

# Numerička analiza gibanja 1D matematičkog njihala u granici malih amplituda

---

Ercegovac, Emanuela

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Physics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:160:190862>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Department of Physics in Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**

**ODJEL ZA FIZIKU**



**Emanuela Ercegovac**

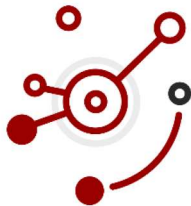
**Numerička analiza gibanja 1D matematičkog njihala u  
granici malih amplituda**

**Završni rad**

**Osijek, 2024.**

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**

**ODJEL ZA FIZIKU**



**Emanuela Ercegovac**

**Numerička analiza gibanja 1D matematičkog njihala u  
granici malih amplituda**

**Završni rad**

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
radi stjecanja zvanja prvostupnice fizike

**Osijek, 2024.**

Ovaj završni rad izrađen je u Osijeku pod vodstvom mentora doc. dr. sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

Osijek, 2024.

# Numerička analiza gibanja 1D matematičkog njihala u granici malih amplituda

Emanuela Ercegovac

## Sažetak

Matematičko (jednostavno) njihalo je titrajni sustav u kojemu je čestica mase  $m$  obješena na donjem kraju nerastezive niti zanemarive mase duljine  $l$ . U ovome radu napravljen je računalni program u Pythonu koji numerički računa rješenja diferencijalnih jednadžbi za jednostavno, prigušeno, prisilno i nelinearno matematičko njihalo u granici malih amplituda. Uz pomoć Eulerove metode i Euler-Cromerove metode dobivena su grafička i numerička rješenja u slučajevima kada osim gravitacijske sile djeluju sila prigušenja i vanjska periodična sila.

(19 stranica, 1 tablica, 6 slika)

**Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku.**

**Ključne riječi:** amplituda / diferencijalna jednadžba / Euler-Cromerova metoda / matematičko njihalo / periodična sila / sila prigušenja

**Mentor:** doc. dr. sc. Zvonko Glumac

**Ocjenjivači:**

**Rad prihvaćen:**

# Numerical analysis of the motion of a 1D mathematical pendulum in the limit of small amplitudes

Emanuela Ercegovic

## **Abstract**

A mathematical (simple) pendulum is a oscillating system in which a particle of mass  $m$  is suspended at the lower end of a thread of negligible mass length  $l$ . In this paper, a computer program in Python was created that numerically calculates the solutions of differential equations for a simple, damp, forced and nonlinear mathematical pendulum in the limit of small amplitudes. With the help of the Euler method and the Euler-Cromer method, graphical and numerical solutions were obtained in cases where, in addition to the gravitational force, the damping force and the external periodic force act.

(19 pages, 1 table, 6 figures)

**Thesis is deposited in Department of Physics' library.**

**Keywords:** amplitude / damping force / differential equation / Euler-Cromer method / mathematical pendulum / periodic force

**Supervisor:** doc. dr. sc. Zvonko Glumac

**Reviewers:**

**Thesis accepted:**

## SADRŽAJ

<b>1. UVOD</b> .....	1
<b>1.1. Kratak opis rada</b> .....	1
<b>2. JEDNOSTAVNI HARMONIJSKI OSCILATOR</b> .....	2
<b>2.1. Primjer jednostavnog njihala</b> .....	2
<b>3. PRIGUŠENO, PRISILNO I NELINEARNO NJIHALO</b> .....	7
<b>3.1. Prigušeno njihalo (Damped pendulum)</b> .....	7
<b>3.1.1. Podprigušenje (Underdamped)</b> .....	8
<b>3.1.2. Prekomjerno prigušenje (Overdamped)</b> .....	9
<b>3.1.3. Kritično prigušenje (Critically damped)</b> .....	10
<b>3.2. Prisilno njihalo (Driven pendulum)</b> .....	11
<b>3.3. Nelinearno njihalo (Nonlinear pendulum)</b> .....	17
<b>4. ZAKLJUČAK</b> .....	19
<b>DODATAK A</b> .....	20
<b>LITERATURA</b> .....	26

## **1. UVOD**

U mnogim područjima fizike, uključujući gibanje elektrona u atomima, ponašanje struja i napona u elektroničkim krugovima te planetarne orbite mogu se pronaći primjeri oscilatornih fenomena. Najjednostavniji mehanički sustav koji pokazuje takvo gibanje je njihalo, koje se sastoji od mase povezane konopcem s nekim osloncem, tako da se može slobodno njihati pod utjecajem sile gravitacije. Jednostavno harmonijsko gibanje je gibanje u kojemu je povratna sila izravno srazmjerna pomaku tijela iz njegovog ravnotežnog položaja. Jedno od najvažnijih primjera jednostavnog harmonijskog gibanja je matematičko njihalo.

U drugom poglavlju opisano je jednostavno harmonijsko gibanje s pomoću Eulerove metode i Euler-Cromer metode. Svaka metoda je opisana grafom i primjerom koda.

U trećem poglavlju opisano je prigušeno, prisilno i nelinearno matematičko njihalo s pomoću Euler-Cromer metode. Svaki slučaj prikazan je grafom i primjerom koda.

### **1.1. Kratak opis rada**

Cilj ovoga rada je napraviti računalni program koji numerički računa rješenja diferencijalne jednadžbe gibanja 1D matematičkog njihala u granici malih amplituda, kada na njihalo osim gravitacije djeluju još i sila trenja srazmjerna brzini i vanjska periodična sila.



## 2. JEDNOSTAVNI HARMONIJSKI OSCILATOR

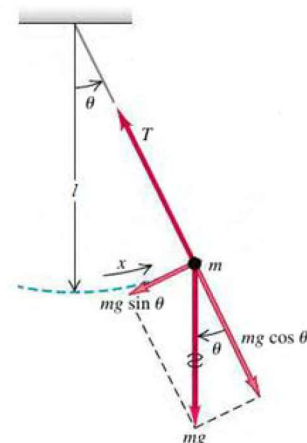
U ovom poglavlju opisano je gibanje jednostavnog njihala koje se sastoji od čestice mase  $m$  obješene na niti duljine  $l$ . Analizirat ćemo kako sile djeluju na njihalo i utječu na njegovo gibanje. Koristeći Newtonov zakon pokazat ćemo kako se jednadžba gibanja jednostavnog njihala pojednostavljuje za male kutove otklona. Nakon toga korištenjem Eulerove metode i Euler-Cromer metode u programskom jeziku Python numeričkim pristupom riješit ćemo diferencijalne jednadžbe gibanja. Na kraju ćemo grafički prikazati rezultate numeričkih rješenja.

### 2.1. Primjer jednostavnog njihala

Jedan primjer jednostavnog njihala je čestica mase  $m$  obješena na donjem kraju niti duljine  $l$ . Nit je učvršćena na gornjem kraju i zanemarive je mase. Ako se čestica otkloni od položaja ravnoteže i otpusti ona će se njihati lijevo i desno od položaja stabilne ravnoteže. Neka  $\theta$  bude kut koji nit tvori s vertikalom i pretpostavimo da je nit uvijek napeta, kao na slici 2.1. Također pretpostavljamo da na česticu djeluju samo dvije sile, gravitacija i napetost niti. Razmatrajući komponente tih sila koje su paralelne i okomite na nit, paralelne sile se poništavaju, budući da pretpostavljamo da se nit ne rasteže niti puca, dok je sila okomita na nit dana sa

$$F_{\theta} = -m g \sin\theta \quad (2.1)$$

gdje je  $g$  ubrzanje uzrokovano gravitacijom, negativan predznak u jednadžbi pokazuje da je smjer sile  $F_{\theta}$  uvijek suprotan smjeru povećanja kuta otklona, gdje je  $\theta = 0$ . Kada kut otklona raste udesno, sila djeluje ulijevo, i obrnuto. [1]



Slika 2.1. Jednostavno njihalo

Za brzinu i ubrzanje dobijemo:

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2.2)$$

Drugi Newtonov postulat kaže da je ukupna sila koja djeluje na materijalnu točku jednaka umnošku mase te točke i ubrzanja koje to tijelo dobiva pod utjecajem te sile (2.3). [6], [7] Jednadžba (2.4) predstavlja silu koja je jednaka masi pomnoženoj s ubrzanjem čestice duž kružnog luka koji predstavlja putanju čestice, tj. pomak duž tog luka je  $s = l \cdot \theta$  gdje je  $l$  duljina niti. [8]

$$F_\theta = m a \qquad (2.3)$$

$$F_\theta = m \frac{d^2s}{dt^2} \qquad (2.4)$$

Donju jednadžbu (2.5) dijelimo s  $m$  i uvodimo aproksimaciju za male kutove  $\sin \theta \approx \theta$ . Za male kutove otklona vrijedi Taylorov razvoj (2.6), jednadžba gibanja (2.7) postaje linearna diferencijalna jednadžba

$$-m g \sin\theta = m l \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2.5)$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \qquad (2.6)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \qquad (2.7)$$

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0 \qquad (2.8)$$

Jednadžba (2.8) predstavlja slobodni jednodimenzijski harmonijski oscilator. Opće rješenje (2.9) gornje jednadžbe je

$$\theta(t) = C \cos(\Omega t) + S \sin(\Omega t) \qquad (2.9)$$

konstante  $C$  i  $S$  određuju se iz početnih uvjeta na položaj i kružnu frekvenciju:

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \dot{\theta}(0) = \Omega_0 \qquad (2.10)$$

Nakon uvrštavanja početnih uvjeta dobivamo središnju jednadžbu harmonijskog titranja. Opće rješenje jednadžbe

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \Phi) \qquad (2.11)$$

gdje su  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  i  $\theta_0$  i  $\Phi$  konstante koje ovise o početnom pomaku i brzini njihala. Oscilacije su sinusne s vremenom i nastavljaju se bez prigušenja, jer nema trenja. Oscilacije imaju kružnu frekvenciju,  $\Omega$ , koja je neovisna o masi i amplitudi gibanja. Sada razmatramo numerički pristup ovom problemu. Naša osnovna jednadžba gibanja je diferencijalna jednadžba drugog reda (2.7), koju želimo riješiti za  $\theta$  kao funkciju od  $t$ . Zapisat ćemo jednadžbu (2.7) kao dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda. [1], [3]

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \theta \quad (2.12)$$

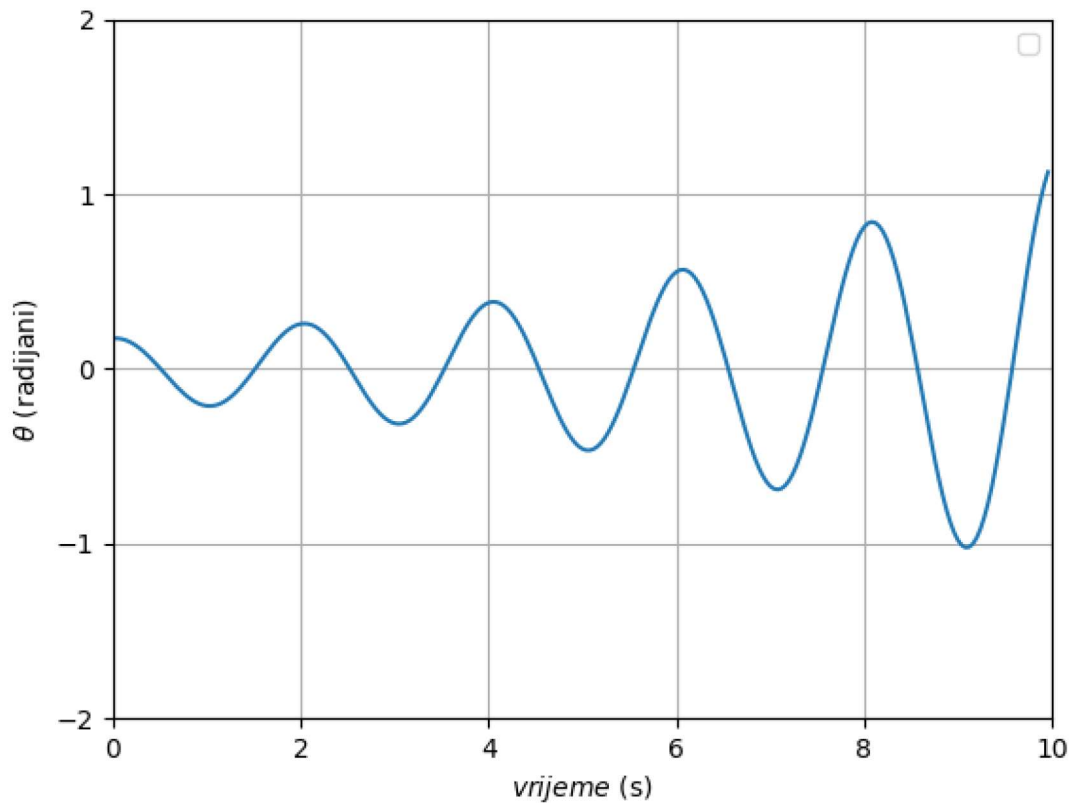
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

gdje je  $\omega$  kutna brzina njihala. Koristeći Eulerovu metodu pretvaramo (2.12) u razlike jednadžbi, koristeći vremenski korak  $\Delta t$  tako da je vrijeme diskretizirano s  $t = i \Delta t$ , gdje je  $i$  cijeli broj. Neka su  $\theta_i$  i  $\omega_i$  numerički aproksimirani kutni pomak i brzina njihala u vremenskom koraku  $i$ , jednadžbe u (2.12) postaju

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l} \theta_i \Delta t \quad (2.13)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t$$

Slika 2.2 prikazuje vremensku ovisnost kuta  $\theta$  (izraženog u radijanima) tijekom vremena u sekundama. Ovaj graf je rezultat numeričkog rješenja diferencijalnih jednadžbi s pomoću Eulerove metode (postupak numeričkog rješavanja koji se dobije uz pomoć Python koda 1 nalazi se u dodatku A). Prikazano je oscilatorno gibanje kuta  $\theta$ . Amplituda oscilacija mijenja se s vremenom, amplituda se povećava što nije u skladu s fizikalnim očekivanjem za idealan sustav bez vanjskih sila i trenja. Početne amplitude su male, ali se povećavaju kako vrijeme prolazi. Ovaj rast amplitude ukazuje na numeričku nestabilnost Eulerove metode. Graf pokazuje nelinearno ponašanje oscilacija. U idealnom sustavu bez vanjskih sila i trenja, ukupna energija sustava trebala bi ostati konstantna. Oscilacije je moguće ispraviti korištenjem manjih vrijednosti  $\Delta t$ . Korištenjem Eulerove metode energija sustava nije očuvana, što rezultira postupnim povećanjem energije njihala s vremenom za bilo koju nenultu vrijednost  $\Delta t$ .



Slika 2.2.  $\theta$  kao funkcija vremena za jednostavno njihalo izračunato s pomoću Eulerove metode

Za sve nenulte vrijednosti  $\Delta t$  energija raste s vremenom, pa je Eulerovo rješenje, u tom smislu, uvijek neispravno.

Da bismo vidjeli kako se ova nestabilnost javlja, razmatramo ukupnu energiju njihala. Energija,  $E$ , definirana je

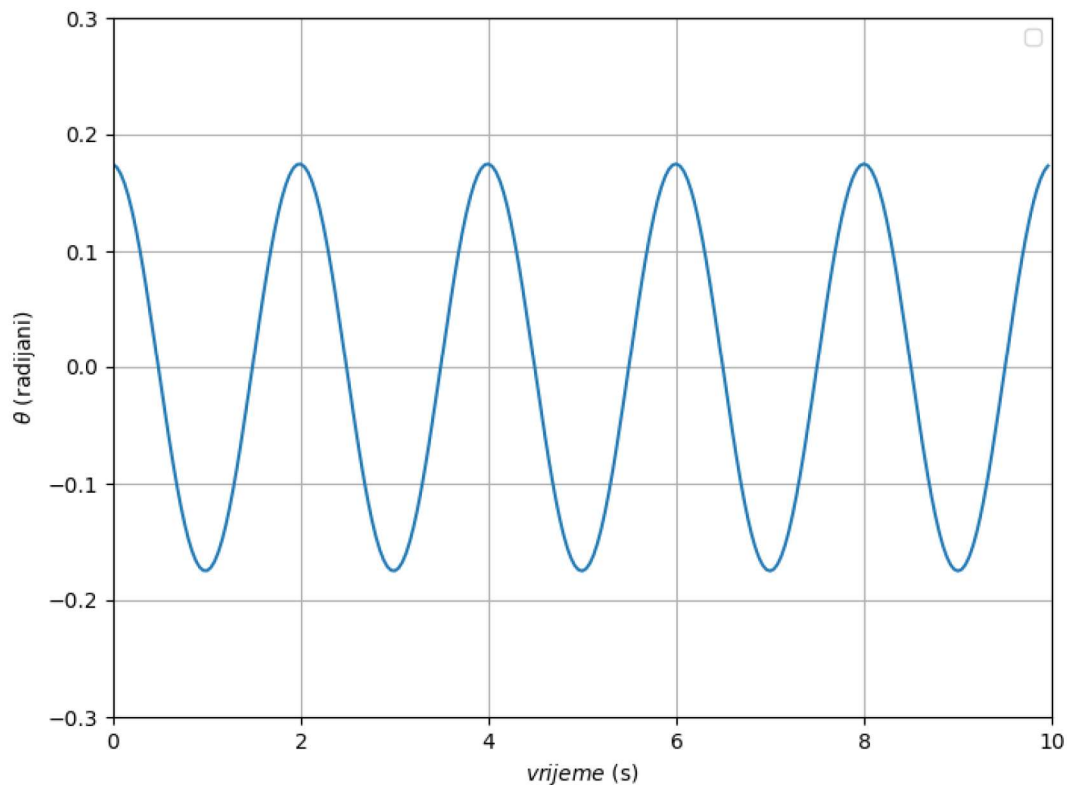
$$E = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 + m g l (1 - \cos\theta) \quad (2.14)$$

Prvi član je kinetička energija i jednaka je  $\frac{1}{2} m v^2$  gdje je  $v = \omega l$ . Drugi član u (2.14) je gravitacijska potencijalna energija i jednaka je  $mgh$  gdje je  $h$  visina mase iznad najniže točke na njezinoj putanji. U granici malog theta i energija je mala

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \left( \omega^2 + \frac{g}{l} \theta^2 \right) \quad (2.15)$$

Slika 2.3 prikazuje vremensku ovisnost kuta  $\theta$  (izraženog u radijanima) tijekom vremena u sekundama. Ovaj graf je rezultat numeričkog rješenja diferencijalnih jednadžbi s pomoću

Euler-Cromerove metode (postupak numeričkog rješavanja koji se dobije uz pomoć Python koda 2 nalazi se u dodatku A). Prikazuje stabilne oscilacije gibanja njihala tijekom vremena. Euler-Cromer metoda koristi novu vrijednost kutne brzine za izračun nove vrijednosti kuta, što rezultira boljom stabilnošću i očuvanjem energije. Eulerova metoda nije prikladna za dugotrajno rješavanje oscilatornih problema jer dovodi do rasta energije i nestabilnosti. Korištenjem Euler-Cromer metode graf prikazuje stabilnost i konzistentnost oscilacija, amplituda oscilacija ostaje konstanta, što potvrđuje očuvanje energije. [1]



Slika 2.3.  $\theta$  kao funkcija vremena za jednostavno njihalo izračunato s pomoću Euler-Cromerove metode

### 3. PRIGUŠENO, PRISILNO I NELINEARNO NJIHALO

U ovom poglavlju opisano je prigušeno njihalo za tri različita slučaja: podprigušenje, kritično prigušenje i prekomjerno prigušenje. Za svaki slučaj dana je jednačba i izvod formula te graf. Na kraju je opisano prisilno i nelinearno njihalo. Također prikazan je izvod za prisilno njihalo te primjeri grafova za oba slučajeva. Svaki graf je prikazan s pomoću Euler-Cromer metode u programskom jeziku Python.

#### 3.1. Prigušeno njihalo (Damped pendulum)

Kako bi jednostavno njihalo iz prethodnog poglavlja bolje objasnili, jednačbi gibanja (2.7) koja opisuje njihalo bez trenja dodat ćemo prigušenje. Mogući izvori trenja uključuju trenje na ležaju gdje se nit njihala povezuje s osloncem, otpor zraka, itd. Pod pretpostavkom da je sila prigušenje srazmjerna brzini, sila trenja koju ćemo upotrijebiti stoga ima oblik  $-q \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ , budući da je brzina njihala  $l \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ .  $q$  je parametar koji predstavlja koeficijent prigušenje, a znak minus da će se ta sila uvijek suprotstavljati gibanju njihala. Dakle, jednačba gibanja našeg prigušenog njihala ima oblik

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{d\theta}{dt} \quad (3.1)$$

Uvede li se konstanta  $\Omega^2$  relacijom

$$\Omega^2 = \frac{g}{l},$$

gornja jednačba (3.1) može se jednostavnije napisati

$$\ddot{\theta} + q\dot{\theta} + \Omega^2\theta = 0 \quad (3.2)$$

Jednačba (3.2) je homogena linearna diferencijalna jednačba drugog reda s konstantnim koeficijentima, čija ćemo rješenja dobiti iz eksponencijalne funkcije  $\theta(t) = e^{rt}$ . Uvrštavanjem u jednačbu (3.2) vodi do

$$(r^2 + qr + \Omega^2) e^{rt} = 0$$

$$r^2 + qr + \Omega^2 = 0$$

gdje dobivamo dva kvadratna rješenja za  $r$

$$r = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2} \quad (3.3)$$

Izraz pod korijenom (3.3) se naziva diskriminanta,  $D = q^2 - 4\Omega^2$ , a rješenja ovise o predznaku diskriminante. Stoga postoje tri slučaja rješenja prikazana u tablici 3.1. [4], [5]

Tablica 3.1. Tri slučaja rješenja

$D$	slučaj
$D > 0$	Prekomjerno prigušenje
$D = 0$	Kritično prigušenje
$D < 0$	Podprigušenje

### 3.1.1. Podprigušenje (Underdamped)

Za slučaj podprigušenja kada je diskriminanta negativna, rješenja  $r_1$  i  $r_2$  su kompleksna

$$D = q^2 - 4\Omega^2 < 0$$

$$r_1 = \frac{-q + i\sqrt{4\Omega^2 - q^2}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-q - i\sqrt{4\Omega^2 - q^2}}{2}$$

$$\theta(t) = c_1 e^{\left(-\frac{q}{2} + i\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{q}{2} - i\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}\right)t} \quad (3.4)$$

Koristeći Eulerovu formulu u jednadžbi (3.4) dobivamo:

$$e^{\left(-\frac{q}{2} + i\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}\right)t} = e^{-\frac{qt}{2}} e^{i\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t} = e^{-\frac{qt}{2}} \left( \cos\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t\right) + i \sin\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t\right) \right)$$

$$e^{\left(-\frac{q}{2} - i\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}\right)t} = e^{-\frac{qt}{2}} e^{-i\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t} = e^{-\frac{qt}{2}} \left( \cos\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t\right) - i \sin\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t\right) \right)$$

$$\theta(t) = e^{-\frac{qt}{2}} \left[ (c_1 + c_2) \cos\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t\right) + i(c_1 - c_2) \sin\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t\right) \right]$$

$$A = c_1 + c_2$$

$$B = i(c_1 - c_2)$$

$$\theta(t) = e^{-\frac{qt}{2}} \left[ A \cos \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}} t \right) \right] \quad (3.5)$$

Gornju jednadžbu (3.5) pomnožimo i podijelimo s  $\theta_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{qt}{2}} \left[ \left( \frac{A}{\theta_0} \right) \cos \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}} t \right) + \left( \frac{B}{\theta_0} \right) \sin \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}} t \right) \right]$$

Definiramo kut  $\phi$

$$\sin\phi = \frac{A}{\theta_0}, \quad \cos\phi = \frac{B}{\theta_0}, \quad \tan\phi = \frac{A}{B}$$

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{qt}{2}} \left[ \sin\phi \cos \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}} t \right) + \cos\phi \sin \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}} t \right) \right]$$

Sređivanjem gornje jednadžbe dobivamo konačno rješenje (3.6) za podprigušeno gibanje koje se javlja za dovoljno malo trenje, gdje rješenje pokazuje oscilatorno ponašanje s frekvencijom

$\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}$ , gdje  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , i amplituda koja eksponencijalno opada s vremenom. [1], [2]

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{qt}{2}} \sin \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}} t + \phi \right) \quad (3.6)$$

### 3.1.2. Prekomjerno prigušenje (Overdamped)

Za slučaj prekomjernog prigušenja kada je diskriminanta pozitivna, rješenja  $r_1$  i  $r_2$  su realna

$$D = q^2 - 4\Omega^2 > 0$$

$$r_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}$$

$$\theta(t) = c_1 e^{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2}\right)t}$$

$$e^{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2}\right)t} = e^{-\frac{qt}{2}} e^{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t}$$



$$e^{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2}\right)t} = e^{-\frac{qt}{2}} e^{-\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t}$$

$$\theta(t) = e^{-\frac{qt}{2}} \left[ c_1 e^{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t} \right]$$

$$A = c_1$$

$$B = c_2$$

$$\theta(t) = e^{-\frac{qt}{2}} \left[ A e^{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t} + B e^{-\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t} \right]$$

U slučaju kada je prigušenje izrazito veliko, sustav se ponaša kao preprigušeni oscilator. [1], [2] U tom slučaju, rješenje (3.7) prikazuje monotono, eksponencijalno opadanje prema ravnoteži i može se izraziti kao:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2}\right)t} \quad (3.7)$$

### 3.1.3. Kritično prigušenje (Critically damped)

Za slučaj kritičnog prigušenja kada je diskriminanta nula, rješenja  $r_1$  i  $r_2$  su realna

$$D = q^2 - 4\Omega^2 = 0$$

$$r_1 = \frac{-q}{2}$$

$$r_2 = \frac{-q}{2}$$

$$\theta(t) = c_1 e^{-\frac{q}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{q}{2}t}$$

$$\theta(t) = c_1 e^{-\frac{q}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{q}{2}t}$$

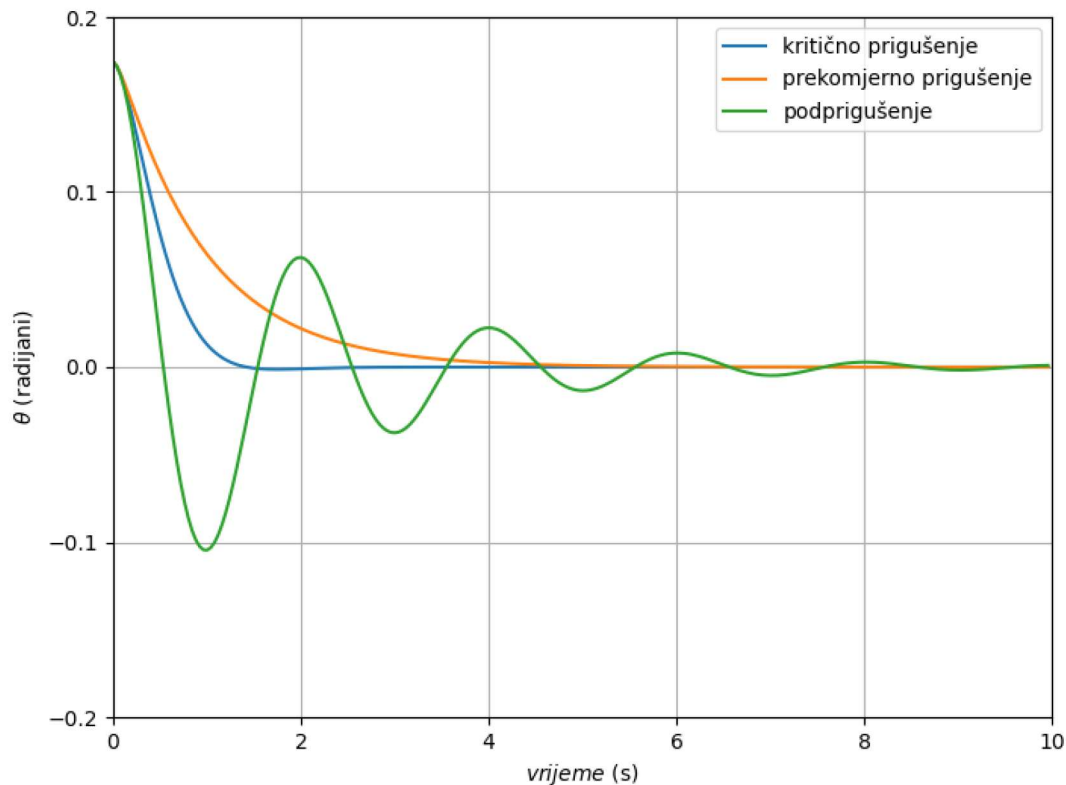
$$\theta_0 = c_1$$

$$C = c_2$$

$$\theta(t) = (\theta_0 + Ct) e^{-\frac{q}{2}t} \quad (3.8)$$

Jednadžba (3.8) je konačno rješenje za kritično prigušenje.

Numerički rezultati za  $\theta(t)$  u sva tri slučaja prikazani su na slici 3.1.



Slika 3.1.  $\theta$  kao funkcija vremena za prigušeno njihalo za tri slučaja

Graf koji opisuje prigušeno njihalo za tri slučaja prigušenja prikazan je na slici 3.1. Na x-osi prikazano je vrijeme u sekundama, a na y-osi kut odklona njihala  $\theta$  u radijanima. Uz pomoć Euler-Cromerove metode prikazan je graf koji je rezultat numeričkog rješenja diferencijalnih jednadžbi (postupak numeričkog rješavanja koji se dobije uz pomoć Python koda 3 nalazi se u dodatku A). Za podprigušeno njihalo rješenje pokazuje oscilatorno ponašanje s frekvencijom i amplitudom koja eksponencijalno opada s vremenom uz dovoljno malo trenje. Prekomjerno prigušeno njihalo prikazuje bez oscilacija monotono, eksponencijalno opadanje prema ravnoteži, dok kritično prigušeno njihalo prikazuje rezultat koji eksponencijalno brzo opada prema ravnotežnom položaju bez oscilacija. [1], [2]

### 3.2. Prisilno njihalo (Driven pendulum)

Prisilno njihalo je sustav u kojem se na njihalo, osim gravitacijske sile i sile prigušenja, djeluje još i vanjska periodična sila (3.9). Pretpostavit ćemo da je periodična sila sinusoidalna s vremenom, s amplitudom  $F_D$  i kutnom frekvencijom  $\Omega_D$  (nije isto što i prirodna frekvencija jednostavnog njihala  $\Omega$ ). To dovodi do jednadžbe gibanja

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F_D \sin(\Omega_D t) \quad (3.9)$$

gdje posljednji izraz predstavlja vanjsku periodičnu silu. Ova periodična sila će pumpati energiju u (ili iz) sustava. Gdje je

$$\Omega^2 = \frac{g}{l}$$

gornja jednačba postaje linearna nehomogena diferencijalna jednačba drugog reda s konstantnim koeficijentima

$$\ddot{\theta} + q\dot{\theta} + \Omega^2\theta = F_D \sin(\Omega_D t)$$

1. Homogena jednačba

$$\ddot{\theta} + q\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Pretpostavljamo rješenje u obliku  $\theta(t) = e^{rt}$

$$(r^2 + qr + \Omega^2) e^{rt} = 0$$

$$r^2 + qr + \Omega^2 = 0$$

$$r = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}$$

$D = q^2 - 4\Omega^2 > 0$ , diskriminanta je pozitivna i rješenja  $r_1$  i  $r_2$  su realna

$$r_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}$$

$$\theta_H(t) = c_1 e^{\left(\frac{-q + \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-q - \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}\right)t}$$

$$e^{\left(\frac{-q + \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}\right)t} = e^{-\frac{qt}{2}} e^{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t}$$

$$e^{\left(\frac{-q - \sqrt{q^2 - 4\Omega^2}}{2}\right)t} = e^{-\frac{qt}{2}} e^{-\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t}$$

$$\theta_H(t) = e^{-\frac{qt}{2}} \left[ c_1 e^{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{q^2}{4} - \Omega^2} t} \right]$$

## 2. Partikularno rješenje

Pretpostavimo partikularno rješenje u obliku

$$\theta_P(t) = c_3 \sin(\Omega_D t) + c_4 \cos(\Omega_D t)$$

$$\dot{\theta}_P(t) = \Omega_D c_3 \cos(\Omega_D t) - \Omega_D c_4 \sin(\Omega_D t)$$

$$\ddot{\theta}_P(t) = -\Omega_D^2 c_3 \sin(\Omega_D t) - \Omega_D^2 c_4 \cos(\Omega_D t)$$

$$\begin{aligned} & -\Omega_D^2 c_3 \sin(\Omega_D t) - \Omega_D^2 c_4 \cos(\Omega_D t) \\ & = -\Omega^2 c_3 \sin(\Omega_D t) - \Omega^2 c_4 \cos(\Omega_D t) - q\Omega_D c_3 \cos(\Omega_D t) \\ & \quad + q\Omega_D c_4 \sin(\Omega_D t) + F_D \sin(\Omega_D t) \end{aligned}$$

$$\sin(\Omega_D t) [-\Omega_D^2 c_3 + \Omega^2 c_3 - q\Omega_D c_4] + \cos(\Omega_D t) [-\Omega_D^2 c_4 + \Omega^2 c_4 + q\Omega_D c_3] = F_D \sin(\Omega_D t)$$

$$-\Omega_D^2 c_3 + \Omega^2 c_3 - q\Omega_D c_4 = F_D$$

$$-\Omega_D^2 c_4 + \Omega^2 c_4 + q\Omega_D c_3 = 0$$

$$c_3(-\Omega_D^2 + \Omega^2) = F_D + q\Omega_D c_4$$

$$c_3 = \frac{F_D + q\Omega_D c_4}{\Omega^2 - \Omega_D^2}$$

$$c_3 = \frac{F_D}{\Omega^2 - \Omega_D^2} + \frac{q\Omega_D c_4}{\Omega^2 - \Omega_D^2}$$

$$c_4(-\Omega_D^2 + \Omega^2) = -q\Omega_D c_3$$

$$c_4 = \frac{-q\Omega_D \left( \frac{F_D}{\Omega^2 - \Omega_D^2} + \frac{q\Omega_D c_4}{\Omega^2 - \Omega_D^2} \right)}{\Omega^2 - \Omega_D^2}$$

$$c_4 = \frac{-q\Omega_D F_D}{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2} + \frac{-q\Omega_D (q\Omega_D c_4)}{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2}$$

$$c_4 + \frac{q^2 \Omega_D^2}{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2} c_4 = \frac{-q\Omega_D F_D}{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2}$$

$$c_4 \left( 1 + \frac{q^2 \Omega_D^2}{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2} \right) = \frac{-q\Omega_D F_D}{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2}$$

$$c_4 = \frac{\frac{-q\Omega_D F_D}{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2}}{\frac{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2}{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2}}$$

$$c_4 = \frac{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 (-q\Omega_D F_D)}{\left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right] (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2}$$

$$c_4 = \frac{-q\Omega_D F_D}{\left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right]}$$

$$c_3 = \frac{F_D}{\Omega^2 - \Omega_D^2} + \frac{q\Omega_D \frac{-q\Omega_D F_D}{\left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right]}}{\Omega^2 - \Omega_D^2}$$

$$c_3 = \frac{F_D}{\Omega^2 - \Omega_D^2} + \frac{q\Omega_D \left[ \frac{-q\Omega_D F_D}{\left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right]} \right]}{\Omega^2 - \Omega_D^2}$$

$$c_3 = \frac{F_D - \frac{q^2\Omega_D^2 F_D}{\left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right]}}{\Omega^2 - \Omega_D^2}$$

$$c_3 = \frac{F_D \left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right] - q^2\Omega_D^2 F_D}{\left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right] \frac{\Omega^2 - \Omega_D^2}{\Omega^2 - \Omega_D^2}}$$

$$c_3 = \frac{F_D \left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right] - q^2\Omega_D^2 F_D}{\Omega^2 - \Omega_D^2 \left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right]}$$

$$c_3 = \frac{F_D (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 F_D - q^2\Omega_D^2 F_D}{\Omega^2 - \Omega_D^2 \left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right]}$$

$$c_3 = \frac{F_D (\Omega^2 - \Omega_D^2)}{\left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right]}$$

$$\theta_P(t) = \frac{F_D (\Omega^2 - \Omega_D^2)}{\left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right]} \sin(\Omega_D t) - \frac{q\Omega_D F_D}{\left[ (\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 \right]} \cos(\Omega_D t)$$

Rješavanjem diferencijalna jednačbe, opće rješenje nehomogene jednačbe,  $\theta(t)$ , je zbroj rješenja homogene jednačbe  $\theta_H(t)$  i partikularnog rješenja,  $\theta_P(t)$  (3.10), nehomogene jednačbe, koje računamo:

$$\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_P(t) \quad (3.10)$$

$t \rightarrow \infty$  homogeno rješenje eksponencijalno opada, partikularno rješenje ostaje nepromijenjeno

$$\theta(t) \approx \theta_P(t)$$

$$\theta(t) = c_3 \sin(\Omega_D t) + c_4 \cos(\Omega_D t) \quad (3.11)$$

Pomnožimo i podijelimo jednačbu (3.11) s  $\theta_0 = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}$

$$\theta(t) = \theta_0 \left[ \left( \frac{c_3}{\theta_0} \right) \sin(\Omega_D t) + \left( \frac{c_4}{\theta_0} \right) \cos(\Omega_D t) \right]$$

Definiramo kut  $\phi$

$$\sin\phi = \frac{c_3}{\theta_0}, \quad \cos\phi = \frac{c_4}{\theta_0}, \quad \tan\phi = \frac{c_3}{c_4}$$

$$\theta(t) = \theta_0 [\sin\phi \sin(\Omega_D t) + \cos\phi \cos(\Omega_D t)]$$

Stacionarno rješenje je

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega_D t + \phi)$$

$$\theta_0 = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}$$

$$\theta_0 = \sqrt{\left\{ \frac{F_D(\Omega^2 - \Omega_D^2)}{[(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2]} \right\}^2 + \left\{ -\frac{q\Omega_D F_D}{[(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2]} \right\}^2}$$

$$\theta_0 = \sqrt{\left\{ \frac{F_D(\Omega^2 - \Omega_D^2)}{[(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2]} \right\}^2 + \left\{ -\frac{q\Omega_D F_D}{[(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2]} \right\}^2}$$

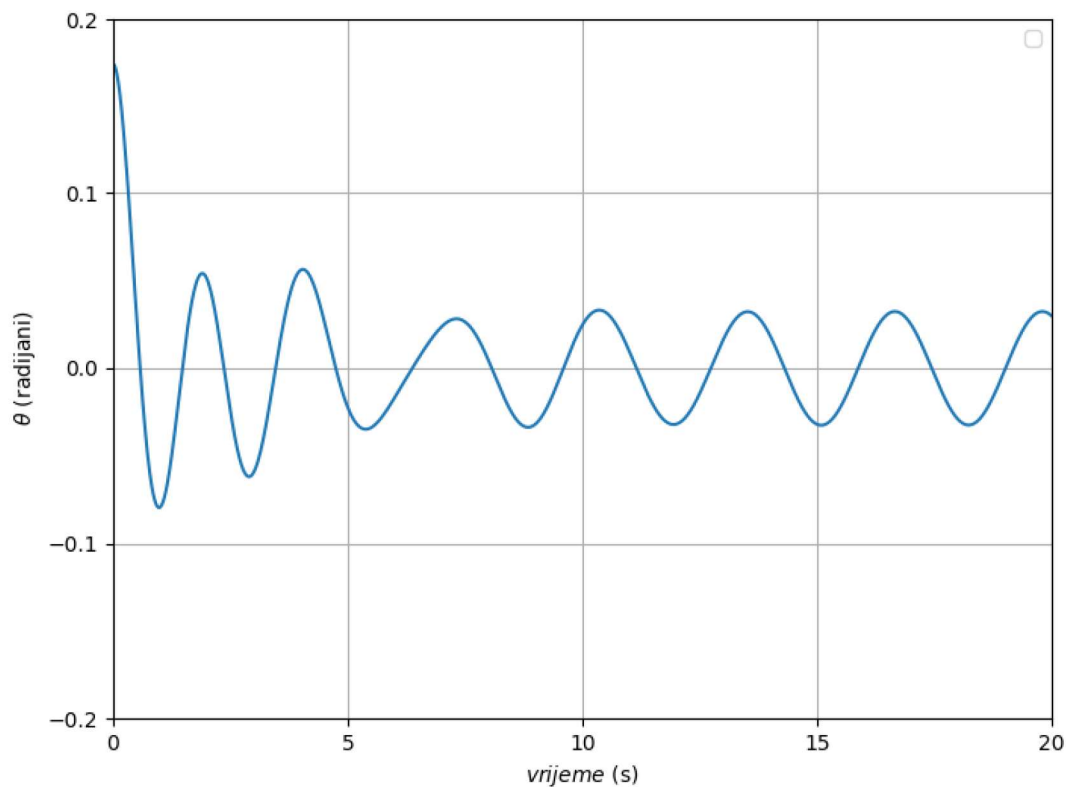
$$\theta_0 = \sqrt{\frac{F_D^2(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2 F_D^2}{[(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2\Omega_D^2]^2}}$$

$$\theta_0 = \frac{F_D^2 [(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2 \Omega_D^2]}{\sqrt{[(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + q^2 \Omega_D^2]^2}}$$

$$\theta_0 = \frac{F_D^2}{\sqrt{[(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + (q\Omega_D)^2]}}$$

gdje je amplituda  $\theta_0$  dana s

$$\theta_0 = \frac{F_D}{\sqrt{[(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + (q\Omega_D)^2]}}$$

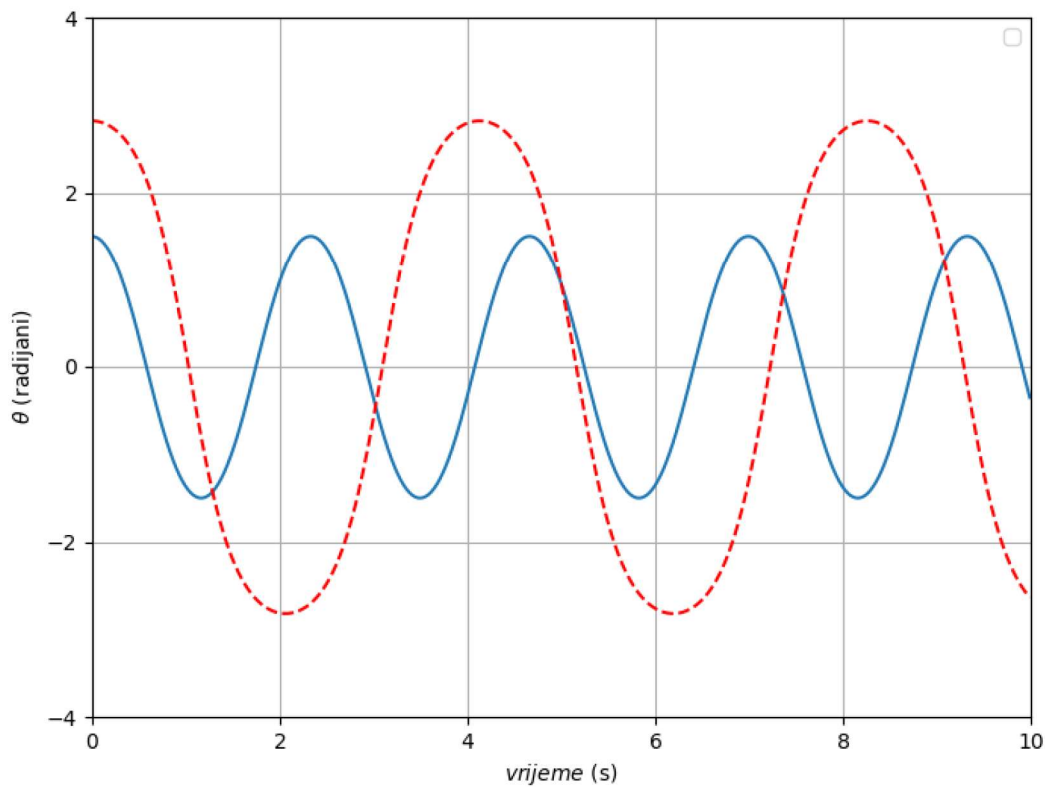


Slika 3.2.  $\theta$  kao funkcija vremena za prisilno njihalo

Na slici 3.2 je prikazan graf koji opisuje prisilno njihalo pod djelovanjem vanjske periodične sile. Na x-osi nalazi se vrijeme (u sekundama), a na y-osi prikazan je kut otklona njihala  $\theta$  (u radijanima). Rezultat numeričkog rješenja diferencijalnih jednadžbi uz pomoć Euler-Cromerove metode je prikazano na grafu (postupak numeričkog rješavanja koji se dobije uz pomoć Python koda 4 nalazi se u dodatku A). Na grafu je prikazano da amplituda oscilacija

njihala s vremenom opada. Na početku, amplituda je veća i oscilacije su izraženije, ali kako vrijeme prolazi, njihalo gubi energiju zbog trenja, što dovodi do smanjenja amplitude. Iako dolazi do smanjenja amplitude, njihalo se i dalje oscilira oko ravnotežnog položaja, ali s frekvencijom koja odgovara frekvenciji vanjske sile koja djeluje na njihalo. S obzirom na to da je frekvencija vanjske sile u skladu s prirodnom frekvencijom njihala, dolazi do rezonancije, ako je trenje dovoljno malo ono može uzrokovati povećanje amplitude. Na grafu se vidi da trenje sprječava značajno povećanje amplitude, održavajući oscilacije u stabilnom stanju. [1], [2]

### 3.3. Nelinearno njihalo (Nonlinear pendulum)



Slika 3.3.  $\theta$  kao funkcija vremena za neprigušeno njihalo

Sada ćemo proširiti  $\sin\theta$  član u (2.1), ali bez pretpostavke da je amplituda oscilacije mala. Dobit ćemo situaciju da se masa čestice njihala oscilira do velikih kutova. Jednadžba gibanja sada glasi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$



Odnosno, razmatramo nelinearno njihalo bez trenja i bez periodične sile. Budući da ne postoji način dodavanja ili uklanjanje energije ovom sustavu, ukupna mehanička energija je očuvana i njihalo izvodi periodično gibanje. Njegov period, međutim, više nije neovisan o amplitudi. Pokrenuli smo njihalo s nekim početnim pomakom (nekim početnim kutom  $\theta(0)$ ), i zatim ga pustili ( $\dot{\theta}(0) = 0$ ). Gibanje je periodično, ali se više ne opisuje sinus ili kosinus funkcijom. Period sada ovisi o amplitudi. Kada je amplituda velika, njihalo provodi dulje vrijeme u svojim točkama zakretanja (točke u kojima je  $\theta$  najveća), a to čini period duljim nego što je utvrđeno za male amplitude.

Graf koji opisuje neprigušeno njihalo prikazan je na slici 3.3. Na x-osi prikazano je vrijeme (u sekundama), a na y-osi kut otklona njihala  $\theta$  (u radijanima). Uz pomoć Euler-Cromerove metode prikazan je graf koji je rezultat numeričkog rješenja diferencijalnih jednadžbi (postupak numeričkog rješavanja koji se dobije uz pomoć Python koda 5 nalazi se u dodatku A). Rezultat rješavanja prikazuje na grafu da je amplituda oscilacije konstantna jer nema prisutnog prigušenja koje bi smanjilo energiju sustava. [1]

#### 4. ZAKLJUČAK

U ovome radu prikazano je numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi za jednostavno, prigušeno, prisilno i nelinearno matematičko njihalo. Rješavajući jednadžbe jednostavnog njihala uz pomoć Eulerove metode dobili smo povećanje amplitude što nije u skladu za sustav bez vanjskih sila i trenja, gdje smo mogli zaključiti da rast amplitude ukazuje na nestabilnost Eulerove metode, također ukupna energija bi trebala ostati konstanta ali u ovom slučaju energija sustava nije očuvana. Uvođenjem Euler-Cromerove metode za rješavanje jednadžbi dobivamo stabilne oscilacije amplitude i očuvanje energije.

Diferencijalne jednadžbe prigušenog njihala za tri različita slučaja riješene su uz pomoć Euler-Cromerove metode. Za podprigušeno njihalo koje se javlja za dovoljno malo trenje, rješenje pokazuje oscilatorno ponašanje s frekvencijom i amplituda koja eksponencijalno opada s vremenom. Rezultat rješenja za prekomjerno prigušeno njihalo prikazuju monotono, eksponencijalno opadanje prema ravnoteži, dok kritično prigušeno njihalo prikazuje rezultat koji eksponencijalno brzo opada prema ravnotežnom položaju bez oscilacija.

Prisilno njihalo rezultat je rješavanja diferencijalnih jednadžbi uz pomoć Euler-Cromerove metode. Za prisilno njihalo dobiveno je da amplituda opada s vremenom, na početku amplituda je veća ali kako vrijeme prolazi zbog trenja njihalo gubi energiju što dovodi i do smanjenja amplitude, dolazi do rezonancije jer je frekvencija vanjske sile u skladu s prirodnom frekvencijom njihala. Možemo zaključiti kako trenje sprječava značajno povećanje amplitude, održavajući oscilacije u stabilnom stanju.

Uz pomoć Euler-Cromer metode riješena je diferencijalna jednadžba nelinearnog njihala čiji su rezultati oscilacije amplitude konstantne jer nema prisutnog prigušenja koje bi smanjilo energiju sustava.

## DODATAK A

**Python kod 1**  $\theta$  kao funkcija vremena za jednostavno njihalo izračunato s pomoću Eulerove metode

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

l = 1 # duljina njihala u metrima
g = 9.81 # gravitacijsko ubrzanje u m/s^2

theta0 = np.radians(10) # početni kut u radijanima
omega0 = 0 # početna kutna brzina u rad/s

pocetno_vrijeme = 0 # početno vrijeme u sekundama
konacno_vrijeme = 10 # konačno vrijeme u sekundama
delta_t = 0.04 # vremenski interval u sekundama
broj_koraka = int((konacno_vrijeme-pocetno_vrijeme)/delta_t)

omega = np.zeros(broj_koraka)
theta = np.zeros(broj_koraka)
t = np.zeros(broj_koraka)

# Početni uvjeti
theta[0] = theta0
omega[0] = omega0 # omega[0] -> derivacija theta po vremenu

# Eulerova metoda
for i in range(broj_koraka-1):
    omega[i+1] = omega[i] - (g/l)*theta[i]*delta_t
    theta[i+1] = theta[i] + omega[i]*delta_t
    t[i+1] = t[i] + delta_t

# Grafički prikaz
plt.plot(t,theta)
plt.xlabel('$vrijeme$ (s)')
plt.ylabel('$\theta$ (radijani)')
plt.xlim(0,10)
plt.ylim(-2,2)
plt.yticks([-2, -1, 0, 1, 2])
plt.margins(0)
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

**Python kod 2**  $\theta$  kao funkcija vremena za jednostavno njihalo izračunato s pomoću Euler-Cromerove metode

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

l = 1 # duljina njihala u metrima
g = 9.81 # gravitacijsko ubrzanje u m/s^2

theta0 = np.radians(10) # početni kut u radijanima
omega0 = 0 # početna kutna brzina u rad/s

pocetno_vrijeme = 0 # početno vrijeme u sekundama
konacno_vrijeme = 10 # konačno vrijeme u sekundama
delta_t = 0.04 # vremenski interval u sekundama
broj_koraka = int((konacno_vrijeme-pocetno_vrijeme)/delta_t)

omega = np.zeros(broj_koraka)
theta = np.zeros(broj_koraka)
t = np.zeros(broj_koraka)

# Početni uvjeti
theta[0] = theta0
omega[0] = omega0 # omega[0] -> derivacija theta po vremenu

# Eulerova-Cromerova metoda
for i in range(broj_koraka-1):
    omega[i+1] = omega[i] - (g/l)*theta[i]*delta_t
    theta[i+1] = theta[i] + omega[i+1]*delta_t
    t[i+1] = t[i] + delta_t

# Grafički prikaz
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(t,theta)
plt.xlabel('$vrijeme$ (s)')
plt.ylabel('$\theta$ (radijani)')
plt.xlim(0,10)
plt.ylim(-0.3,0.3)
plt.margins(0)
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

**Python kod 3**  $\theta$  kao funkcija vremena za prigušeno njihalo za tri slučaja prigušenja izračunatih s pomoću Euler-Cromerove metode

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

l = 1 # duljina njihala u metrima
g = 9.8 # gravitacijsko ubrzanje u m/s^2
q_vrijednosti = [5, 10, 1] # vrijednosti koeficijenata prigušenja u s^-1

theta0 = np.radians(10) # početni kut u radijanima
omega0 = 0 # početna kutna brzina u rad/s

pocetno_vrijeme = 0 # početno vrijeme u sekundama
konacno_vrijeme = 10 # konačno vrijeme u sekundama
delta_t = 0.04 # vremenski interval u sekundama
broj_koraka = int((konacno_vrijeme - pocetno_vrijeme) / delta_t)

omega = np.zeros((len(q_vrijednosti), broj_koraka))
theta = np.zeros((len(q_vrijednosti), broj_koraka))
t = np.zeros((len(q_vrijednosti), broj_koraka))

# Eulerova-Cromerova metoda za svaku vrijednost q
for j, q in enumerate(q_vrijednosti):
    omega[j, 0] = omega0
    theta[j, 0] = theta0

    for i in range(broj_koraka - 1):
        omega[j, i+1] = omega[j, i] - ((g/l) * theta[j, i] + q * omega[j, i])
        * delta_t
        theta[j, i+1] = theta[j, i] + omega[j, i+1] * delta_t
        t[j, i+1] = t[j, i] + delta_t

# Grafički prikaz
plt.figure(figsize=(8, 6))

# Dodavanje krivulja za svaku vrijednost q
labels = []
for j, q in enumerate(q_vrijednosti):
    if q == 1:
        plt.plot(t[j], theta[j], label=f'podprigušenje')
        labels.append(f'podprigušenje')
    elif q == 5:
        plt.plot(t[j], theta[j], label=f'kritično prigušenje')
        labels.append(f'kritično prigušenje')
    elif q == 10:
        plt.plot(t[j], theta[j], label=f'prekomjerno prigušenje')
        labels.append(f'prekomjerno prigušenje')
```

```

plt.xlabel('$vrijeme$ (s)')
plt.ylabel('$\theta$ (radijani)')
plt.xlim(0,10)
plt.ylim(-0.2, 0.2)
plt.yticks(np.arange(-0.2, 0.3, 0.1))
plt.margins(0)
plt.legend(labels)
plt.grid()
plt.show()

```

**Python kod 4**  $\theta$  kao funkcija vremena za prisilno njihalo izračunato s pomoću Euler-Cromerove metode

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

l = 1 # duljina njihala u metrima
g = 9.8 # gravitacijsko ubrzanje u m/s^2
q = 1.0 # koeficijent prigušenja u s^-1
F = 0.2 # amplituda vanjske sinusoidalne sile u njutnima
omega_d = 2.0 # kutna frekvencija vanjske periodične sile u rad/s

theta0 = np.radians(10) # početni kut u radijanima
omega0 = 0 # početna kutna brzina u rad/s

pocetno_vrijeme = 0 # početno vrijeme u sekundama
konacno_vrijeme = 20 # konačno vrijeme u sekundama
delta_t = 0.01 # vremenski interval u sekundama
broj_koraka = int((konacno_vrijeme-pocetno_vrijeme)/delta_t)

omega = np.zeros(broj_koraka)
theta = np.zeros(broj_koraka)
t = np.zeros(broj_koraka)

# Početni uvjeti
theta[0] = theta0
omega[0] = omega0

# Eulerova-Cromerova metoda
for i in range(broj_koraka-1):
    omega[i+1] = omega[i] - ((g/l)*theta[i]+q*omega[i]-
F*np.sin(omega_d*t[i]))*delta_t
    theta[i+1] = theta[i] + omega[i+1]*delta_t
    t[i+1] = t[i] + delta_t

# Grafički prikaz
plt.figure(figsize=(8, 6))

```

```

plt.plot(t,theta)
plt.xlabel('$vrijeme$ (s)')
plt.ylabel('$\theta$ (radijani)')
plt.xlim(0,20)
plt.ylim(-0.2,0.2)
plt.xticks(np.arange(0, konacno_vrijeme + 1, 5))
plt.yticks(np.arange(-0.2, 0.3, 0.1))
plt.margins(0)
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

```

**Python kod 5**  $\theta$  kao funkcija vremena za neprigušeno njihalo izračunato s pomoću Euler-Cromerove metode

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

l = 1 # duljina njihala u metrima
g = 9.8 # gravitacijsko ubrzanje u m/s^2
q = 0 # koeficijent prigušenja u s^-1

theta0 = 1.5 # početni kut u radijanima
omega0 = 0 # početna kutna brzina u rad/s

theta0_isprekidana = 2.82 # Početni kut za isprekidanu liniju u radijanima

pocetno_vrijeme = 0 # početno vrijeme u sekundama
konacno_vrijeme = 10 # konačno vrijeme u sekundama
delta_t = 0.01 # vremenski interval u sekundama
broj_koraka = int((konacno_vrijeme-pocetno_vrijeme)/delta_t)

omega = np.zeros(broj_koraka)
theta = np.zeros(broj_koraka)
t = np.zeros(broj_koraka)

omega_isprekidana = np.zeros(broj_koraka)
theta_isprekidana = np.zeros(broj_koraka)

# Početni uvjeti
theta[0] = theta0
omega[0] = omega0

theta_isprekidana[0] = theta0_isprekidana
omega_isprekidana[0] = omega0

# Eulerova-Cromerova metoda

```

```

for i in range(broj_koraka-1):
    omega[i+1] = omega[i] - ((g/l)*np.sin(theta[i]) + q*omega[i])*delta_t
    theta[i+1] = theta[i] + omega[i+1]*delta_t
    t[i+1] = t[i] + delta_t

    omega_isprekidana[i+1] = omega_isprekidana[i] -
((g/l)*np.sin(theta_isprekidana[i]) + q*omega_isprekidana[i])*delta_t
    theta_isprekidana[i+1] = theta_isprekidana[i] +
omega_isprekidana[i+1]*delta_t

# Grafički prikaz
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(t, theta)
plt.plot(t, theta_isprekidana, 'r--')
plt.xlabel('$vrijeme$ (s)')
plt.ylabel('$\theta$ (radijani)')
plt.xlim(0, 10)
plt.ylim(-4, 4)
plt.yticks(np.arange(-4, 5, 2))
plt.margins(0)
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

```



## LITERATURA

- [1] Nicholas J. Giordano and Hisao Nakanishi, Computational Physics : Oscillatory Motion and Chaos. Upper Saddle River, NJ : Pearson Prentice Hall, 2006. 2nd Edition
- [2] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion, Classical Dynamics of Particles and Systems : Oscillations. Belmont, CA : Brooks/Cole, 2004. 5nd Edition
- [3] Glumac, Z., Klasična mehanika: kratak uvod, Publisher, book-website.com, 2015.
- [4] <https://mathworld.wolfram.com/DampedSimpleHarmonicMotion.html> (pristupljeno 8.8.2024.)
- [5] <https://courses.physics.ucsd.edu/2011/Summer/session1/physics1c/lecture2.pdf> (pristupljeno 8.8.2024.)
- [6] ubrzanje. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. Pristupljeno 22.7.2024. <https://enciklopedija.hr/clanak/ubrzanje>.
- [7] Newtonovi zakoni. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. Pristupljeno 22.7.2024. <https://enciklopedija.hr/clanak/newtonovi-zakoni>.
- [8] Poje Sovilj, M., Miklavčić, I. i Štibi, I., Praktikum iz Osnova fizike 1, Osijek, 2022.