SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

IVANA JERKOVIĆ

METODA NAJMANJIH KVADRATA I NJEZINA PRIMJENA U FIZICI

Diplomski rad

Osijek, 2016.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

IVANA JERKOVIĆ

METODA NAJMANJIH KVADRATA I NJEZINA PRIMJENA U FIZICI

Diplomski rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku radi stjecanja zvanja magistra edukacije fizike i informatike

Osijek, 2016.

Ovaj diplomski rad izrađen je u Osijeku pod vodstvom doc. dr. sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog diplomskog studija fizike i informatike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

SADRŽAJ

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku **Diplomski rad**

Odjel za fiziku

METODA NAJMANJIH KVADRATA I NJEZINA PRIMJENA U FIZICI

IVANA JERKOVIĆ

Sažetak

U diplomskom radu predstavljena je metoda najmanjih kvadrata i njezina primjena u fizici. Cilj rada je bio upoznati se s razvojem metode kroz povijest, postavljanje problema te prikazati postupak njihova rješavanja kao i upoznavanje s primjenom same metode u području fizike. Kao uvod u problematiku kojom se bavi ovaj diplomski rad, ukratko su objašnjeni osnovni pojmovi regresijske analize. Središnji dio diplomskog rada sastoji se od dva poglavlja, koji su isključivo vezani za metodu najmanjih kvadrata. U poglavlju *Povijest metode najmanjih kvadrata* opisan je slijed kojim se metoda razvijala, dok je u poglavlju *Metoda najmanjih kvadrata* predstavljeno na koji se način procjenjuje model regresije te je opisan postupak procjene nepoznatih parametara regresije. Na kraju diplomskog rada dani su primjeri vezani uz područje fizike.

(29 stranica; 10 slika; 4 tablice; 15 literaturnih navoda)

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: regresijski pravac / metoda najmanjih kvadrata / parametri / varijabla

Mentor: doc. dr. sc. Zvonko Glumac

Ocjenjivači: izv. prof. dr. sc. Ramir Ristić, mr. sc. Slavko Petrinšak

Rad prihvaćen: 13. travnja 2016.

University Josip Juraj Strossmayer Osijek **Master Thesis**

Department of Physics

LEAST SQUARES METHOD AND ITS USAGE IN PHYSICS

IVANA JERKOVIĆ

Abstract

This master thesis presents the least squares method and its usage in physics. The purpose of this paper was to describe the development of this method through history, problem setup and the procedure of problem solving as well as its usage in physics. As an introduction to the thesis of this paper, we gave a brief introduction to the main terms of regression analysis. The central part of the paper is formed out of two chapters which entirely deal with least squares method. The chapter *The history of the least squares method* describes the sequence in which the method had developed, while the chapter *Least squares method* describes the assessment of regression model and the assessment of unknown regression parameters. At the end of the paper we have presented examples in field of physics.

(29 pages; 10 images, 4 tables; 15 references)

The thesis is deposited in the Department of Physics Library

Keywords: regression line / least squares method / parameters / variable

Supervisor: doc. dr. sc. Zvonko Glumac

Reviewer: izv. prof. dr. sc. Ramir Ristić, mr. sc. Slavko Petrinšak

Thesis accepted: April 13., 2016.

1. UVOD

Provođenjem eksperimentalnog mjerenja prikuplja se veliki broj podataka. Kako bi se prikupljeni podatci lakše vizualizirali, najbolje ih je prikazati grafički. Broj ucrtanih točaka u dijagram rasipanja ovisit će o veličini samog eksperimenta. Što je eksperiment veći, više je prikupljenih podataka te je samim time veći i broj ucrtanih točaka (tj. parova brojeva) u dijagram rasipanja.

Ono što se iz grafičkog prikaza podataka želi saznati jest kakav je odnos između prikazanih podataka. Tu vezu možemo saznati odredimo li nepoznate parametre (kao što su npr. koeficijent smjera ili odsječak na y osi). Kako bismo te nepoznate parametre najuspješnije odredili potrebno je poznavati najmanje dvije točke unutar prikazanog dijagrama.

S obzirom na to da raspolažemo većim brojem točaka, suočeni smo s problemom na koji način odrediti nepoznate parametre te kako utvrditi vezu između prikazanih podataka dobivenih eksperimentalnim mjerenjem.

U sklopu ovog diplomskog rada nastojat će se na jednostavan način pristupiti rješavanju tih problema.

2. REGRESIJSKA ANALIZA

Događaju li se neke dvije pojave u isto vrijeme, nije nužno da su one međusobno povezane. Kako bismo utvrdili ovisnost jedne pojave o drugoj potrebno je odrediti varijable. Za vrijeme provođenja eksperimenta važno je obratiti pažnju na odabir zavisnih i nezavisnih varijabli. U velikoj većini eksperiment se postavlja tako da zavisna varijabla pokazuje određenu ovisnost o nezavisnoj varijabli, ovisno o tome koju hipotezu eksperimentom želimo potvrditi. Ovisnost zavisne varijable o nezavisnoj ispituje regresijska analiza.

Regresijska analiza na temelju utvrđene povezanosti i poznavanja vrijednosti nezavisne varijable (x) pokušava predvidjeti koju će vrijednost poprimi zavisna varijabla (y)[1]. Drugim riječima, ona pobliže daje objašnjenje kako se vrijednosti zavisne varijable mogu mijenjati u slučaju kada jedna od nezavisnih varijabli mijenja svoje vrijednosti, a ostale nezavisne varijable su stalne. Najčešće se koristi u slučaju predviđanja, odnosno prognoziranja određenih pojava, dok se u nekim slučajevima može koristiti za zaključivanje uzročnih odnosa između nezavisnih i zavisnih varijabli.

Regresijska analiza može se podijeliti s obzirom na broj varijabli (na jednostavnu i višestruku regresijsku analizu) te s obzirom na linearnost (na linearnu i nelinearnu regresijsku analizu). Najpoznatije su metode linearna regresija i metoda najmanjih kvadrata u kojima se regresijska funkcija definira preko konačnog broja nepoznatih parametara koji se procjenjuju na temelju podataka[2].

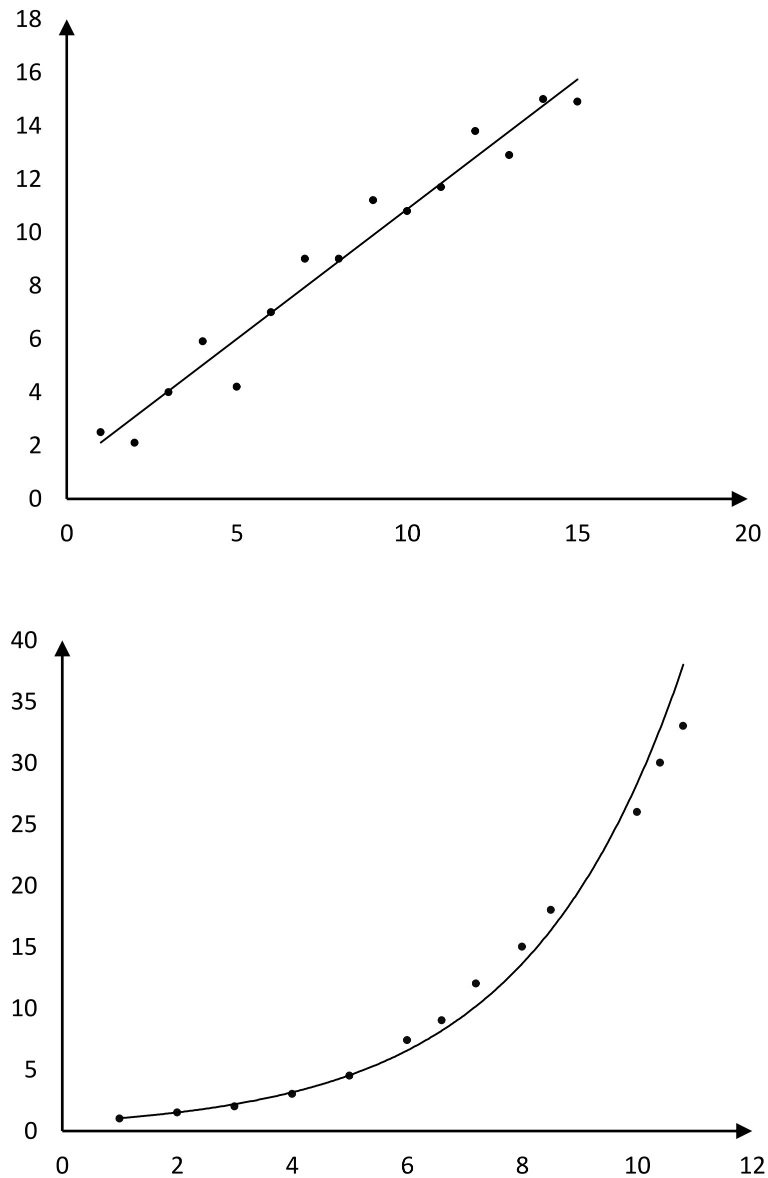
2.1 Jednostavna linearna regresija

Jedan od oblika regresijske analize jest jednostavna linearna regresija. Ona pokušava postaviti u odnos nezavisnu i zavisnu varijablu, točnije promatra se utjecaj jedne nezavisne varijable (x) na zavisnu varijablu (y)[3]. Prilikom takvog odabira ovisnosti varijabli, potrebno je odabrati najbolju

[1] Horvat J., Mijoč, J.: *Osnove statistike*, Ljevak, Zagreb, 2012., str. 494.
[2] Lulić, I.: *Uporaba metode regresijske analize u rješavanju problema vezanih za inženjersku praksu*, završni rad., str. 8
[3] Horvat, J., Mioč, J.: op. cit., str. 494.

moguću linearnu ovisnost. S obzirom na to da se tijekom eksperimentalnog mjerenja prikupi veliki broj podataka, takvu ovisnost ponekad je teško pronaći.

Postoje određeni grafički paketi koji omogućavaju izračun najbolje linearne ovisnosti te konstruiraju model prema kojemu su podatci prikupljeni eksperimentom najbolje prikazani. Takav model naziva se regresijski model. Prilikom izrade modela moramo uzeti u obzir da barem $2/3$ podataka dobivenih eksperimentalnim mjerenjem treba biti prikazano tim modelom. Na taj ćemo način znati da je odabrani model najbolji.



SLIKA 1: Primjer linearne i nelinearne povezanosti varijabli

Kako bismo postavili regresijski model, potrebno je odabrati nezavisnu varijablu, koja je najvažnija za eksperiment. Odnosno, potrebno je izabrati onu varijablu koja najčešće opisuje utjecaj na zavisnu varijablu. Ovisnost jedne varijable o drugoj (u našem slučaju zavisne varijable o nezavisnoj), može biti linearana i nelinearana[4].

Da bi grafički prikaz bio što jasniji, trebalo bi težiti tomu da se odnos između zavisnih i nezavisnih varijabli prikaže linearno. Na taj način jednostavnije će se uočiti odstupanja od ravne linije, a odnosi između podataka dobivenih eksperimentom i onih predviđenih teorijom bit će vidljiviji[5].

2.1.1 Regresijski model

Regresijski model s pomoću matematičkog zapisa daje opis odnosa dviju ili više varijabli. Razlikujemo deterministički i statistički model. Ako govorimo o determinističkom modelu, njegov zapis možemo dati izrazom[6]:

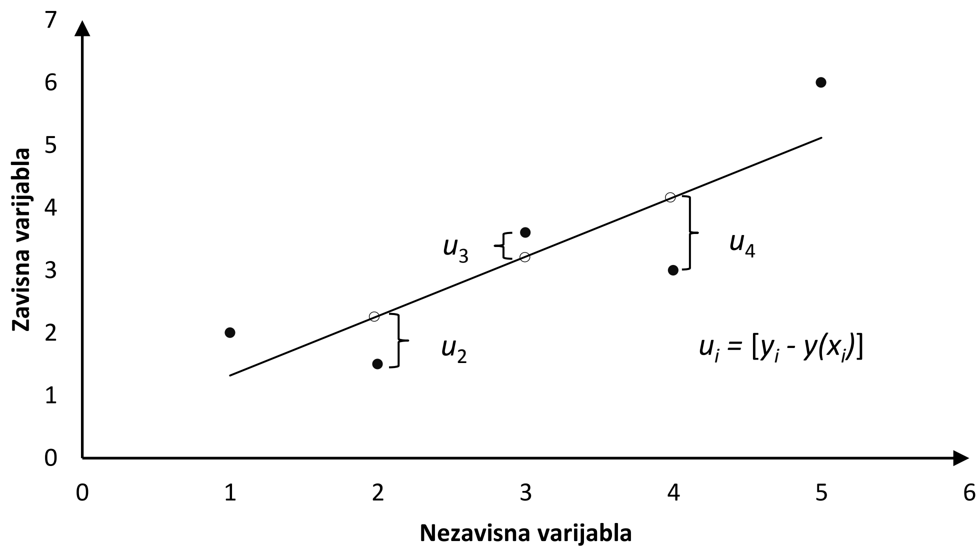
$$y = a_0 + a_1 x.$$

Ovaj model opisuje točnu povezanost varijable x i y, odnosno dokazuje kako je varijabla y određena točno jednom varijablom x. Drugi model je statistički model koji možemo dati izrazom[7]:

$$y = a_0 + a_1 x + u$$

u kojem je u slučajna pogreška. Varijabla u obuhvaća sve one varijable koje nisu sadržane u modelu, ali utječu na vrijednosti varijable y i njezine slučajne promjene.

[4] Ibid., str. 494.
[5] Hughes, I.G., Hase T.P.A.: *Measurements and their Uncertainties*, Oxford University Press, NY,2010., str. 54.
[6] Horvat, J., Mioč, J.: op. cit., str. 496.
[7] Ibid., str. 496.



SLIKA 2: Shematski prikaz reziduala

Drugim riječima, slučajna pogreška (*u*) prikazuje razliku između eksperimentalno izmjerenih vrijednosti varijabli *y* i teorijskog predviđanja.

3. POVIJEST METODE NAJMANJIH KVADRATA

Najraniji oblik regresije dao je Laplace[8] kada je 1799. godine koristio princip minimiziranja zbroja apsolutnih pogrešaka $\sum_{i=1}^{m}|r_i|$, s dodatnim uvjetom da će zbroj pogrešaka biti jednak nuli. Pokazao je da rješenje x tada mora zadovoljiti točno n od m jednadžbi. Međutim, Gauss[9] je tvrdio kako su, po načelima vjerojatnosti, veće ili manje pogreške jednako moguće u svim jednadžbama. Po njegovom mišljenju, bilo je evidentno da se rješenje koje zadovoljava točno n jednadžbi, treba smatrati manje u skladu sa zakonima vjerojatnosti.[10]

1795. godine Gauss je dao osnove metode najmanjih kvadrata, iako nije objavljena do 1809. godine. Metodu je objavio u jednom od svojih radova o nebeskoj mehanici, *Thoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.* Međutim, u vremenu između Gaussova otkrića metode i njezinog objavljivanja, do slične metode je došao i Legendre[11]. On je 1805. godine izdao knjigu *Nouvelles methods pour la determination des orbites des cometes*, s dodatkom *Sour la metode des moindres quarres*. Budući da su obje metode bile objavljene u približno jednakom vremenskom periodu, između Gaussa i Legendrea razvile su se žustre polemike oko prava na otkriće te metode.[12]

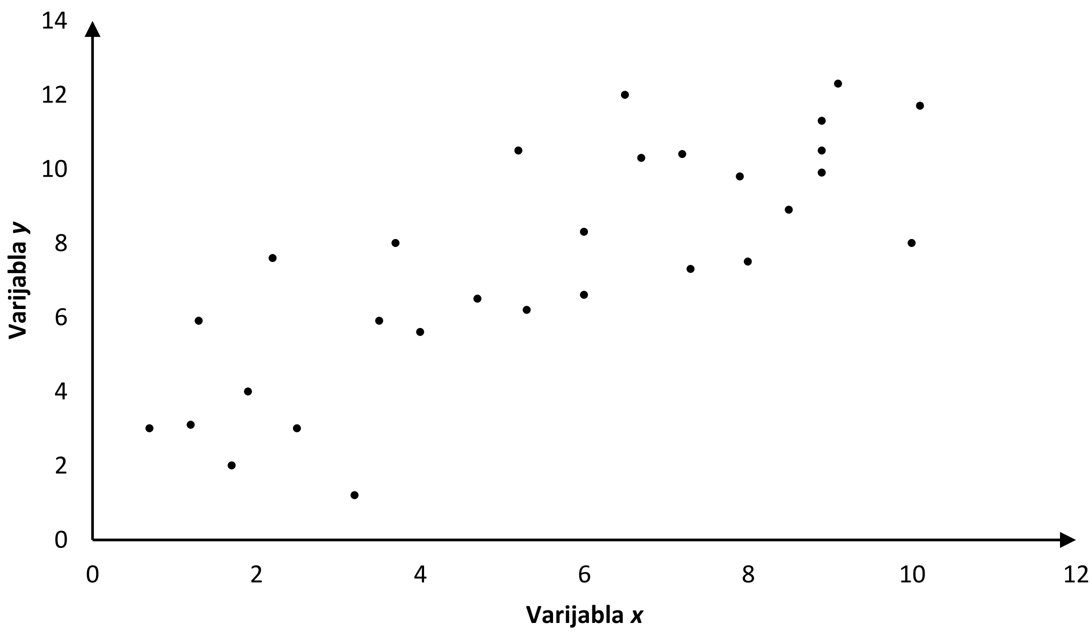
Velik broj povjesničara složio se da prvenstvo prava na metodu ima Gauss i to potkrepljuju poznatim primjerom njegova uspješnog predviđanja putanje asteroida Ceresa 1801. godine. Gauss je s pomoću podataka, koje je prikupio Piazzi[13] za vrijeme četrdesetodnevnog praćenja kretanja patuljastog planeta Ceresa, predvidio kada će on opet doći u vidno polje. S pomoću metode najmanjih kvadrata Gauss je izvršio proračune te je na osnovu tih proračuna Ceres ponovno uspješno lociran. Nakon toga metoda najmanjih kvadrata ubrzo je postala jedan od uobičajenih postupaka za analiziranje astronomskih i geodetskih podataka.[14]

---

[8] Pierre-Simon Laplace (1749-1827), francuski matematičar i astronom
[9] Carl Friedrich Gauss (1777-1855), njemački matematičar
[10] Björck, A.: *Numerical methods for least squares problems,* SIAM, Philadelphia, 1996., str. 2
[11] Adrien-Marie Legendre (1752-1833), francuski matematičar
[12] Bašić, B., Bojić B., Grubačić, J.: *Metod najmanjih kvadrata,* seminarski rad, 26.01.2016., str. 4
[13] Giuseppe Piazzi (1746-1826), talijanski astronom i matematičar
[14] Björck, A.: op. cit., str. 2

4. METODA NAJMANJIH KVADRATA

Metoda najmanjih kvadrata jedna je od najvažnijih metoda za obradu eksperimentalno dobivenih podataka. S pomoću regresijske jednadžbe, regresijskom analizom nastoji se u dijagram rasipanja ucrtati pravac regresije, koji će najbolje opisati odnos promatranih varijabli[15].



SLIKA 3: Dijagram rasipanja

Prikažemo li u dijagramu sve podatke dobivene eksperimentalnim mjerenjem, dobit ćemo oblak točaka kroz koji je moguće ucrtati beskonačno mnogo pravaca. Svaki od pravaca bio bi određen pripadajućom jednadžbom s različitim vrijednostima parametara a_0 i a_1.

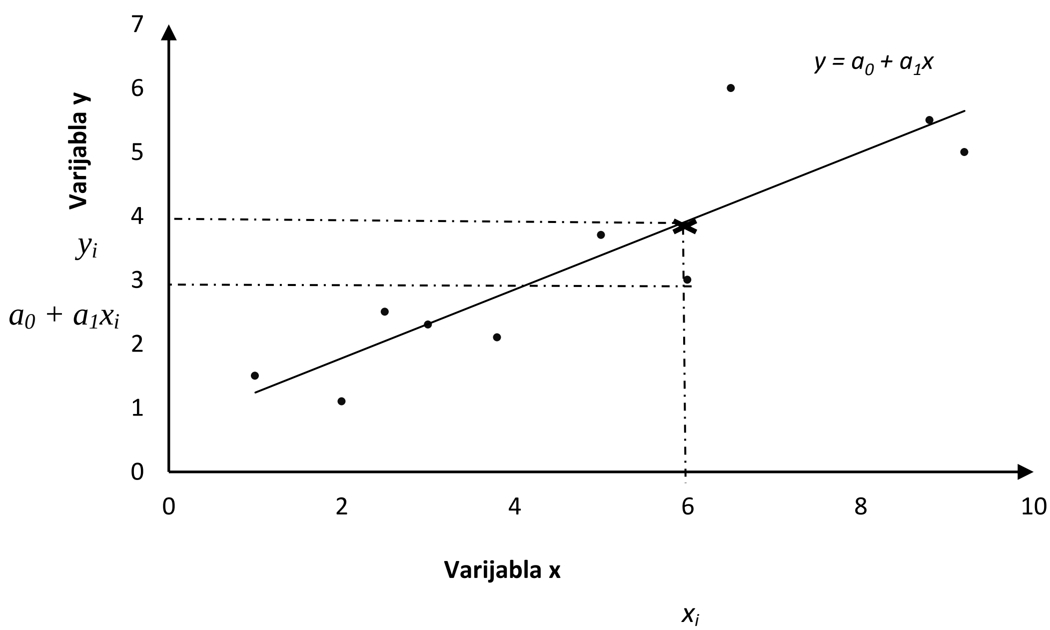
Međutim, želimo li prikazati najbolji odnos promatranih varijabli, u dijagram ćemo ucrtati samo jedan pravac. Takav pravac nazivamo aproksimacijskim pravcem, kojim su minimizirane udaljenosti svih koordinatnih točaka upisanih u dijagram rasipanja.

[15] Horvat, J., Mioč, J.: op. cit., str. 497.

Postoji više načina određivanja najboljih parametara aproksimacijskog pravca za skup podataka dobivenih eksperimentalnim mjerenjem. Prvi način jest s pomoću analitičkih funkcija jednadžbi, koje se mogu iskoristiti za određivanje vrijednosti i nepouzdanosti koeficijenta smjera i odsječka na osi y. Drugi način jest s pomoću računalnog softvera za crtanje koji ima mogućnost provođenja regresije najmanjih kvadrata. Zadnji način jest kreiranjem odgovarajućih uvjeta unutar proračunskih tablica te korištenjem ugrađene minimizacijske šablone.[16] Iako će metoda najmanjih kvadrata aproksimirati pravac za skup podataka ucrtanih u dijagram rasipanja, nećemo znati jesu li svi podatci uistinu dosljedni prikazanoj pravocrtnoj liniji.

4.1 Linija najmanjih kvadrata

Ako su koordinate i-te točke (x_i,y_i), a oblik aproksimacijskog pravca je $y = a_0 + a_1 x$, tada je y koordinata najboljeg aproksimacijskog pravca za x_i jednaka $y_i = a_0 + a_1 x_i$.



SLIKA 4: Dijagram rasipanja s regresijskim pravcem

[16] Hughes, I.G.,Hase, T.P.A., op.cit. str. 61.

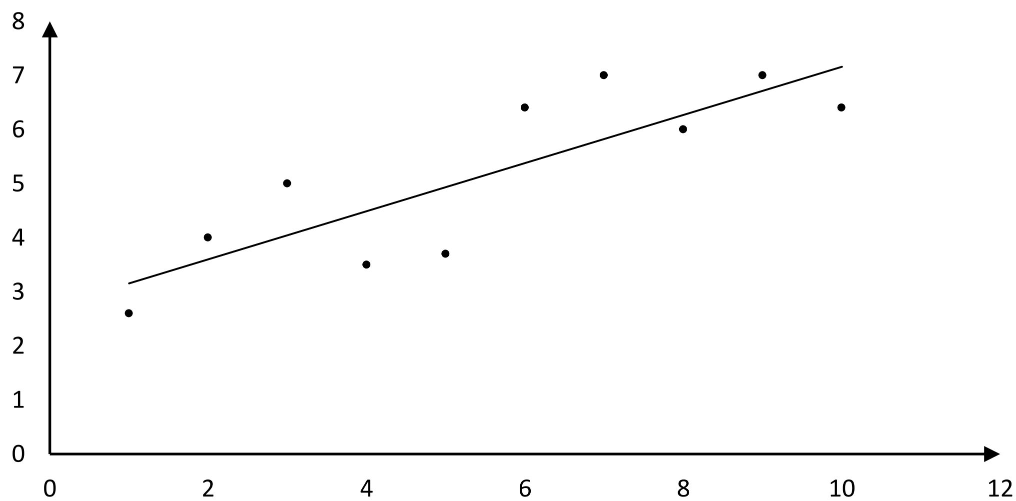
Iz slike je vidljivo kako za vrijednost x_i nezavisne varijable x, zavisna varijabla y_i poprima vrijednost $a_0 + a_1 x_i$. Ono što nas zanima, jest razlika između $y_i - (a_0 + a_1 x_i)$.[17] Ta razlika predstavlja rezidual. Postavlja se problem procjene nepoznatih parametara a_0 i a_1 kako bismo mogli odrediti najbolji aproksimacijski pravac.

Ako izaberemo odgovarajuće parametre, razlika $y_i - (a_0 + a_1 x_i)$ bit će mala. Međutim, ne možemo jednostavno odrediti aproksimacijski pravac minimizirajući tu razliku za sve točke jer će rezidual u nekom slučaju biti negativan, a u drugom pozitivan. Umjesto toga moramo promatrati vrijednost koja je uvijek pozitivna.[18]

Pretpostavimo da su podatci $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ zadani eksperimentalno. U tom slučaju parametre a_0 i a_1 procjenjivati ćemo *metodom najmanjih kvadrata*, odnosno minimizirat će se suma kvadrata reziduala, tj. odstupanje teorijskih od eksperimentalnih vrijednosti. Procjene a_0 i a_1 regresijskih parametara treba odrediti tako da vrijedi[19]:

$$f(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 = \min_{(a_0,a_1)\in R^2} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 = \min_{(a_0,a_1)\in R^2} f(a_0, a_1).$$

Najbolja procjena nepoznatog regresijskog pravca $y = a_0 + a_1 x_i$ prikazana je na slici 5.



SLIKA 5: Linija regresije s procijenjenim parametrima

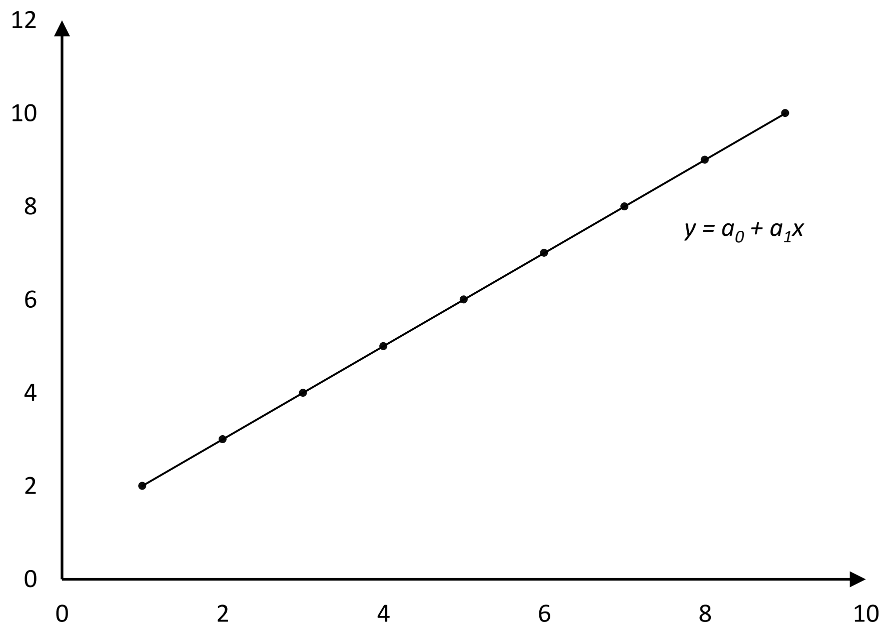
[17] Lulić, I.: op. cit., str. 16.
[18] Hughes, I.G.,Hase, T.P.A., op.cit. str. 59.
[19] Lulić I.: op. cit., str. 16.

4.2 Procjena parametara modela regresije

Pretpostavka je da smo pokusom izmjerili veličine x i y, odnosno njihove približne vrijednosti. Dobili smo niz parova vrijednosti (x_1,y_1), (x_2,y_2),…, (x_i,y_i). Kada ih ucrtamo u graf, dobijemo dijagram rasipanja te možemo promotriti kakva je ovisnost između njih. Ukoliko možemo pretpostaviti linearnu ovisnost, vrijednosti možemo povezati izrazom:

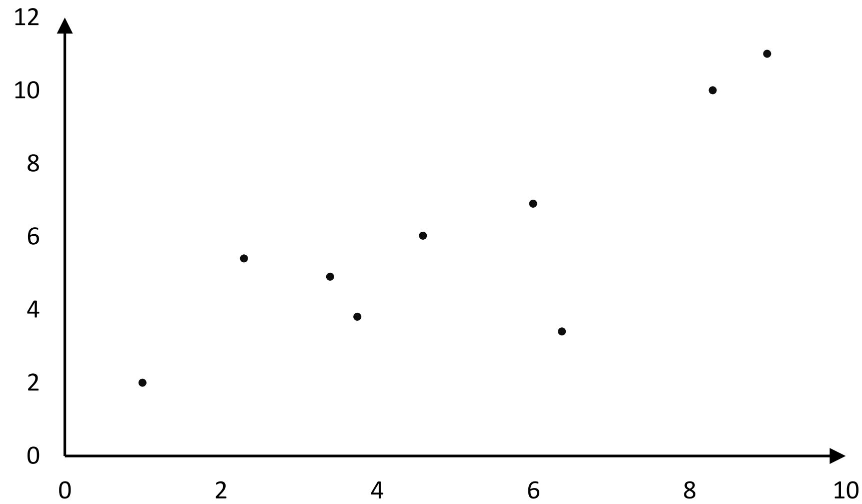
$$f(a_0, a_1) \equiv y = a_0 + a_1 x.$$

U idealnom slučaju, sve točke (parovi vrijednosti) dobivene mjerenjem, ležat će na istome pravcu.



SLIKA 6: Idealan slučaj – točke leže na pravcu

Međutim, ucrtavanjem podataka dobivenih mjerenjem u pokusu najčešće možemo primijetiti kako točke nisu ravnomjerno raspoređene po pravcu.



SLIKA 7: Neidealan slučaj – oblak točaka

Razlog je u tome što prilikom izvođenja pokusa dolazi do određenih pogrešaka. Kako bismo odredili najbolji mogući pravac, te pogreške moramo svesti na minimum. Zato će koeficijenti a_0 i a_1 koje ćemo pronaći, bit će oni najvjerojatniji.

Pravac $y = a_0 + a_1 x$ najvjerojatniji je pravac regresije ako vrijedi da je suma kvadratnog odstupanja dana izrazom:

$$f(a_0, a_1) \equiv \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = min \, .$$

Nužan uvjet ekstrema kod funkcije više varijabli je:

$$\frac{\partial f(a_0,a_1)}{\partial a_0} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(a_0,a_1)}{\partial a_1} = 0 \; .$$

Parcijalnom derivacijom po varijablama a_0 i a_1 dobijemo sljedeće jednadžbe:

$$\frac{\partial f(a_0, a_1)}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (a_1 x_i + a_0)] = 0$$

$$\frac{\partial f(a_0, a_1)}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (a_1 x_i + a_0)] \, x_i = 0 \; .$$

Kako bismo izrazili koeficijente a_0 i a_1, potrebno je riješiti sustav dviju jednadžbi:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_1 x_i + a_0)] \cdot 1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_1 x_i + a_0)] \cdot x_i = 0 \ .$$

Sređivanjem gornjih jednadžbi dobije se:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - n a_0 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad (2)\ .$$

Iz jednadžbe (1) izrazimo koeficijent a_0:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

i uvrstimo ga u jednadžbu (2):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\ .$$

Kada se cijela jednadžba pomnoži sa *n* dobije se izraz:

$$n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_1 n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i + a_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 0\ .$$

Daljnjim sređivanjem jednadžbe želimo izraziti koeficijent a_1:

$$a_1 n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_1\left[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]=n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i$$

pa je konačni izraz za koeficijent a_1:

$$a_1=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}\ .$$

Uvrštavanjem izraza za koeficijent a_1 u izraz za a_0 dobijemo:

$$a_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

$$a_0=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\ [n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2]-(n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i)\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}}{n}$$

$$a_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\ [n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2]-(n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i)\sum_{i=1}^{n}x_i}{n[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2]}$$

$$a_0=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\sum_{i=1}^{n}y_i-n\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\sum_{i=1}^{n}y_i}{n[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2]}$$

$$a_0=\frac{n(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)}{n[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2]}$$

pa je konačni izraz za koeficijent a_0:

$$a_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}.$$

S obzirom na to da smo iz uvjeta ekstrema dobili dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice (a_0, a_1), radi jednostavnosti ovaj problem možemo riješiti i matričnim zapisom:

$$H\vec{a}=\vec{b}\quad\Leftrightarrow\begin{bmatrix}H_{0,0} & H_{0,1}\\ H_{1,0} & H_{1,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\end{bmatrix}.$$

Uzimamo u obzir da je pritom

$$H_{i,j} = H_{j,i} = \sum_{n=1}^{N} x_n^{i+j} \qquad b_i = \sum_{n=1}^{N} x_n^i y_n \qquad i,j = 0,1 \qquad (3)\ .$$

Promotrimo li bolje matricu *H*, primjećujemo da je simetrična (Hesseove matrice), stoga je rješenje jednadžbe dano izrazom:

$$\vec{a} = H^{-1}\vec{b}$$

pri čemu je H^{-1} inverzna matrica, prikazana izrazom:

$$H^{-1} = \frac{1}{Det\ H} H^* \ .$$

H^* je adjungirana matrica koju dobijemo tako da na glavnoj dijagonali zamijenimo mjesta članovima, a po sporednoj dijagonali članovima zamijenimo mjesto i promijenimo predznak:

$$H^{-1} = \frac{1}{DetH} \begin{bmatrix} H_{1,1} & -H_{1,0} \\ -H_{0,1} & H_{0,0} \end{bmatrix}.$$

DetH je oznaka determinante matrice drugog reda, a dobije se razlikom umnoška dijagonala:

$$DetH = H_{0,0}H_{1,1} - H_{0,1}H_{1,0}\ .$$

Prema tome je:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{DetH} \begin{bmatrix} H_{1,1} & -H_{1,0} \\ -H_{0,1} & H_{0,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

a nepoznati parametri su u tom slučaju dani izrazima:

$$a_0 = \frac{H_{1,1}b_0 - H_{1,0}b_1}{H_{0,0}H_{1,1} - H_{0,1}H_{1,0}}$$

$$a_1 = \frac{H_{0,0}b_1 - H_{0,1}b_0}{H_{0,0}H_{1,1} - H_{0,1}H_{1,0}}\ .$$

Ako uvrstimo prave vrijednosti za $H_{i,j}$ i b_i dobit ćemo izraze za a_0 i a_1, kao što smo prethodno dobili s pomoću uvjeta ekstrema funkcije više varijabli i parcijalnih derivacija. Ovakav način je jednostavniji u slučaju *m* jednadžbi s *n* nepoznanica.

Postoje veze između zavisnih i nezavisnih varijabli koje su složenije od linearne veze, kao što je npr. kvadratna funkcija, koju možemo zapisati u obliku:

$$f(a_0, a_1, a_2) \equiv y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,.$$

Kako bismo izračunali nepoznate koeficijente a_0, a_1 i a_2, treba biti zadovoljen uvjet

$$f(a_0, a_1, a_2) = \sum_{n=1}^{N} [y_n - (a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2)]^2 = \min \;.$$

Nužan uvjet minimuma dan je izrazom:

$$\frac{\partial f(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_2} = 0$$

iz kojeg se dobije sustav od 3 jednadžbe s 3 nepoznanice a_0, a_1 i a_2:

$$\sum_{n=1}^{N} [y_n - (a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2)] = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{n=1}^{N} y_n - N a_0 - a_1 \sum_{n=1}^{N} x_n - a_2 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} [y_n - (a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2)] x_n = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{n=1}^{N} x_n y_n - a_0 \sum_{n=1}^{N} x_n - a_1 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - a_2 \sum_{n=1}^{N} x_n^3 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} [y_n - (a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2)] x_n^2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{n=1}^{N} x_n^2 y_n - a_0 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - a_1 \sum_{n=1}^{N} x_n^3 - a_2 \sum_{n=1}^{N} x_n^4 = 0 \,.$$

Radi jednostavnijeg računa, nepoznate parametre možemo izraziti pomoću matričnog zapisa:

$$H\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} H_{0,0} & H_{0,1} & H_{0,2} \\ H_{1,0} & H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,0} & H_{2,1} & H_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

pri čemu su H i b definirani izrazom (3).

Tada je rješenje dano izrazom:

$$\vec{a} = H^{-1}\vec{b}\,.$$

Inverznu matricu H^{-1} računamo prema pravilu

$$H^{-1} = \frac{1}{DetH} H^{*}\,.$$

Determinantu trećeg reda dobit ćemo s pomoću determinante matrice drugog reda[20]:

$$DetH = H_{0,0}\left(H_{1,1}H_{2,2} - H_{1,2}H_{2,1}\right) - H_{1,0}\left(H_{0,1}H_{2,2} - H_{0,2}H_{2,1}\right) + H_{2,0}(H_{0,1}H_{1,2} - H_{0,2}H_{1,1})$$

$$DetH = H_{0,0}H_{1,1}H_{2,2} - H_{0,0}H_{1,2}H_{2,1} - H_{1,0}H_{0,1}H_{2,2} + H_{1,0}H_{0,2}H_{2,1} + H_{2,0}H_{0,1}H_{1,2} - H_{2,0}H_{0,2}H_{1,1}$$

pa je konačni izraz za determinantu:

$$DetH = H_{0,0}H_{1,1}H_{2,2} + 2H_{2,0}H_{2,1}H_{1,0} - H_{0,0}H_{1,2}^{2} - H_{1,0}^{2}H_{2,2} - H_{2,0}^{3}\,.$$

Nakon što smo odredili determinantu trećeg reda, moramo odrediti adjungiranu matricu H^{*}. To ćemo učiniti tako da prvo odredimo transponiranu matricu H^{T}

$$H^{T} = \begin{bmatrix} H_{0,0} & H_{1,0} & H_{2,0} \\ H_{0,1} & H_{1,1} & H_{2,1} \\ H_{0,2} & H_{1,2} & H_{2,2} \end{bmatrix}$$

a zatim u njoj svaki pojedinačni element zamijenimo determinantom drugog reda

$$H^{*} = \begin{bmatrix} H_{1,1}H_{2,2} - H_{2,1}H_{1,2} & -\left(H_{0,1}H_{2,2} - H_{2,1}H_{0,2}\right) & H_{0,1}H_{1,2} - H_{1,1}H_{0,2} \\ -\left(H_{1,0}H_{2,2} - H_{2,0}H_{1,2}\right) & H_{0,0}H_{2,2} - H_{2,0}H_{0,2} & -\left(H_{0,0}H_{1,2} - H_{1,0}H_{0,2}\right) \\ H_{1,0}H_{2,1} - H_{2,0}H_{1,1} & -\left(H_{0,0}H_{2,1} - H_{2,0}H_{0,1}\right) & H_{0,0}H_{1,1} - H_{1,0}H_{0,1} \end{bmatrix}.$$

[20] Determinanta matrice trećeg reda – računa se pomoću determinante matrice drugog reda razvojem po nekom proizvoljno izabranom retku ili stupcu, iako postoji i drugačija metoda za matrice višeg reda. (Gusić, I.: *Lekcije iz matematike 1*, http://matematika.fkit.hr/novo/matematika%201/predavanja/Mat1_Lekcija4.pdf, 02.03.2016., str.4)

Prema tome je:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{DetH} \begin{bmatrix} H_{1,1}H_{2,2} - H_{2,1}H_{1,2} & -(H_{0,1}H_{2,2} - H_{2,1}H_{0,2}) & H_{0,1}H_{1,2} - H_{1,1}H_{0,2} \\ -(H_{1,0}H_{2,2} - H_{2,0}H_{1,2}) & H_{0,0}H_{2,2} - H_{2,0}H_{0,2} & -(H_{0,0}H_{1,2} - H_{1,0}H_{0,2}) \\ H_{1,0}H_{2,1} - H_{2,0}H_{1,1} & -(H_{0,0}H_{2,1} - H_{2,0}H_{0,1}) & H_{0,0}H_{1,1} - H_{1,0}H_{0,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

a nepoznate parametre a_0, a_1 i a_2 dobit ćemo prema izrazima:

$$a_0 = \frac{(H_{1,1}H_{2,2} - H_{2,1}^2)b_0 + (H_{2,1}H_{0,2} - H_{0,1}H_{2,2})b_1 + (H_{0,1}H_{1,2} - H_{1,1}H_{0,2})b_2}{H_{0,0}H_{1,1}H_{2,2} + 2H_{2,0}H_{2,1}H_{1,0} - H_{0,0}H_{1,2}^2 - H_{1,0}^2H_{2,2} - H_{2,0}^3}$$

$$a_1 = \frac{(H_{2,0}H_{1,2} - H_{1,0}H_{2,2})b_0 + (H_{0,0}H_{2,2} - H_{2,0}^2)b_1 + (H_{1,0}H_{0,2} - H_{0,0}H_{1,2})b_2}{H_{0,0}H_{1,1}H_{2,2} + 2H_{2,0}H_{2,1}H_{1,0} - H_{0,0}H_{1,2}^2 - H_{1,0}^2H_{2,2} - H_{2,0}^3} \qquad (4)$$

$$a_2 = \frac{(H_{1,0}H_{2,1} - H_{2,0}H_{1,1})b_0 + (H_{2,0}H_{0,1} - H_{0,0}H_{2,1})b_1 + (H_{0,0}H_{1,1} - H_{1,0}^2)b_2}{H_{0,0}H_{1,1}H_{2,2} + 2H_{2,0}H_{2,1}H_{1,0} - H_{0,0}H_{1,2}^2 - H_{1,0}^2H_{2,2} - H_{2,0}^3} \; .$$

U slučaju da imamo polinom višeg reda, sustav bismo sveli na matricu tog reda računajući njezinu inverznu matricu pomoću determinante[21] i adjungirane matrice.

4.3 Procjena pogreške parametara

Ranije smo pokazali da ucrtavanjem podataka dobivenih eksperimentom, dobijemo oblak točaka. Nakon što procijenimo parametre $a_0, a_1, \dots, a_n$ u dijagram se može ucrtati regresijski pravac, koji najbolje odgovara dobivenim podatcima. Međutim, s obzirom na to da smo parametre procjenjivali, moramo procijeniti i kolike su njihove pogreške.

Kako bismo izračunali procjenu pogreške parametra a_1, vratit ćemo se izrazu:

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \, .$$

[21] Determinanta matrice bilo kojeg reda – razvija se po nekom retku ili stupcu te se na taj način svodi na determinante nižeg reda. (ibid., str. 4)

Kako bismo ga kraće zapisali, potrebno je uvesti sljedeće izraze:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \cdots \text{ srednja vrijednost varijable } x$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \cdots \text{ srednja vrijednost varijable } y$$

$$\sigma_{x}^{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2 \quad \cdots \text{ varijanca varijable } x$$

$$\sigma_{y}^{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{Y}^2 \quad \cdots \text{ varijanca varijable } y$$

$$\sigma_{xy}^{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{XY} \quad \cdots \text{ mješovita varijanca}$$

pa stoga parametre a_0 i a_1 možemo kraće zapisati:

$$a_1 = \frac{\sigma_{xy}^{2}}{\sigma_{x}^{2}} = \frac{1}{n\sigma_{x}^{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right) y_i \qquad \text{i} \qquad a_0 = \overline{Y} - a_1\overline{X} \, .$$

U tom slučaju koeficijent a_1 promatramo kao funkciju *n* slučajnih varijabli Y_i:

$$a_1 \equiv f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \frac{x_1 - \overline{X}}{n\sigma_{x}^{2}} Y_1 + \frac{x_2 - \overline{X}}{n\sigma_{x}^{2}} Y_2 + \cdots + \frac{x_n - \overline{X}}{n\sigma_{x}^{2}} Y_n$$

pa prema izrazu za zakon rasprostiranja grešaka

$$M_Y = \sqrt{\left(m_1 \frac{\partial f}{\partial X_1}\bigg|_{X_1 = x_{1,n1}}\right)^2 + \left(m_2 \frac{\partial f}{\partial X_2}\bigg|_{X_2 = x_{2,n2}}\right)^2 + \cdots}$$

slijedi da je

$$M_{a_1}^2 = \left[\frac{x_1 - \overline{X}}{n\sigma_x^2}\right]^2 m_{Y_1}^2 + \left[\frac{x_2 - \overline{X}}{n\sigma_x^2}\right]^2 m_{Y_2}^2 + \cdots + \left[\frac{x_n - \overline{X}}{n\sigma_x^2}\right]^2 m_{Y_n}^2 .$$

Sve greške od Y_n međusobno su jednake pa vrijedi

$$m_{Y_1}^2 = m_{Y_2}^2 = \cdots = m_{Y_n}^2 = m^2$$

stoga možemo izraz za M_{a_1}raspisati na sljedeći način:

$$M_{a_1}^2 = \frac{m^2}{n^2\sigma_x^4}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 .$$

Pogledamo li bolje u gornji izraz, primijetit ćemo da $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$ možemo zamijeniti varijancom varijable x, pa slijedi

$$M_{a_1}^2 = \frac{m^2}{n^2\sigma_x^4} n\sigma_x^2 = \frac{m^2}{n\sigma_x^2} \qquad (5) .$$

Uvrstimo li u gornji izraz umjesto m^2 izraz

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i^2}{n-2} = \frac{n(\sigma_Y^2 - a_1^2\sigma_x^2)}{n-2} \quad \cdots \text{ srednja pogreška od } n-1 \text{ nezavisnih mjerenja}$$

dobit ćemo izraz

$$M_{a_1}^2 = \frac{\frac{n(\sigma_Y^2 - a_1^2\sigma_x^2)}{n-2}}{n\sigma_x^2}$$

kojeg daljnjim sređivanjem možemo svesti na konačni oblik

$$M_{a_1}^2 = \frac{n(\sigma_Y^2 - a_1^2\sigma_x^2)}{(n-2)n\sigma_x^2} = \frac{1}{n-2}\left(\frac{n\sigma_Y^2}{n\sigma_x^2} - \frac{na_1^2\sigma_x^2}{n\sigma_x^2}\right)$$

$$M_{a_1}^2 = \frac{1}{n-2}\left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_x^2} - a_1^2\right).$$

Na taj smo način dobili konačan izraz za procjenu pogreške parametra a_1.

Kako bismo procijenili pogrešku Ma_0, parametar a_0 promatrat ćemo kao funkciju *n+1* slučajne varijable Y_i i a_1, odnosno

$$a_0 = \overline{Y} - a_1\overline{X} \qquad a_0 \equiv \mathrm{f}(Y_1, Y_2, \dots, Y_i, a_1) = \frac{1}{n}\,(Y_1, Y_2, \dots, Y_i) - a_1\overline{X}\,.$$

Prema zakonu rasprostiranja grešaka, slijedi

$$M_{a_0}^2 = \frac{1}{n^2}\left(m_{Y_1}^2 + m_{Y_2}^2 + \cdots + m_{Y_i}^2\right) + M_{a_1}^2\overline{X}^2\,.$$

Svi $m_{Y_1}^2 = m_{Y_2}^2 = \cdots = m_{Y_i}^2 = m^2$ pa je zato

$$M_{a_0}^2 = \frac{1}{n^2}nm^2 + M_{a_1}^2\overline{X}^2\,.$$

Ukoliko m^2 izrazimo preko (5) dobijemo konačni izraz:

$$M_{a_0}^2 = \frac{1}{n^2}n^2\sigma_x^2 M_{a_1}^2 + M_{a_1}^2\overline{X}^2 \qquad \text{tj.} \qquad M_{a_0}^2 = M_{a_1}^2\left(\sigma_x^2 + \overline{X}^2\right) = M_{a_1}^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,.$$

Procjene pogrešaka parametara za polinome višeg stupnja rade se na sličan način kao i kod gore opisanog linearnog postupka primjenjujući izraz za zakon rasprostiranja pogrešaka.

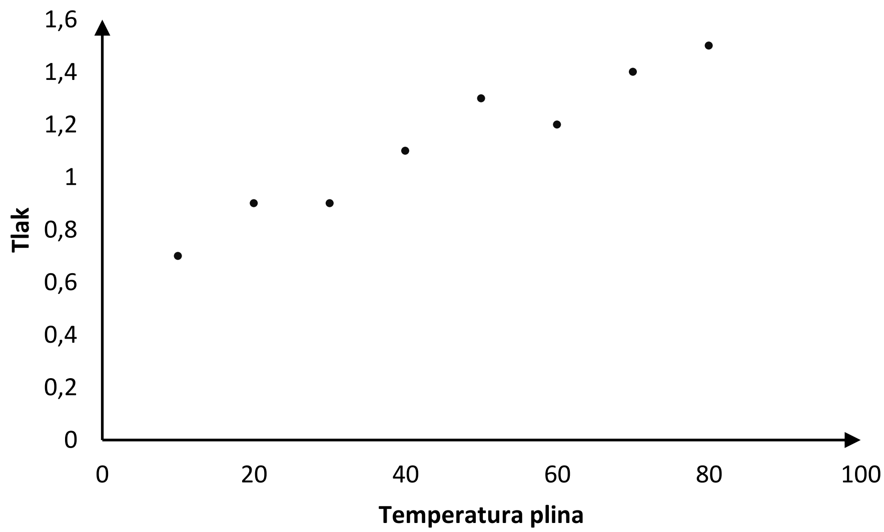
4.4 Primjer linearne regresije

Pokusom želimo prikazati odnos temperature i tlaka plina, a pritom smo odlučili temperaturu plina mijenjati, a vrijednosti tlaka očitavati. U tom slučaju varijabla *x* označavat će temperaturu, što znači da će to biti nezavisna varijabla, a tlak, kao zavisna varijabla, bit će označena varijablom *y*. Podatci mjerenja prikazani su u Tablici 1.

Tablica 1. Zavisnost tlaka o promjeni temperature plina

x (temperatura)	10	20	30	40	50	60	70	80
y (tlak)	0,7	0,9	0,9	1,1	1,3	1,2	1,4	1,5

Iz podataka dobivenih mjerenjem možemo uočiti da se konstantnim povećanjem temperature za jedan, povećava i vrijednost tlaka. Da bismo bolje uočili odnos ovih dviju veličina, podatke mjerenja ucrtat ćemo u dijagram rasipanja.



SLIKA 8: Grafički prikaz podataka iz Tablice 1.

Primjećujemo da povećanje veličine y nije konstantno, ali promjene su bile bliske. Stoga možemo zaključiti da je veza između varijabli linearna (s obzirom na to da su točke raspoređene blizu neke zamišljene linije), pa je procijenjeni model zapisan jednadžbom

$$y = a_0 + a_1 x\ .$$

Kako bi se odredio pretpostavljeni model, potrebno je odrediti parametre a_0 i a_1.

Tablica 2: Zavisnost tlaka o promjeni temperature plina 2

i	***x***	***y***	***xy***	***x²***	***y²***
1	10	0,7	7	100	0,49
2	20	0,9	18	400	0,81
3	30	0,9	27	900	0,81
4	40	1,1	44	1600	1,21
5	50	1,3	65	2500	1,69
6	60	1,2	72	3600	1,44
7	70	1,4	98	4900	1,96
8	80	1,5	120	6400	2,25
Suma	360	9	451	20400	10,66

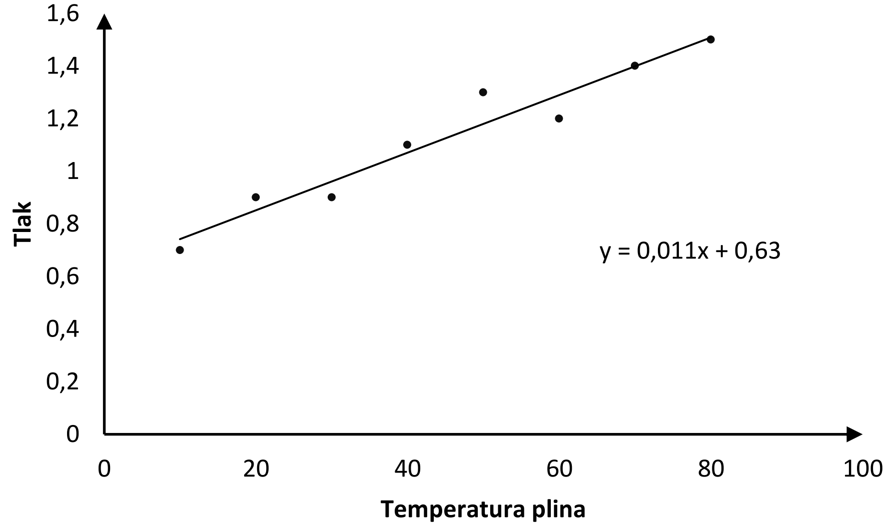
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 45 \quad , \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 1{,}125$$

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{XY} = 5{,}75 \quad , \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2 = 525 \ .$$

Koristeći izraze za računanje parametara a_0 i a_1 dobijemo njihove konačne vrijednosti

$$a_1 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = 0{,}011 \quad , \quad a_0 = \overline{Y} - a_1\overline{X} = 0{,}63 \ .$$

Nakon što smo odredili vrijednosti nepoznatih parametara, u dijagram možemo ucrtati pravac koji će najbolje prikazati odnos među varijablama.



SLIKA 9: Grafički prikaz mjerenih podataka i aproksimacijski pravac

Sada se mogu odrediti procjene pogrešaka parametara a_0 i a_1:

$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{Y}^2 = 0{,}067$ $\quad M_{a_1}^2 = \frac{1}{n-2}\left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_x^2} - a_1^2\right) = 0{,}000002$ $\quad M_{a_1} = 0{,}0013$

$M_{a_0}^2 = M_{a_1}^2\left(\sigma_x^2 + \overline{X}^2\right) = 0{,}0051$ $\quad M_{a_0} = 0{,}0714$.

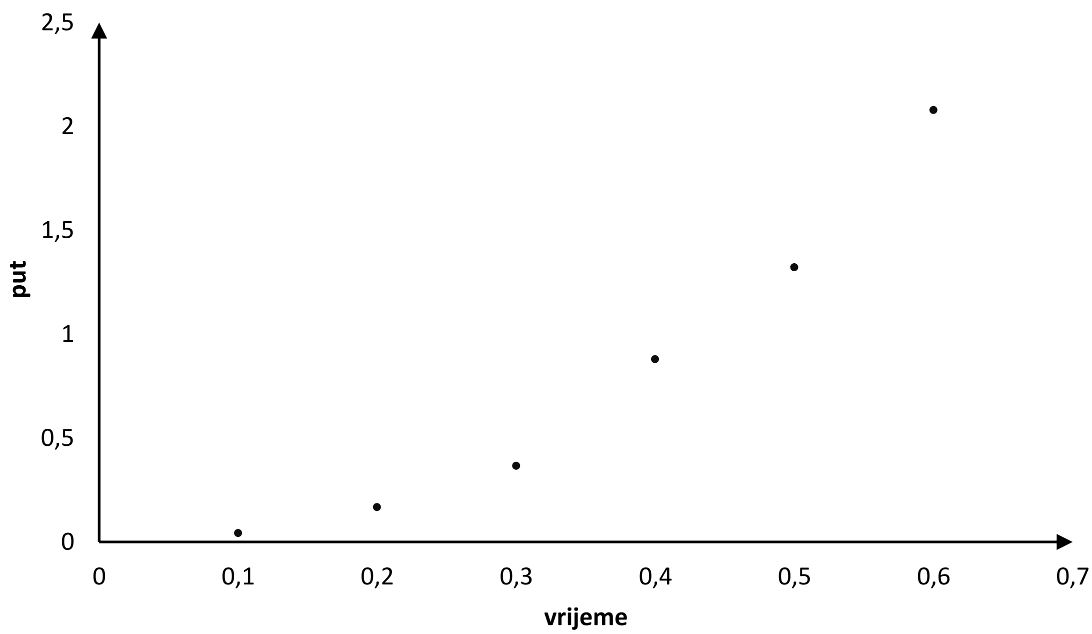
4.5 Primjer regresije kvadratne funkcije

Pokusom je mjereno ubrzanje objekta koje slobodno pada. S pomoću impulsnog pisača je zabilježen put na trakici koja prolazi vibratorom. Pretpostavka je da su vremena padanja objekta preciznije mjerena nego same visine s kojih je tijelo padalo. U tom slučaju varijabla *x* označavat će vrijeme, što znači da će to biti nezavisna varijabla, a put, kao zavisna varijabla, bit će označena varijablom *y*. Podatci mjerenja prikazani su u Tablici 3.

Tablica 3: Ovisnost puta (visine) pada objekta o proteklom vremenu

x (vrijeme)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y (put / visina)	0,041	0,166	0,365	0,879	1,321	2,078

Iz podataka dobivenih mjerenjem uočavamo da je povećanje y varijable značajnije u odnosu na konstantno povećanje x varijable. Da bismo bolje uočili ovisnost ovih dviju veličina, podatke mjerenja ucrtat ćemo u dijagram rasipanja.



SLIKA 10: Grafički prikaz podataka iz Tablice 3

Iz dijagrama možemo uočiti kvadratnu ovisnost puta o vremenu. Teorijski odnos između puta i vremena možemo dati izrazom:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

odnosno zaključujemo da je slobodni pad ubrzano gibanje s akceleracijom sile teže.

Procijenjeni model tada možemo zapisati u obliku:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \, .$$

Kako bi se odredio pretpostavljeni model, potrebno je odrediti nepoznate parametre.

Tablica 4: Ovisnost puta (visine) pada objekta o proteklom vremenu 2

i	***x***	***y***	***xy***	***x²***	***x²y***	***x³***	***x⁴***
1	0,1	0,041	0,0041	0,01	0,0004	0,001	0,0001
2	0,2	0,166	0,0332	0,04	0,0066	0,008	0,0016
3	0,3	0,365	0,1095	0,09	0,0329	0,027	0,0081
4	0,4	0,879	0,3516	0,16	0,1406	0,064	0,0256
5	0,5	1,321	0,6605	0,25	0,3303	0,125	0,0625
6	0,6	2,078	1,2468	0,36	0,7481	0,216	0,1296
Suma	2,1	4,85	2,4057	0,91	1,2589	0,441	0,2275

Sustav jednadžbi možemo napisati u matričnom obliku kao:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{bmatrix}.$$

S pomoću konačnog izraza (4) za nepoznate parametre dolazimo do rješenja:

$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = -1{,}2368 \quad , \quad a_2 = 7{,}6053$

5. ZAKLJUČAK

Od davnina je u čovjekovoj prirodi potreba da pokuša objasniti pojave koje ga okružuju. U početku je sva znanja čovjek stjecao putem vlastita iskustva, no teorije koje je postavljao bile su vrlo često protumačene na pogrešan način jer nisu bile podvrgnute eksperimentima. Provođenjem eksperimenta dolazi se do nekih znanstvenih spoznaja. No unatoč prednostima koje je eksperiment donio, čovjek se počeo susretati s problemom organiziranja i tumačenja podataka koje je njegovim provođenjem prikupljao.

U sklopu ovog diplomskog rada obrađena je jedna od metoda unutar prirodoznanstvenog područja koja daje rješenje tog problema. Svrha rada bila je dati uvid u metodu najmanjih kvadrata te njezinu primjenu unutar područja fizike. Kako bi se što jednostavnije objasnio princip na kojem se metoda zasniva, bilo je potrebno pojasniti osnovne pojmove regresijske analize te modele na kojima se ona zasniva, kao i samu povijest razvijanja metode.

U osnovi, prilikom provođenja eksperimenta pretpostavljamo da nećemo dobiti točne parove brojeva, već da će oni podleći eksperimentalnim pogreškama. Metoda najmanjih kvadrata rješava problem dobivanja određene funkcije koja će najbolje prikazati ovisnost prikupljenih podataka. Kako bi se našla takva ovisnost, potrebno je u funkciju uključiti pogreške za sve dobivene parove brojeva. S obzirom na to da pretpostavljamo da su pogreške prisutne samo u zavisnoj varijabli, promatraju se odstupanja od točaka samo u vertikalnom smjeru. Kako bi se zanemarili predznaci odstupanja, koristi se suma kvadrata pogrešaka s očekivanjem da odstupanja budu minimalna. Pretpostavljene funkcije koje su obrađene u ovom diplomskom radu su linearna i kvadratna funkcija. No da bi se s pomoću metode najmanjih kvadrata minimizirala odstupanja uz pretpostavljenu funkciju, bilo je potrebno odrediti nepoznate parametre funkcije te njihove procjene pogrešaka.

U završnom dijelu rada prikazan je postupak metode najmanjih kvadrata na konkretnim primjerima iz područja fizike.

Sumirajući, metoda najmanjih kvadrata korisna je metoda za interpretaciju dobivenih ovisnosti varijabli. Međutim, s obzirom na to da je riječ o procjeni modela, njezina pouzdanost nije stopostotna.

6. LITERATURA

- Bašić, B., Bojić, B., Grubačić, J., *Metod najmanjih kvadrata,* [Online], https://www.google.hr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=13&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjNjPOewNzLAhXIvRQKHRiSDT84ChAWCCYwAg&url=http%3A%2F%2Fstatic.elitesecurity.org%2Fuploads%2F1%2F9%2F1930686%2Fmetod%2520najmanjih%2520kvadrata.pdf&usg=AFQjCNEefXJtfQI57i-wIR2glFDqQaPrnQ&sig2=NLAhHi9s9J6QRnQ3KKHODQ&bvm=bv.117868183,d.d24 (Pristupljeno 26.01.2016.)
- Bevington, P. R., *Data reduction and uncertainty analysis for the physical sciences,* [Online], http://advancedlab.berkeley.edu/mediawiki/images/c/c3/Bevington.pdf (Pristupljeno 19.02.2016.)
- Bjőrck, A. (1996). *Numerical methods for least squares problems,* Philadelphia, SIAM
- Glumac, Z., *Vjerojatnost i statistika,kratak uvod*, [Online], http://gama.fizika.unios.hr/~zglumac/uvs.pdf (Pristupljeno 16.10.2015.)
- Gusić, I., *Lekcije iz matematike 1*, [Online], http://matematika.fkit.hr/novo/matematika%201/predavanja/Mat1_Lekcija4.pdf (Pristupljeno 02.03.2106.)
- Horvat, J., Mijoč, J. (2012). *Osnove statistike*, Zagreb, Naklada Ljevak
- Hughes, I.G., Hase, T.P.A. (2010). *Measurements and their uncertainties*, New York, Oxford University Press
- Jazbec, A. (2008). *Osnove statistike*, Zagreb, Šumarski fakultet
- Lulić, I., *Uporaba metode regresijske analize u rješavanju problema vezanih za inženjersku praksu*, [Online], http://repozitorij.fsb.hr/2940/1/18_09_2014_Ivan_Lulic_Zavrsni_Rad.pdf (Pristupljeno 01.02.2016.)
- Petz, B., (2007). *Osnovne statističke metode za nematematičare,*Zagreb, Naklada Slap
- Scitovski, R. (2004). *Numerička matematika,*2.izdanje, Osijek, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku
- Šošić, I., (2006). Primijenjena statistika, Zagreb, Školska knjiga

- Taylor, J.R., *An introduction to uncertainty analysis: the study of uncertainties in physical measurements*, [Online], http://people.westminstercollege.edu/faculty/kphilippi/An_Introduction_To_Error_Analysis_The_Study_Of_Uncertainties_In_Physical_Measurements_Taylor_John.pdf (Pristupljeno 20.02.2016.)
- Young, H. D., Statistical treatment of experimental data, [Online], http://www.nhn.ou.edu/~johnson/Education/Juniorlab/TEXT/StatisticalTeatmentofData-HughDYoung-All.pdf (Pristupljeno 18.03.2016.)
- Wolberg, J., *Data analysis using the method of least squares*, [Online], https://books.google.hr/books?id=BYYe-AYas9AC&pg=PA31&dq=least+square+method&hl=hr&sa=X&ved=0ahUKEwiR5cGz4NzLAhUBzxQKHRK5Bjw4ChDoAQg1MAM#v=onepage&q=least%20square%20method&f=false (Pristupljeno 22.02.2016.)

7. ŽIVOTOPIS

Zovem se Ivana Jerković. Rođena sam 08. svibnja 1989. godine u Vinkovcima. Svoje osnovnoškolsko obrazovanje stjecala sam u Vinkovcima od 1996. do 2004. godine, a zatim sam upisala prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Vinkovcima. Nakon završetka srednje škole, 2008. godine upisujem se na Odjel za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. U početnoj fazi pisanja diplomskog rada radila sam kao zamjena za profesora fizike u Gimnaziji Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima.