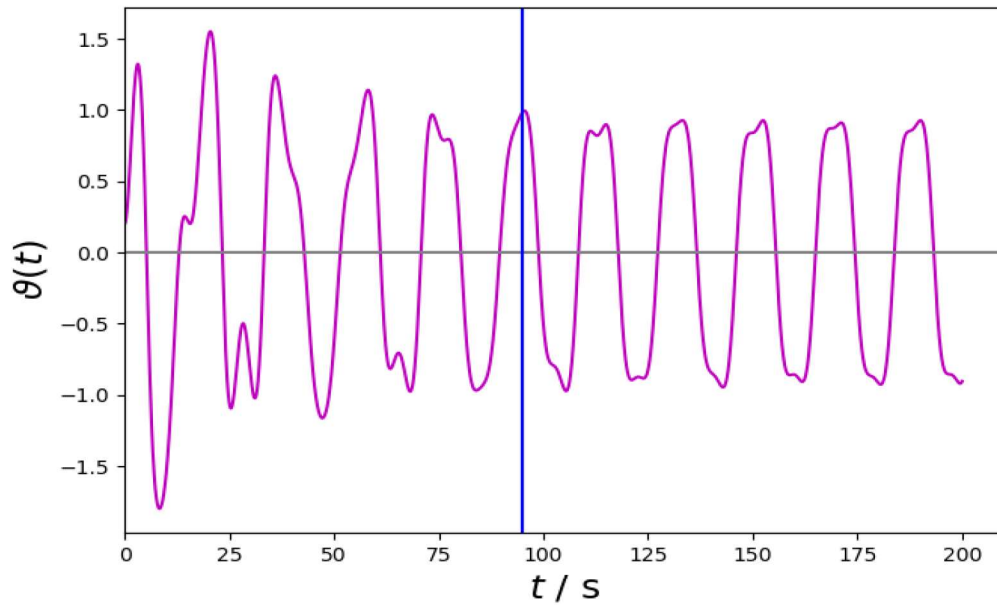
Slika 5.8: Ovisnost kuta o vremenu za tjerano njihalo za vrijednost amplitude $A=0.1$

Ako analiziramo sliku 5.8, vidimo da tjerano njihalo pokazuje kaotičan režim rada za vremenski interval od 0 do 70 s (iza plave linije). Nakon $t > 70$ (poslije plave linije), njihalo prelazi u regularan način rada jednak slobodnom njihalu (slika 5.2).

Ako sada povećamo vrijednost amplitude na $A = 0.8$, dobijemo sljedeće⁶;

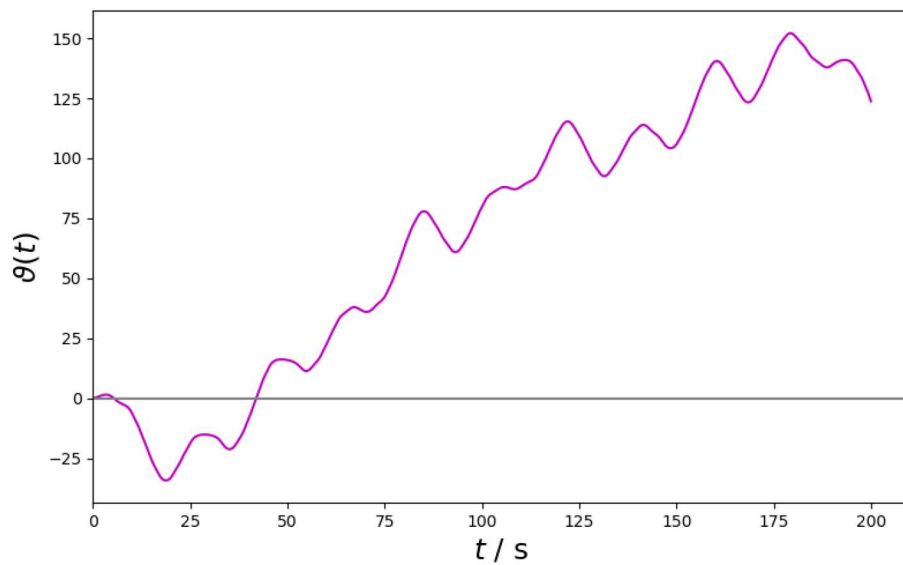
⁶Jedina izmjena u kodu je promijna vrijednosti $A=0.1 \rightarrow A=0.8$

Vidimo sa slike 5.9 da je njihalo u kaotičnom načinu rada u vremenskom intervalu $0 < t < 90$ te za $t > 90$ prelazi u abnormalni regularni način rada. [4], [19], [25]

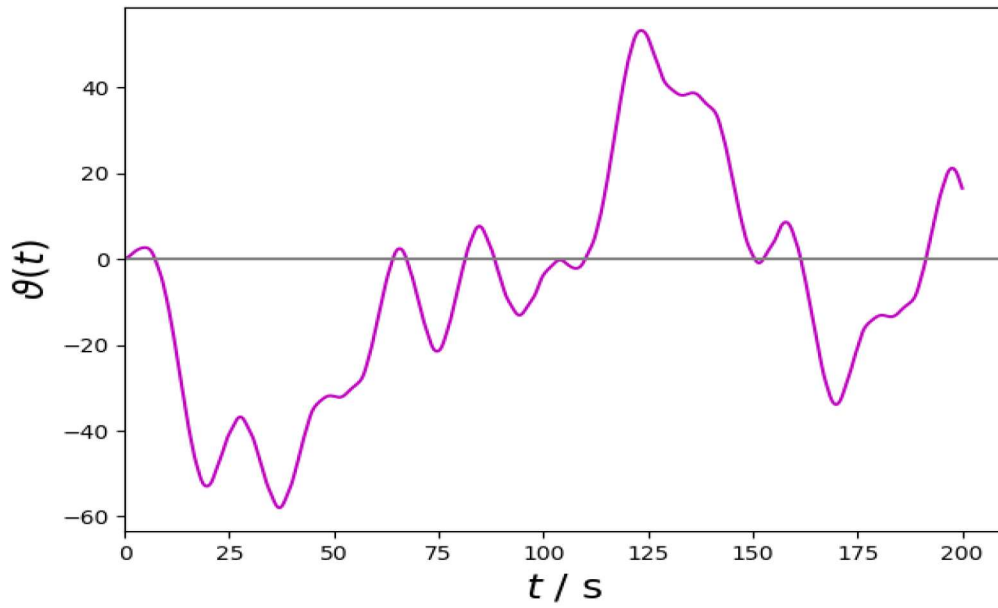


Slika 5.9: Ovisnost kuta o vremenu za tjerano njihalo za vrijednost amplitude $A=0.8$

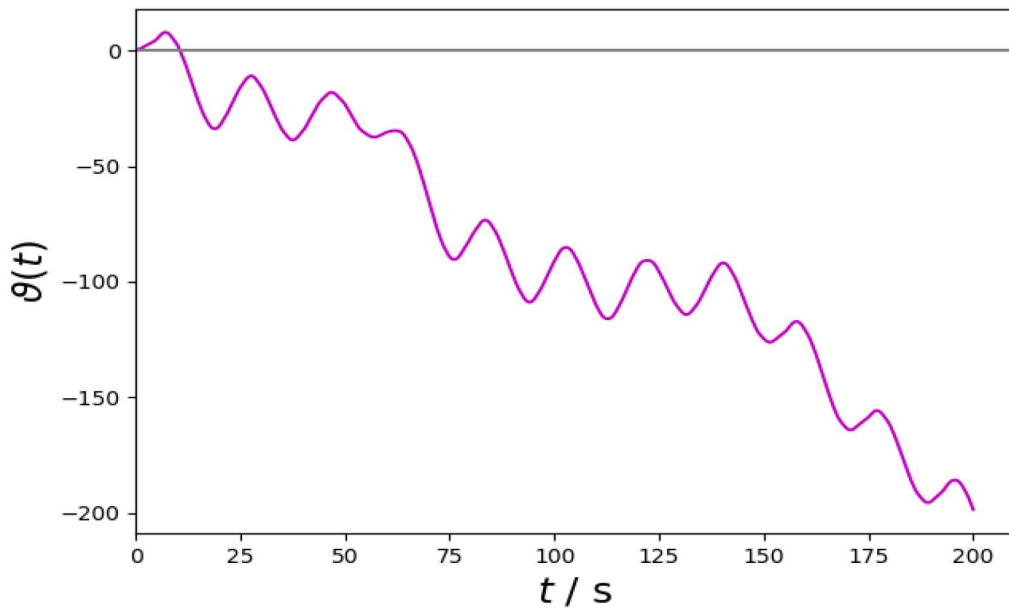
Povećajmo sada vrijednost amplitude za mali iznos, npr. na $A = 0.9$ i analizirajmo što se događa s tjeranim njihalom.



Slika 5.10: Ovisnost kuta o vremenu za tjerano njihalo za vrijednost amplitude $A=0.9$



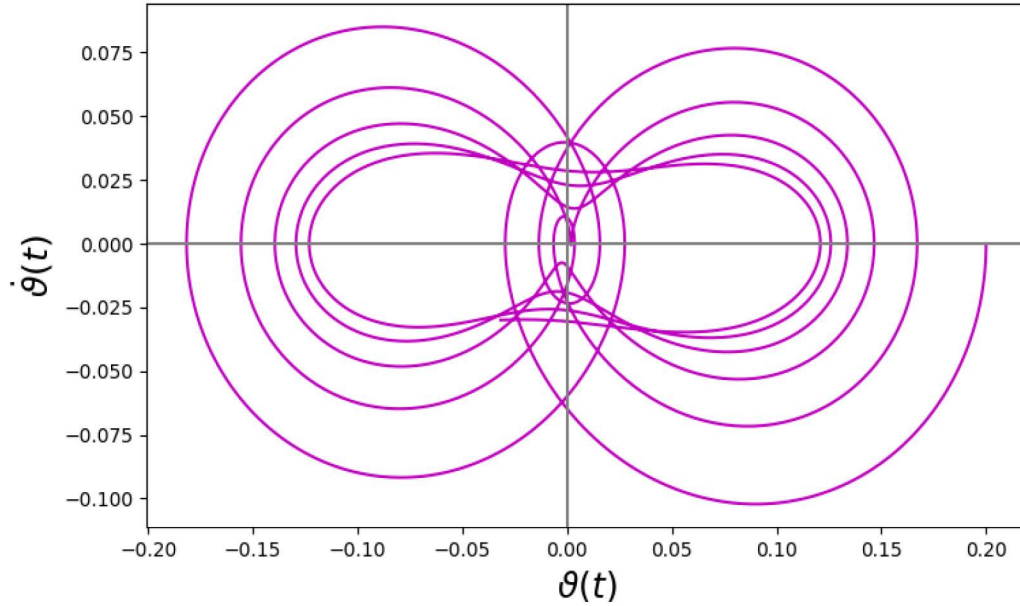
Slika 5.11: Ovisnost kuta o vremenu za tjerano njihalo za vrijednost amplitude $A=1.1$



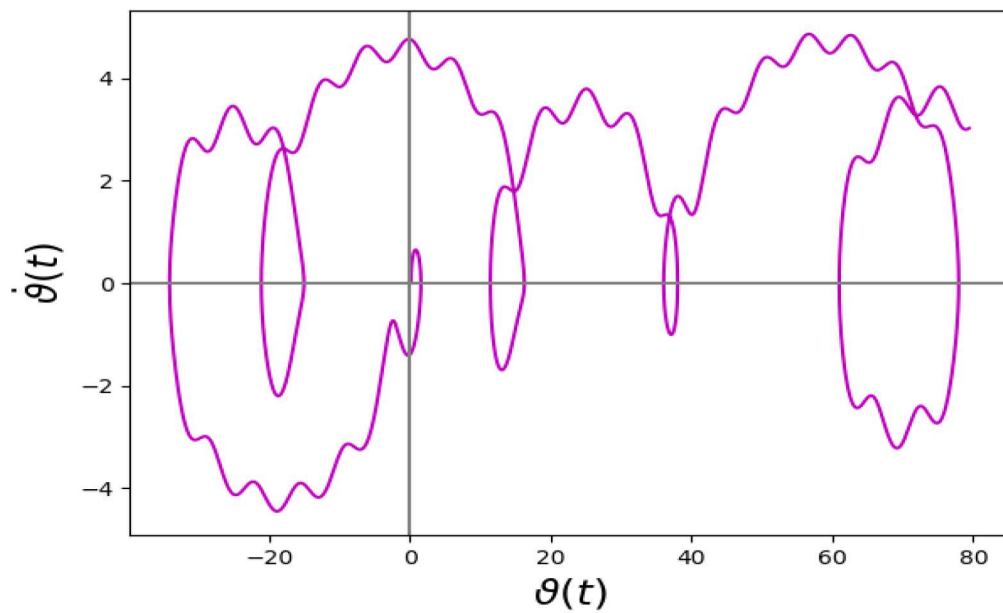
Slika 5.12: Ovisnost kuta o vremenu za tjerano njihalo za vrijednost amplitude $A=1.2$

5.1.3 Fazni prostor

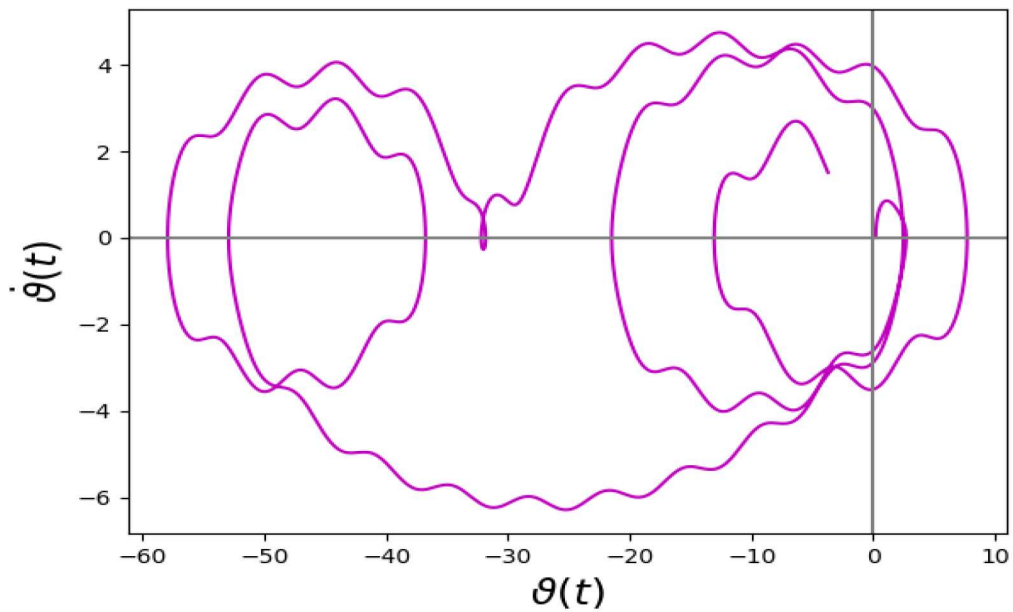
Pogledajmo sada kako izgleda prikaz gibanja tjeranog njihala u faznom prostoru za iste vrijednosti amplitude A .



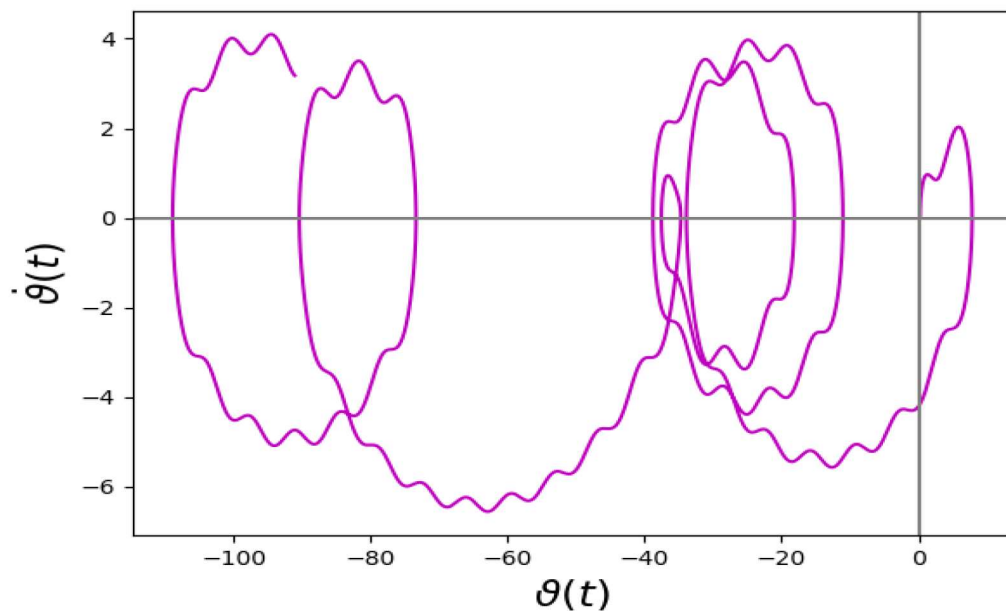
Slika 5.13: Prikaz gibanja tjeranog njihala u faznom prostoru za vrijednost amplitude $A=0.1$



Slika 5.14: Prikaz gibanja tjeranog njihala u faznom prostoru za vrijednost amplitude $A=0.9$



Slika 5.15: Prikaz gibanja tjeranog njihala u faznom prostoru za vrijednost amplitude $A=1.1$



Slika 5.16: Prikaz gibanja tjeranog njihala u faznom prostoru za vrijednost amplitude $A=1.2$

5.1.4 Analiza rezultata

Periodički tjerano matematičko njihalo prelazi iz regularnog u kaotičan način rada pod određenim uvjetima. Prijelaz u kaotičan način rada ovisit će o vrijednosti amplitude djelovanja

vanjske sile A . Kada smo vrijednost amplitude postavili na ničticu, $A = 0$, dobili smo slučaj prigušenog njihala koji smo imali ranije. Ako smo sada amplitudu malo povećali, na $A = 0.1$, dobili smo takvo gibanje matematičkog njihala koje je u prvom dijelu vremenskog intervala kaotično, a nakon toga regularno.

Nakon toga smo postavili vrijednost amplitude na $A = 0.8$ te također dobili gibanje koje je u vremenskom intervalu $0 < t < 90$ kaotično, a nakon toga prelazi u abnormalno regularno. Nakon toga smo vrijednost amplitude neznatno promijenili, dakle $A = 0.9$ i dobili smo takvo gibanje koje je na cijelom vremenskom intervalu kaotično (nepredvidljivo). Dakle, zaključujemo da je

MALA PROMJENA POČETNOG UVJETA REZULTIRALA DRASTIČNOM PROMJENOM U RJEŠENJU

Isto se dogodilo i za iduću promjenu amplitude na vrijednost $A = 1.1$ te $A = 1.2$. Isti se zaključak mogao dobiti i analizom gibanja u faznom prostoru gdje iz grafova također vidimo drastične promijene rješenja za malu promijenu početnih uvjeta.

Iz svega navedenog, zaključujemo da je hipoteza kako određeni deterministički (klasični) dinamički sustavi pokazuju izrazitu osjetljivost na male promijene u početnim uvjetima jasno vidljiva iz danih grafičkih prikaza, budući da izrazito mala promijena početnih uvjeta, npr. $A = 1.1 \rightarrow A = 1.2$ vodi na potpuno drugačije ponašanje sustava.

Kritična vrijednost amplitude nakon koje sustav prelazi u potpuno kaotičan režim jest

$$A_c = 0.8 \tag{5.4}$$

dakle, za vrijednost $A > A_c$, sustav u potpunosti prelazi iz regularnog u kaotični način rada.

Valja još napomenuti da vrijednosti ovdje odabrane, nisu jedine vrijednosti za koje postoji prijelaz u kaos; one samo služe radi demonstracije. Naime, dok god vrijedi $A > 0$ sustav će biti kaotičan, iako će to također ovisiti i o sili prigušenja, tj. vrijednosti koeficijenta prigušenja γ , u smislu da ja za malu vrijednost koeficijenta prigušenja, potrebna mala vrijednost vanjske sile, tj. amplitude djelovanja vanjske sile i obratno⁷.

5.2 Lorenzov model

Lorenzov⁸ model predstavlja općeniti mehanički model, a on je opisan s jednom ili više diferencijalnih jednadžbi, bilo običnih bilo parcijalnih, koje u potpunosti opisuju gibanje nekog fluida uz određene uvjete pod kojima se taj fluid nalazi. Model je zanimljiv po tome što se pomoću njega mogu objasniti određeni kaotični procesi koji su uočeni u našoj atmosferi. Međutim, Lorenz do diferencijalnih jednadžbi koje opisuju ovaj model nije došao promatrajući fizičke pojave u atmosferi nego na jedan posve drukčiji način. Više o tome u nastavku.

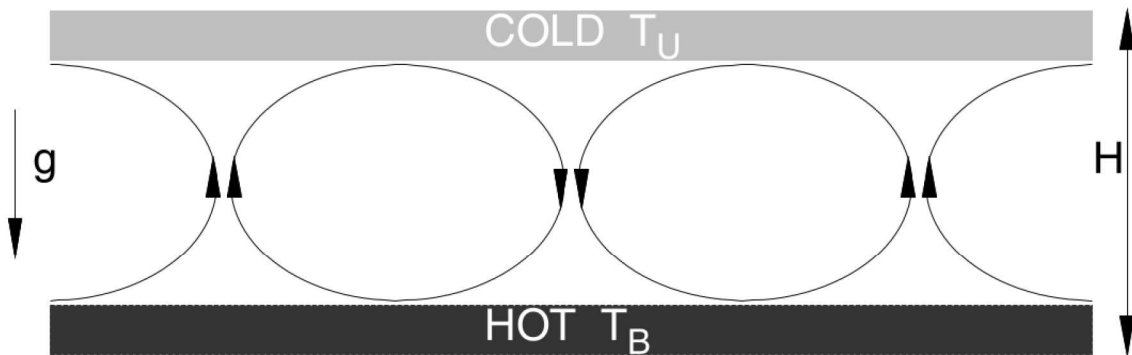
⁷Ovo je svojstvo u skladu s dosadašnjim opažanjima u prirodi, budući da su uzroci prigušenja u prirodi različiti za različite sustave.

⁸Edward Norton Lorenz, 23. V. 1917. - 16. IV. 2008., američki matematičar i meteorolog.

5.2.1 Opis modela

Povijesno gledano, jedan od prvih primjera nelinearnih dinamičkih sustava sa svojstvom determinističkog kaosa, koji je bio detaljno analiziran jest Lorenzov model kojeg je 1963. godine opisao američki meteorolog Edward Lorenz. Lorenz je do modela došao proučavajući problem poznat pod nazivom *Rayleigh-Bénardova konvekcija*. Dobro poznati problem iz mehanike fluida.

Opis problema jest sljedeći. Zamislimo neki fluid, koji je u početku mirovao, te koji je s gornje i donje strane ograđen s dvije uske beskonačno dugačke ploče koje su na stalnoj temperaturi i stalnoj međusobnoj udaljenosti, u smjeru osi x . Na fluid sve vrijeme djeluje sila teža, usmjerena u smjeru z -osi. Konstantne temperature ploča neka su T_U i T_B . Stalnu udaljenost ploča označit ćemo s H .



Slika 5.17: Prikaz Raleigh-Bénardove stabilne konvekcije u dvije dimenzije.

Gustoća fluida će tada biti funkcija temperature, $\rho = \rho(t)$. Dakle, u slučaju $T_U = T_B$, gustoća će biti stalna, $\rho = const.$, na cijelom volumenu. Ako je pak $T_U \neq T_B$, tada će gustoća ovisiti o promatranoj točki. Konačno, za slučaj $T_U > T_B$, fluid će se sastojati od dva sloja: hladnog sloja na dnu te toplog na vrhu. U ovom će slučaju, zbog razlike u temperaturi između dva sloja, fluid biti u stanju *kondukcije*, tj. između dva sloja fluida doći će do uspostave linearnog gradijenta. Uzimajući u obzir jednadžbe gibanja te činjenicu da se uspostavlja termalni gradijent, dolazimo do

$$T(z) = T(B) + z \frac{T_U - T_B}{H}$$

tj. temperatura će ovisiti o visini z . I takvo se stanje naziva kondukcija.

Ako je $T_U < T_B$, javlja se sila uzgona te dolazi do gubitka ravnoteže. Ako se ovo nastavi te ako temperaturna razlika $\Delta T = T_B - T_U$ dosegne neku kritičnu vrijednost, kondukciju će zamijeniti konvekcija. Takva se konvekcija naziva *Rayleigh-Bénardova konvekcija* i ona je kontrolirana jednim parametrom koji se zove *Rayleighov broj*, a čija je vrijednost dana s

$$Ra = \frac{\rho_0 g \alpha H^3 |T_U - T_B|}{\kappa \nu} \quad (5.5)$$

gdje je κ koeficijent termalne difuzije, a ν je koeficijent viskoznosti fluida. Prosječna je gustoća označena s ρ_0 , a α je koeficijent termalne dilatacije koji povezuje gustoće na temperaturama T i T_0 na način

$$\rho(T) = \rho(T_0) [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (5.6)$$

gdje je izraz (5.6) linearna aproksimacija⁹

Eksperimentalnim metodama i analitičkom analizom, dobiveno je da ako vrijednost *Rayleighovog broja*, R_a , postane znatno veća od neke kritične vrijednosti R_{ac} , tada stabilno *konvekcijsko* stanje sustava prelazi u nestabilno, tj. gibanje fluida tijekom *konvekcije* postaje iregularno i kaotično. Ovakva je pojava nepredvidljivog (kaotičnog) gibanja fluida za vrijeme *konvekcije* također uočena u nekim procesima u atmosferi, zvijezdama te Zemljinoj kori stoga je pobudila izniman interes, koji je prije svega usmjeren k tome da se otkrije uzrok nastanka ovog kaotičnog režima

Nadalje, vratimo se analizi Lorenzovog modela. Ako razlika u temperaturi ploča $|T_U - T_B|$ nije suviše velika, tada se parcijalne diferencijalne jednadžbe za temperaturu i brzinu mogu biti zapisane koristeći Boussinesqovu¹⁰ aproksimaciju¹¹

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \vec{u} + g\alpha\Theta \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta = \kappa \nabla^2 \Theta + \frac{T_U - T_B}{H} u_z \quad (5.8)$$

uz dodatni uvjet, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, koji kaže da je fluid nestlačiv.

Jednadžba (5.7) je poznata i kao Navier-Stokesova jednadžba gdje je p tlak, a posljednji član opisuje djelovanje sile uzgona. Jednadžba (5.8) naziva se advekcija difuzijska jednadžba. Θ označava varijaciju temperature, $\Theta(\vec{r}, t) = T(\vec{r}, t) - T_B + (T_B - T_U z/H)$. Ovdje se može prepoznati značenje *Rayleighovog broja*, R_a ; on mjeri razliku između nelinearnih članova, koji nastoje destabilizirati termalni gradijent, te viskoznih/disipativnih članova, koji nastoje zadržati stalni termalni gradijent.

Radi jednostavnosti, svest ćemo gore razmatrani problem na 2D slučaj, tj. na (x, z) ravninu (slika 5.17). U tom se slučaju gibanje fluida može opisati pomoću tkzv. *funkcije strujanja*,

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, z, t)$$

definirane na način

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (5.9)$$

⁹Linearna je aproksimacija opravdana ako razlike u temperaturi nisu velike.

¹⁰Joseph Valentin Boussinesq (1842. - 1929.), francuski matematičar i fizičar. Dao značajan doprinos na područjima hidrodinamike, titranja, svjetlosti i prijenosa topline.

¹¹Više o Boussinesqovoj aproksimaciji zainteresirani čitatelj može pronaći na poveznici.

$$u_z = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (5.10)$$

Uz ovo pojednostavljenje, rješenja jednažbi (5.7) te (5.8), u terminima ψ , su oblika

$$\psi = \psi_0 \sin\left(\frac{\pi ax}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (5.11)$$

$$\Theta = \Theta_0 \cos\left(\frac{\pi ax}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (5.12)$$

gdje su ψ_0 i Θ_0 konstante dok član a ima značenje valne duljine.

Analizom rješenja (5.11) te (5.12), dobivena je kritična vrijednost za R_a

$$R_{ac} = \frac{\pi^4 (1 + a^2)^3}{a^2} \quad (5.13)$$

tj. ako za slučaj $R_a > R_{ac}$, rješenja (5.11) i (5.12) postaju praktički neupotrebljiva za analitičku analizu. Jedan od mogućih načina da se izbjegne ovaj problem, jest da se funkcije ψ i Θ razviju u Fourieov red, uz pojednostavljenje koje se sastoji u tome da jedino koeficijenti posjeduju eksplicitu ovisnost o vremenu. Dakle,

$$\psi(x, z, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \sin\left(\frac{m\pi ax}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \quad (5.14)$$

$$\Theta(x, z, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \Theta_{m,n}(t) \cos\left(\frac{m\pi ax}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \quad (5.15)$$

Međutim, ako bi ova rješenja uvrstili u početne parcijalne diferencijalne jednažbe, (5.7) te (5.8), dobili bismo beskonačan broj običnih diferencijalnih jednažbi.

U tom je smislu, Edward Lorenz, 1963. godine proučavao samo najjednostavniji mogući slučaj u kojem se razmatraju samo prva tri koeficijenta. I to su redom:

- $\psi_{11}(t) = X(t)$ - amplituda konvekcije
- $\Theta_{11}(t) = Y(t)$ - temperaturna razlika između viših i nižih slojeva fluida
- $\Theta_{02} = Z(t)$ - mjera odstupanja od linearnog modela za temperaturu

Napomenimo još da izbor ovih pojednostavljenja nije bio proizvoljan, nego proizlazi iz simetrije početnih diferencijalnih jednažbi.

Konačno, uz gornja pojednostavljenja, dolazimo do tri obične diferencijalne jednažbe koje se nazivaju LORENZOVE JEDNADŽBE

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \quad (5.16)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (5.17)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (5.18)$$

gdje su σ , r i b bezdimenzijski parametri čije je fizičko značenje sljedeće:

- $\sigma = \nu/\kappa$ - u literaturi poznat pod nazivom Prandtlov broj;
- $r = R_a/R_{ac}$ - normalizirani Rayleighov broj;
- $b = 4(1 + a^2)^{-1}$ - parametar koji je povezan uz geometriju sustava;

Dakle, da rezimiramo. Ako razlika temperatura ploča, između kojih se nalazi promatrani fluid, naraste iznad neke vrijednosti proces koji nazivamo *kondukcija* prelazi u jedan drugi proces koji nazivamo *konvekcija*. Međutim, ako se razlika temperatura još više poveća i pređe neku kritičnu vrijednost, tada strujanje fluida (konvekcija) postaje kaotično (iregularno, nepredvidljivo).[8] Ovakve se pojave mogu uočiti u našoj atmosferi, stoga će gornje jednadžbe biti pogodne za opis tih procesa, budući da je problem, kvalitativno gledano, posve analogan¹².

5.2.2 Vizualizacija

Kritična vrijednost za r u literaturi iznosi $r_c = 24.74$. [8] Ono što je napravio Lorenz, i ono što ćemo napraviti i mi ovdje, jest da ćemo postaviti vrijednost $r_c = 28$. Dakle, puno više od kritične vrijednosti za koju će sustav biti u kaotičnom režimu. Prije toga ćemo vrijednost kontrolnog parametra r postaviti na neku vrijednost manju od kritične, npr. $r = 20$.

Rješimo najprije jednadžbe (5.16), (5.17) te (5.18) te postavimo $r = 20.0$. Skicirajmo X kao funkciju vremena.

```
#Lorentzov atraktor
```

```
import scipy.integrate as ing
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
sigma = 10.0
beta = 8.0/3.0
ro = 20.0
def jednadzba(tocka, t):
    x = tocka[0]
    y = tocka[1]
```

¹²Dakako, kvantitavno gledano, opis Rayleigh-Bénardove konvekcije i atmosferskih procesa, bit će posve drukčiji.

```

z = tocka[2]
xdot = sigma*(y-x)
ydot = x*(ro - z) - y
zdot = x*y - beta*z
return [xdot,ydot,zdot]

```

```

vrijeme = np.linspace(0.0, 70.0, 10000)
tockao = [2.0,3.0,4.0] #sami biramo
rjesenje = ing.odeint(jednadzba, tockao, vrijeme)

```

```

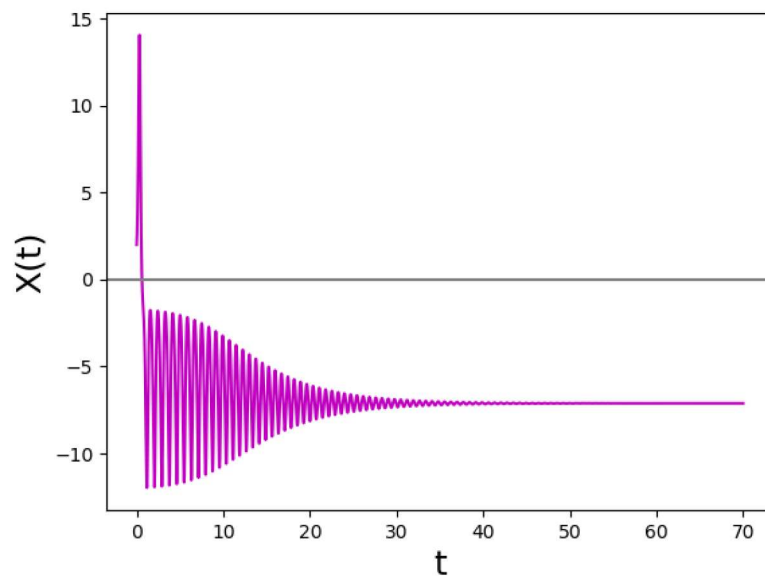
X = rjesenje[:,0]
Y = rjesenje[:,1]
Z = rjesenje[:,2]

```

```

plt.plot(X, Z, 'm-')
plt.xlabel('t', fontsize=18)
plt.ylabel('X(t)', fontsize=18)
#plt.plot(vrijeme, X, 'm-')
plt.axhline(0.0, color='grey')
plt.show()

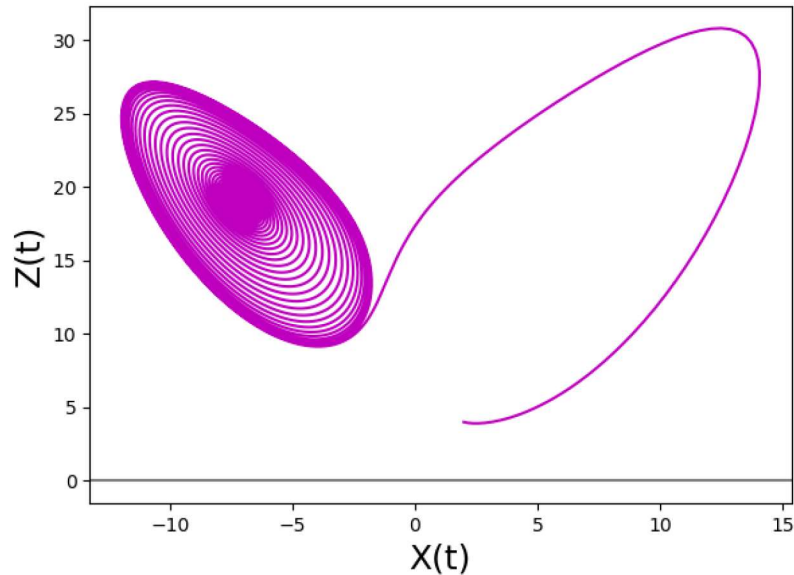
```



Slika 5.18: Lorenzov model: vremenska evolucija trajektorije $X(t)$ za vrijednosti parametara $\sigma = 10$, $b = 8/3$ te $r = 20$.

Sa slike 5.18 vidimo da se sustav najprije ponaša periodički, a zatim se konvergira, kod $t = 30$, nekoj konačnoj vrijednosti.

Skicirajmo sada evoluciju $X(t)$ i $Z(t)$; Sa donje slike vidimo da se i $X(t)$ i $Z(t)$ približavaju



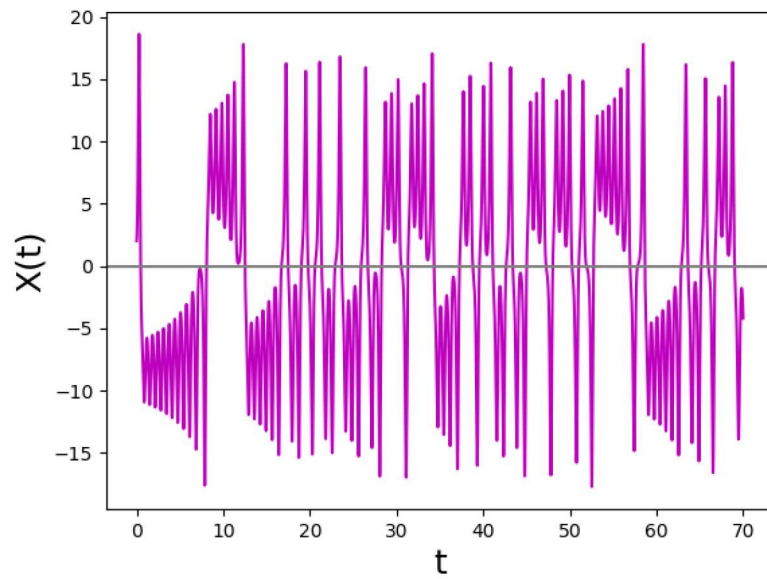
Slika 5.19: Lorenzov model: vremenska evolucija trajektorije $X(t)$ i $Z(t)$ za vrijednosti parametara $\sigma = 10$, $b = 8/3$ te $r = 20$.

nekoj konačnoj vrijednosti kako vrijeme teče.

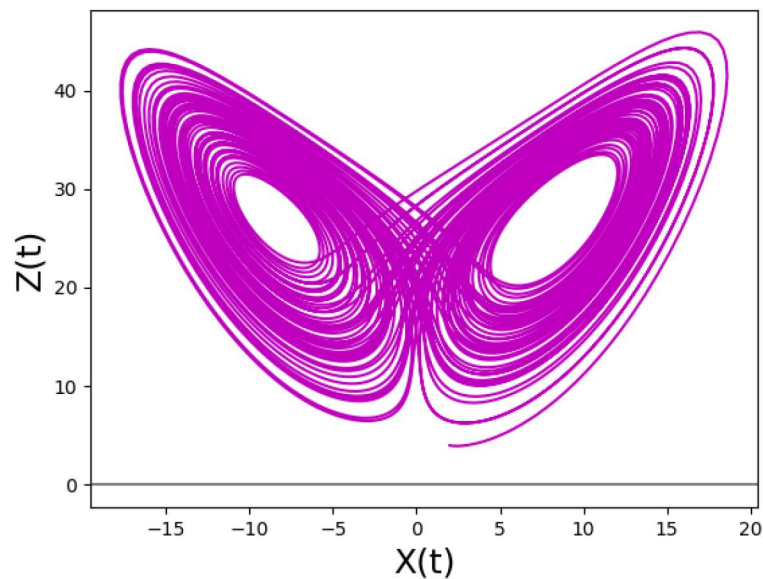
Postavimo sada vrijednost kontrolnog parametra r tako da bude veća od kritične. Na vrijednost $r = 28$.

Sa slike 5.20 možemo vidjeti da je ovisnost $X(t)$ kaotična, tj. nepredvidljiva, budući da je kontrolni parametar iznad kritične vrijednosti, $r > r_c$. Sa slike 5.21, koja daje vremensku evoluciju $X(t)$ i $Z(t)$, vidimo da postoji dio prostora kojem obje trajektorije nakon nekog vremena teže.

TAJ DIO PROSTORA KOJI PRIVLAČI SVE MOGUĆE TRAJEKTORIJE NAZIVA SE LORENZOV ATRAKTOR.



Slika 5.20: Lorenzov model: vremenska evolucija trajektorije $X(t)$ za vrijednosti parametara $\sigma = 10$, $b = 8/3$ te $r = 28$.



Slika 5.21: Lorenzov model: vremenska evolucija trajektorije $X(t)$ i $Z(t)$ za vrijednosti parametara $\sigma = 10$, $b = 8/3$ te $r = 28$.

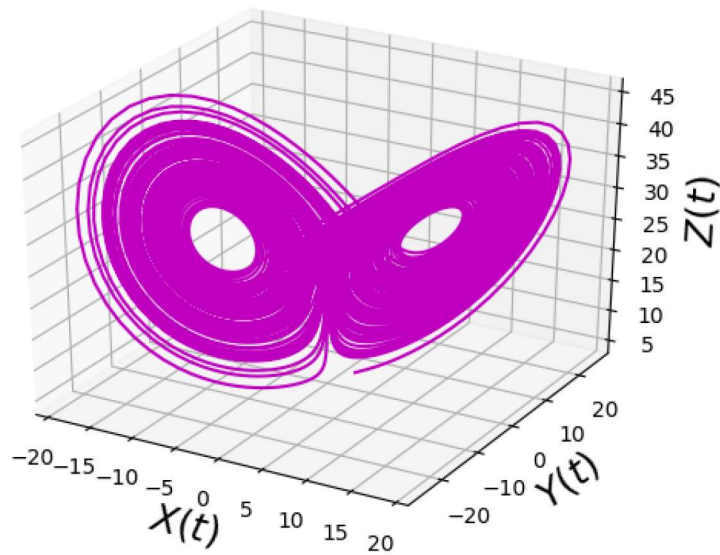
Prikažimo još Lorenzov atraktor u tri dimenzije.

Za to će nam trebati nova biblioteka pod nazivom *mpl toolkits*

```
import scipy.integrate as ing
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import mpl_toolkits.mplot3d
sigma = 10.0
b = 8.0/3.0
r = 28.0
def jednadzba(tocka, t):
    x = tocka[0]
    y = tocka[1]
    z = tocka[2]
    xdot = sigma*(y-x)
    ydot = x*(r - z) - y
    zdot = x*y - b*z
    return [xdot,ydot,zdot]
vrijeme = np.linspace(0.0, 100.0, 10000)
tocka0 = [2.0,3.0,4.0] #sami biramo
rjesenje = ing.odeint(jednadzba, tocka0, vrijeme)

X = rjesenje[:,0]
Y = rjesenje[:,1]
Z = rjesenje[:,2]

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
ax.plot(X, Y, Z, 'm-')
ax.set_xlabel('$X(t)$', fontsize=18, rotation=150)
ax.set_ylabel('$Y(t)$', fontsize=18)
ax.set_zlabel('$Z(t)$', fontsize=18, rotation=60)
plt.show()
```



Slika 5.22: Lorenzov atraktor u tri dimenzije.

Čitatelj je vjerojatno primijetio da ga lik sa slike 5.22 podsjeća na leptira.

Sve u svemu, iz gornje analize možemo zaključiti da je Lorenzov model, opisan sa tri obične diferencijalne jednačbe, jedan primjer determinističkog sustava koji posjeduju svojstvo determinističkog kaosa, tj. postoje uvjeti za koji takav sustav, iako deternistički, prelazi u način rada u kojem je nemoguće predvidjeti ponašanje sustava. Također,

PRIJELAZ U KAOTIČNI REŽIM LORENZOVOG MODELA OVISI O VRIJEDNOSTI
PARAMETRA r

koji mora biti iznad neke kritične vrijednosti, $r > r_c$. [8]

5.2.3 Osjetljivost na početne uvjete

Kako bi pokazali da rješenja Lorenzovih jednačbi pokazuju svojstvo kaotičnih sustava koje se zove osjetljivost na početne uvjete, napraviti ćemo sljedeće. Usporedit ćemo dvije trajektorije za dva slučaja: kada su početni uvjeti jako daleko i kada su jako bliski. Dakle, imat ćemo dvije trajektorije

$$X = X(t)$$

i perturbiranu trajektoriju

$$X' = X'(t)$$

Uzmimo za početak situaciju kada su početni uvjeti jako daleki;

```

import scipy.integrate as ing
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import mpl_toolkits.mplot3d

sigma = 10.0
b = 8.0/3.0
r = 28.0

def jednadzba(tocka, t):
    x = tocka[0]
    y = tocka[1]
    z = tocka[2]
    xdot = sigma*(y-x)
    ydot = x*(r - z) - y
    zdot = x*y - b*z
    return [xdot,ydot,zdot]

vrijeme = np.linspace(0.0, 100.0, 10000)
tocka0 = [2.0,3.0,4.0] #sami biramo
rjesenje = ing.odeint(jednadzba, tocka0, vrijeme)

X = rjesenje[:,0]
Y = rjesenje[:,1]
Z = rjesenje[:,2]

def jednadzba2(tocka, t):
    x = tocka[0]
    y = tocka[1]
    z = tocka[2]
    xdot = sigma*(y-x)
    ydot = x*(r - z) - y
    zdot = x*y - b*z
    return [xdot,ydot,zdot]

vrijeme = np.linspace(0.0, 100.0, 10000)
tocka00 = [20.0,30.0,40.0] #sami biramo
rjesenje = ing.odeint(jednadzba2, tocka00, vrijeme)

X1 = rjesenje[:,0]
Y1 = rjesenje[:,1]
Z1 = rjesenje[:,2]

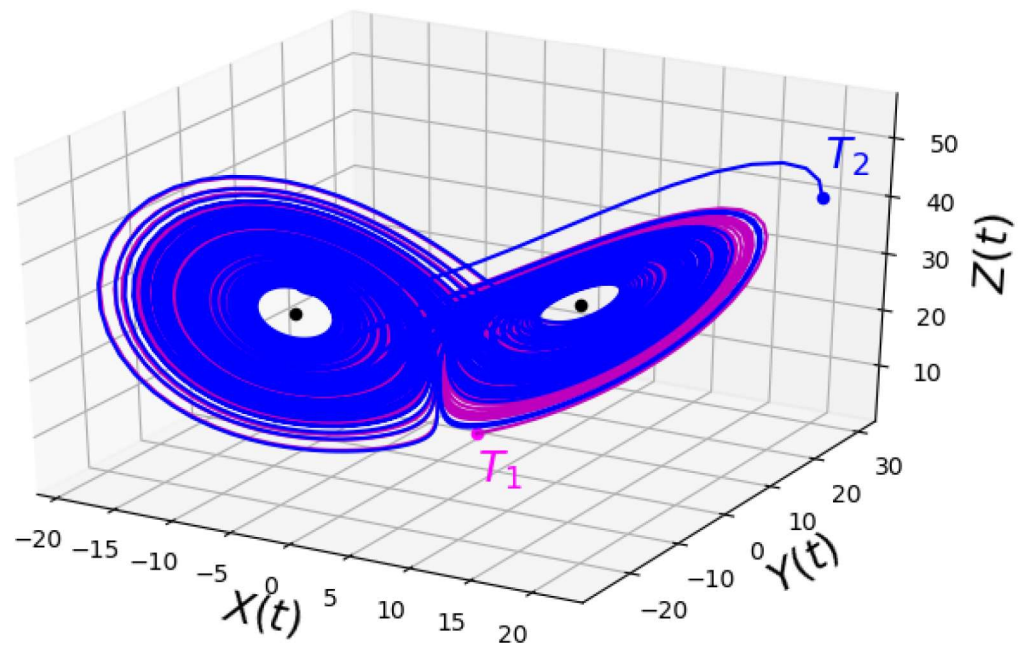
```



```

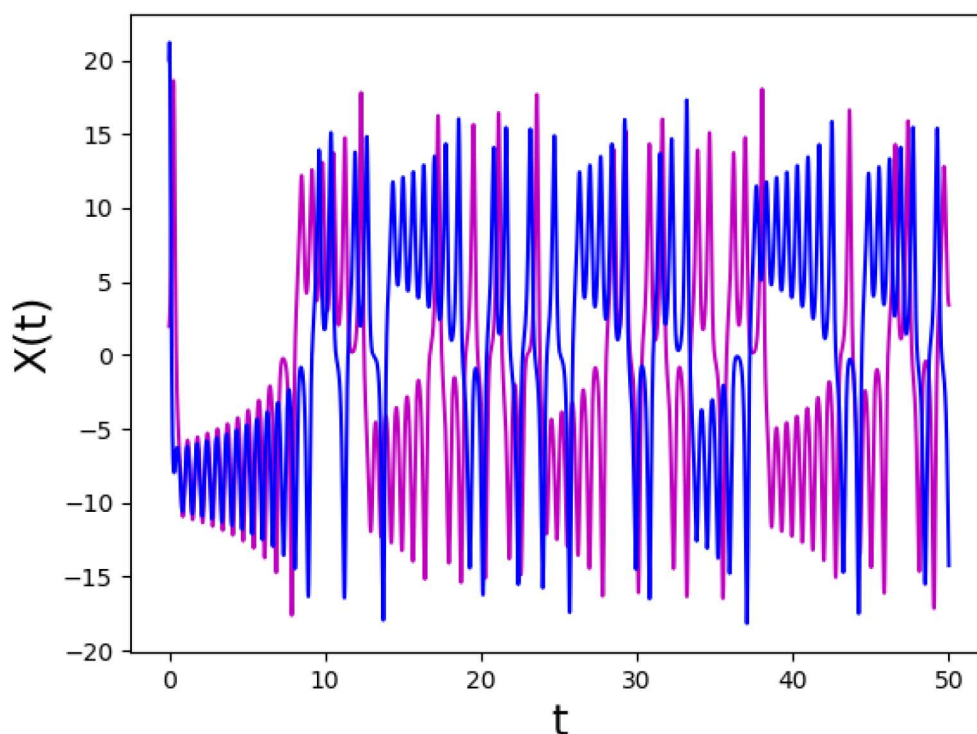
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
ax.plot(X, Y, Z, 'm-')
ax.plot(X1, Y1, Z1, 'b-')
ax.scatter(2,3,4, color='magenta')
ax.scatter(20,30,40, color='blue')
ax.scatter(6*np.sqrt(2),6*np.sqrt(2),27, color='black')
ax.scatter(-6*np.sqrt(2),-6*np.sqrt(2),27, color='black')
ax.set_xlabel('$X(t)$', fontsize=18, rotation=150)
ax.set_ylabel('$Y(t)$', fontsize=18)
ax.set_zlabel('$Z(t)$', fontsize=18, rotation=60)
plt.show()

```



Slika 5.23: Lorenzov model: evolucija dvije trajektorije za slučaj kada su početni uvjeti jako različiti.

Sa slike 5.23 vidimo da prva trajektorija T_1 nakon nekog vremena konvergira radeći kružne putanje naizgled nasumičnog trajanja oko dvije točke označene crnom bojom. Jezikom fizike, to znači da konvekcija fluida neregularno mijenja svoj smjer: u smjeru kazaljke na satu i obratno. Druga se trajektorija, T_2 , iako ostaje udaljena od prve zbog različitih početnih uvjeta, kvalitativno *ponaša* jednako kao i T_1 konvergirajući ka jednakom dijelu prostora u vremenu. Takva se vrsta atraktora koji privlači sve trajektorije naziva ČUDNI ATRAKTOR za Lorenzove jednadžbe¹³.



Slika 5.24: Lorenzov model: evolucija $X(t)$ (ljubičasta boja) i perturbiranog $X'(t)$ (plava boja) kada su početni uvjeti jako različiti.

Pogledajmo sada što se događa kada su početni uvjeti dvije trajektorije infinitezimalno bliski. Razmatrat ćemo dvije trajektorije - jednu sa početnim uvjetima $R(0) = (X(0), Y(0), Z(0))$ te drugu, jako blisku prvoj s početnim uvjetima $R'(0)$. Razlika početnih uvjeta će biti jako mala, reda veličine

$$\Delta R = |R(0) - R'(0)| = 10^{-6}$$

Rješimo sada pripadne diferencijalne jednadžbe te nacrtajmo vremensku evoluciju početne i perturbirane trajektorije. [8]

¹³Sa stanovišta matematike, nije nimalo trivijalno utvrditi je li neki atraktor čudan ili nije.

```

import scipy.integrate as ing
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import mpl_toolkits.mplot3d

sigma = 10.0
b = 8.0/3.0
r = 28.0

def jednadzba(tocka, t):
    x = tocka[0]
    y = tocka[1]
    z = tocka[2]
    xdot = sigma*(y-x)
    ydot = x*(r - z) - y
    zdot = x*y - b*z
    return [xdot,ydot,zdot]

vrijeme = np.linspace(0.0, 50.0, 10000)
tocka0 = [2.0,3.0,4.0] #sami biramo
rjesenje = ing.odeint(jednadzba, tocka0, vrijeme)

X = rjesenje[:,0]
Y = rjesenje[:,1]
Z = rjesenje[:,2]
def jednadzba2(tocka, t):
    x = tocka[0]
    y = tocka[1]
    z = tocka[2]
    xdot = sigma*(y-x)
    ydot = x*(r - z) - y
    zdot = x*y - b*z
    return [xdot,ydot,zdot]

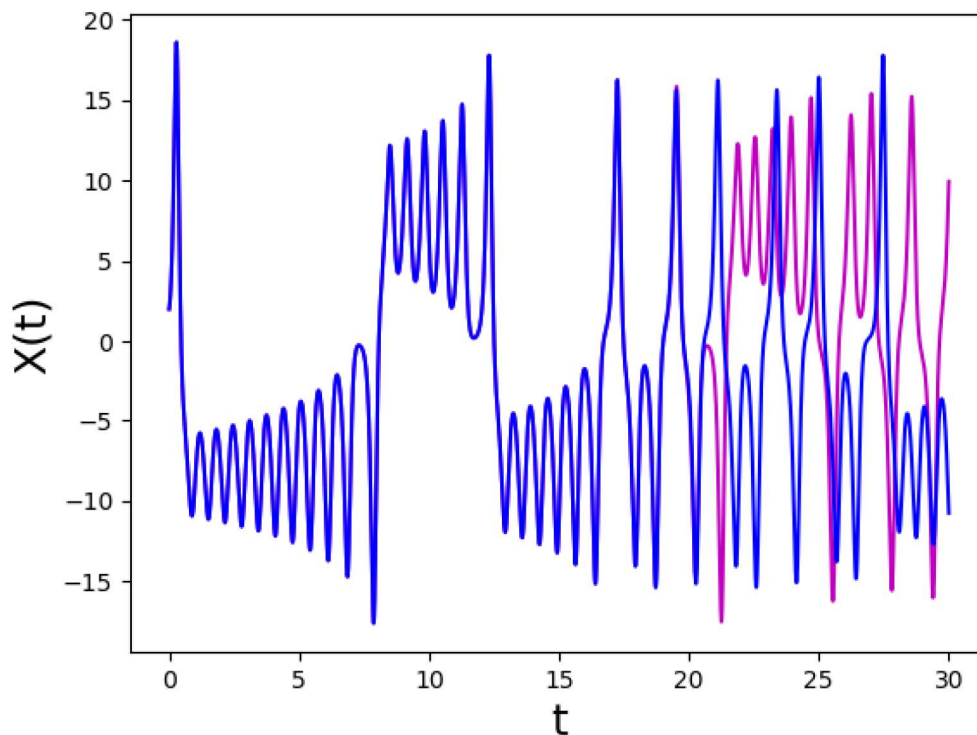
vrijeme = np.linspace(0.0, 30.0, 10000)
tocka00 = [2.000000333,3.00000033,4.00000033] #sami biramo
rjesenje = ing.odeint(jednadzba2, tocka00, vrijeme)
X1 = rjesenje[:,0]
Y1 = rjesenje[:,1]
Z1 = rjesenje[:,2]

```

```

plt.plot(vrijeme,X,'m-')
plt.plot(vrijeme,X1,'b-')
plt.xlabel("t", size = 18)
plt.ylabel("X(t)", size = 18)
plt.show()

```



Slika 5.25: Lorenzov model: evolucija $X(t)$ (ljubičasta boja) i perturbiranog $X'(t)$ (plava boja) kada su početni uvjeti jako bliski. $\Delta R = 10^{-6}$.

Iz analize drugog slučaja za infinitezimalno bliske početne uvjete, sa slike 5.25, vidimo da je za vremenski interval $t < 20$, trajektorije gotovo nemoguće razdvojiti. No, kako vrijeme odmiče, događa se to da dvije trajektorije, iako kvalitativno posve jednake, bivaju makroskopski odvojive.

Ovo svojstvo, da dvije kvalitativno jednake trajektorije, bivaju makroskopski različite zbog neznatne promjene u početnim uvjetima nazivamo OSJETLJIVOST SUSTAVA NA POČETNE UVJETE i to je jedno od temeljnih svojstava kaotičnih (nepredvidljivih) sustava.

Za kraj spomenimo još da su istraživanja pokazala da za $r > 28$, tj. vrijednost parametra r , kontrolnog parametra, veću od 28, postoje režimi koje karakterizira izmjena između periodičnih i kaotičnih ponašanja sustava.

5.2.4 Veza s meteorologijom

Model tipa Lorenzovog modela, koji smo upravo opisali, pojavljuje se u analizi određenih fizičkih procesa koji se događaju u našoj atmosferi, prilikom meteoroloških predviđanja, tj. izrade vremenske prognoze. Budući da smo pokazali kako rješenja jednadžbi, koje proizlaze iz takvog modela, posjeduju svojstvo determinističkog kaosa za neku vrijednost kontrolnog parametra te da pokazuju jedno stvojestvo koje smo nazvali izrazita osjetljivost na početne uvjete, to zaključujemo da

DUGOROČNA VREMENSKA PROGNOZA NIKADA NEĆE BITI MOGUĆA, ČAK NITI U NAČELU.

Razlog je taj da beskonačno mala promjena u početnim uvjetima, može dovesti do drastično drukčijeg ponašanja sustava, tj. male promjene u klimatskim uvjetima mogu dovesti do značajnog drugačijeg klimatskog ishoda. Ove je male promjene praktički nemoguće detektirati.

Ova se činjenica poradi lakšeg shvaćanja često zna izraziti na slikoviti način pa se tako zna reći kako

ZAMAH KRILIMA LEPTIRA NA JEDNOM KRAJU SVIJETA, NPR. U HRVATSKOJ, MOŽE UZROKOVATI ORKANSKI URAGAN NA NEKOM DRUGOM KRAJU SVIJETA, NPR. U JAPANU.

i taj je pojava poznata pod nazivom LEPTIROV EFEKT. Zamah krilima leptira bi u ovom primjeru bila infinitezimalno mala promjena početnih uvjeta, a orkanski uragan bio bi konačno drugačiji oblik rješenja pripadnih jednadžbi uzrokovan tom promjenom.

6 Zaključak

Svi procesi u prirodi mogu teći na dva različita načina: regularni (predvidljivi) režim i kaotični (nepredvidljivi) režim. Kod regularnog se režima sustav ponaša u osnovi deterministički, dakle njegovo je ponašanje moguće predvidjeti. Ako govorimo o dinamičkom sustavu, tada je njegovo stanje u proizvoljnom budućem vremenskom trenutku potpuno određeno, determinirano, poznavanjem pripadne jednadžbe gibanja i poznavanjem početnih uvjeta. Regularni je način rada, iako ograničen, vrlo važan za objašnjenje brojnih prirodnih pojava kao i modeliranje određenih procesa u tehnici, medicini i drugim djelatnostima. Drugi način rada, onaj kaotični, dobiven je u slučaju kada su jednadžbe gibanja nelinearne i tada, bez obzira na to što je stanje sustava opisano determinističkim jednadžbama gibanja, ne možemo predvidjeti buduće stanje sustava. Međutim, vidjeli smo da kaotični režim također posjeduje svoje unutarnje zakonitosti, bez obzira na to što je u takvom načinu rada determinizam narušen. Budući da su brojni sustavi u prirodi, medicini, biologiji, društvenim znanostima, tehnici upravo u tom kaotičnom načinu rada, to je od iznimnog značaja razumijeti te zakonitosti. U radu smo pokazali kako možemo modelirati kaos za diskretne i za kontinuirane vremenske serije. Postupak je uvijek bio isti: najprije treba odrediti diferencijalnu jednadžbu koja opisuje stanje sustava, zatim odrediti vrijednost parametara sustava te utvrditi koj je parametar kontrolni. Mijenjanjem vrijednosti kontrolnog parametra sustav smo preveli u kaotični režim. Također smo vidjeli kako prijelaz u kaos možemo pratiti u bifurkacijskom dijagramu. Nadalje, pokazali smo kako kaotični sustavi pokazuju ekstremnu osjetljivost na promjenu početnih uvjeta.

Sve u svemu možemo zaključiti da je teorija determinističkog kaosa dobila svoju potpunu afirmaciju u svijetu znanosti te se korištenjem računalne tehnologije može doći do spoznaja koje su do sada bile potpuno nepoznate. U godinama koje slijede takvih će spoznaja i rezultata zasigurno biti još.

Literatura

Knjige

- [1] V. Paar, Fizika 4, udžbenik za 4. razred gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2009.
- [2] I. Stuart, Kocka li se Bog? Nova matematika kaosa, Naklada Jesenski i Turk, Zagreb, prosinac 2013.
- [3] J. Gleick, CHAOS Making a New Science, Viking Penguin Inc., 40 West 23rd Street, New York USA, 1987.
- [4] H. G. Schuster, W. Just, Deterministic Chaos An Introduction, WILEY-VCH Verlag GmbH et Co. KGaA, Weinheim, 2005.
- [5] P. Garbaczewsk, M. Wolf, A. Weron, Chaos The Interplay Between Stochastic and Deterministic Behaviour, Springer, New York, 1995.
- [6] H. O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, Chaos and Fractals, Springer, New York, 2004.
- [7] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, Chaos: Classical and Quantum, printed August 18, 2022.
- [8] M. Cencini, F. Cecconi, A. Vulpiani, Chaos From Simple Models to Complex Systems, Series on Advances in Statistical Mechanics – Vol. 17, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010.
- [9] M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos, Academic Press, Oxford UK, 2013.
- [10] A. A. Martynyuk et all, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, An International Journal of Research and Surveys, Informath Publishing Group, 2001.
- [11] L. Lam, Introduction to Nonlinear Physics, Springer, 1997.
- [12] A. S. Fokas, D. J. Kaup, A. C. Newel, V. E. Zakharov, Nonlinear Processes in Physics, Springer, 1993.
- [13] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering, CRC Press, Taylor and Francis Group, 2015.
- [14] M. Ausloos, M. Dirickx, The Logistic Map and the Route to Chaos, From the Beginnings to Modern Applications, Springer, 2006.
- [15] E. Ayars, Computational Physics With Python, 2013.

Članci

- [16] Leszczyński, M., Perlikowski, P., Burzyński, T., Kowalski, T. M., Brzeski, P. Review of sample-based methods used in an analysis of multistable dynamical systems, *Chaos* 32, 082101 (2022)
- [17] Ortega, G. J., Louis, E. Detecting deterministic dynamics in stochastic systems, *AIP Conference Proceedings* 502, 662 (2000); doi: 10.1063/1.1302449
- [18] Boeing, G., *Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction* (2016), *Systems* 2016, 4, 37; doi:10.3390/systems4040037
- [19] Broer, H. W., Krauskopf, B., *Chaos in periodically driven systems*, *AIP Conference Proceedings* 548, 31 (2000); <https://doi.org/10.1063/1.1337757>
- [20] Ditto, W. L., *Applications of chaos in biology and medicine*, *AIP Conference Proceedings* 376, 175 (1996); doi: 10.1063/1.51060
- [21] Glass, L., *Introduction to Controversial Topics in Nonlinear Science: Is the Normal Heart Rate Chaotic?*, *Chaos* 19, 028501 (2009); doi: 10.1063/1.3156832
- [22] M. E. D. Gomes, A. V. P. Souza, H. N. Guimarães, and L. A. Aguirre, *Investigation of determinism in heart rate variability*, *Chaos* 10, 398 (2000); doi: 10.1063/1.166507
- [23] Y. Hirata, M. Oku, K. Aihara, *Chaos in neurons and its application: Perspective of chaos engineering*, *Chaos* 22, 047511 (2012); doi: 10.1063/1.4738191
- [24] B. R. Hunt and E. Ott, *Defining chaos*, *Chaos* 25, 097618 (2015); doi: 10.1063/1.4922973
- [25] J. E. Marsden, T. S. Ratiu, F. ScheckMeinhard, E. Mayer, *Introduction to Mechanics and Symmetry and Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*, *Physics Today* 48, 12, 70 (1995); doi: 10.1063/1.2808303
- [26] Mark L. Spano, and William L. Ditto, *Controlling chaos*, *AIP Conference Proceedings* 296, 137 (1994); <https://doi.org/10.1063/1.45295>

URL

- [27] <https://www.comsol.com/multiphysics/boussinesq-approximation>
- [28] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Henri_Poincar%C3%A9-2.jpg
- [29] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/Laplace%2C_Pierre-Simon%2C_marquis_de.jpg

Životopis

Filip Savanović rođen je 11. 3. 1996. godine u Osijeku. Pohađao je Osnovnu školu Miroslava Krležu u Čepinu. Po završetku osnovne škole upisuje Prirodoslovno matematičku gimnaziju u Osijeku. Istu završava 2015. godine te iste godine upisuje preddiplomski studij na Odjelu za fiziku u sastavu Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Preddiplomski studij završava 2019. godine i stječe titulu sveučilišnog prvostupnika fizike. Iste godine upisuje Diplomski nastavnički studij fizike i informatike na Odjelu za fiziku u Osijeku.