Aplikacija za izračun parametara crne rupe iz mase i spina

Kirhofer, Mario

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Odjel za fiziku

Mario Kirhofer

Aplikacija za izračun parametara crne rupe iz mase i spina

Diplomski rad

Osijek, 2024.

Ovaj rad napravljen je pod mentorstvom dr. sc. Darija Hrupeca, kao dio diplomskog studija fizike i informatike na Odjelu za fiziku, Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera
Odjel za fiziku

Diplomski rad

Aplikacija za izračun parametara crne rupe iz mase i spina

Mario Kirhofer, univ. bacc. phys.

Sažetak

Crne rupe fascinantni su astronomski objekti koje nastaju prilikom gravitacijskog urušavanja masivnih zvijezda. Iako konceptualno postoje još od 18. stoljeća (*John Mitchell, 1783.*), pojam crne rupe kako ju danas razumijemo razvio je Karl Schwarzschild 1916. godine pomoću Einsteinove teorije relativnosti. Godine 1971. konačno je i otkrivena crna rupa Cygnus X-1.

Cilj ovog rada je predstaviti pojam crne rupe, od njezinih konceptualnih početaka sve do određenih saznanja koja danas imamo o crnim rupama. Ovaj rad također će prikazati ulogu mase i spina crne rupe u njezinom fizikalnom opisu, te ćemo u konačnici vidjeti kako se određeni parametri crne rupe računaju iz mase i spina pomoću jednostavne aplikacije.

Ključne riječi: Crna rupa, Schwarzschildov polumjer, Kerrov polumjer, Eddingtonova granica

Mentor: doc. dr. sc. Dario Hrupec

Ocjenjivači: doc. dr. sc. Zvonko Glumac, doc. dr. sc. Tomislav Žic

University of Josip Juraj Strossmayer
Department of physics

Master's thesis

Application for calculating parameters of black hole from its mass and spin

Mario Kirhofer, univ. bacc. phys.

Abstract

Black holes are fascinating astronomical objects created by gravitational collapse of massive stars. Although conceptualized during 18th century (*John Mitchell,* 1783), concept of black hole as we understand it today was developed by Karl Schwarzschild in 1916 using Einstein's theory of relativity. In 1971 first black hole was finally discovered and named Cygnus X-1.

Aim of this thesis is to present the concept of a black hole, all the way since its conceptualization to understanding of black holes we have today. This thesis will also show the role of mass and spin in its description of physical properties, and finally we will see how certain parameters are calculated, in regards to its mass and spin, using a simple application.

Key words: Black holes, Schwarzschild radius, Kerr radius, Eddington limit

Mentor: doc. dr. sc. Dario Hrupec

Reviewers: doc. dr. sc. Zvonko Glumac, doc. dr. sc. Tomislav Žic

Sadržaj

1. POVIJEST OTRKIĆA CRNIH RUPA

Crne rupe kao egzotični hipotetski astronomski objekti okupiraju maštu znanstvenika diljem svijeta. Njihova gravitacijska privlačnost toliko je velika da brzina potrebna da se napusti njihova površina nadmašuje vrijednost brzine svjetlosti. Koncept crne rupe prvi je predložio John Michell u svom pismu Henryu Cavendishu[1][7]. On u pismu piše:

„Ako je polumjer sfere gustoće Sunca veći od polumjera Sunca u omjeru 500:1, tijelo koje pada s beskonačne visine prema sferi će, na površini sfere, razviti brzinu veću od brzine svjetlosti, te ako pretpostavimo da na svjetlost djeluju jednake sile, zbog njezine inercije, kao na druga tijela, svaka svjetlost emitirana s takvog objekta padat će nazad na taj objekt, zbog njegove vlastite gravitacije.“(1)

Iako se tada još nisu zvale crne rupe (Michell ovakve objekte u svom radu naziva tamne zvijezde (eng. „dark stars“), ideja takvih objekata odgovara onome što znamo danas o crnim rupama. Također, ideja je zasnovana na Newtonovom zakonu gravitacije, te je bilo logično postaviti si pitanje, postoje li objekti toliko masivni da ništa s njih ne može „pobjeći“. Michell je postulirao da bi takve objekte bilo teško opaziti putem njihovih radijativnih svojstava, no moglo bi ih se uočiti pomoću njihovog gravitacijskog djelovanja na okolne objekte.

Veliki iskorak u razumijevanju fizike prostora i vremena napravio je Albert Einstein, 1905. godine u svojem radu *„O elektrodinamici tijela u gibanju“.* Uveo je dva vrlo važna postulata specijalne teorije relativnosti[3]:

1. *Načelo relativnosti:* Ne postoji eksperiment koji može odrediti apsolutnu brzinu opažača: rezultati bilo kojeg eksperimenta nekog opažača ne ovise o njegovoj brzini u odnosu na druge opažače koji ne sudjeluju u pokusu. Zakoni fizike jednaki su u svim inercijalnim sustavima (neubrzanim sustavima).
2. *Načelo univerzalnosti brzine svjetlosti:* Brzina svjetlosti u odnosu na neubrzane opažače uvijek iznosi 299 792 458 m/s. To znači da će različiti opažači izmjeriti brzinu istog fotona kao 299 792 458 m/s neovisno kako se gibaju u odnosu jedan na drugoga, te kako se gibaju u odnosu na izvor svjetlosti (važno je samo da nisu ubrzani).

Zaključak oba ova postulata je upravo taj da su svi zakoni fizike jednaki u bilo kojem referentnom okviru. Jedino što možemo zaključiti o referentnim okvirima jest da se oni gibaju jedni u odnosu na druge. Iz ova dva postulata proizlaze Lorentzove transformacije, a posljedice Lorentzovih transformacija su dilatacija vremena i kontrakcija duljine[3]:

$$
\begin{aligned}
\bar{t} &= \frac{t}{\sqrt{(1-v^2)}} - \frac{vx}{\sqrt{(1-v^2)}}, \\
\bar{x} &= \frac{-vt}{\sqrt{(1-v^2)}} + \frac{x}{\sqrt{(1-v^2)}}, \\
\bar{y} &= y, \\
\bar{z} &= z.
\end{aligned}
$$

Slika 1. Opis Lorentzovih transformacija, *First Course in General Relativity – 2nd edition,* Bernard Schutz (2). Precrtane vrijednosti još se nazivaju i vlastite vrijednosti. To su mjerenja koja obavlja opažač u sustavu koji se giba. Također, napomenimo da se ovdje brzina svjetlosti svodi na konstantu 1.

U gornjim jednadžbama opisano je kako se mijenjaju prostorne i vremenske koordinate u ovisnosti o perspektivi promatranja određenog referentnog sustava. Za gornji slučaj sebe postavljamo u mirujući referentni okvir, a o promatranom referentnom okviru razmišljamo kao o okviru koji se giba. Ono što nam Lorentzove transformacije zapravo prikazuju jest to da vrijeme i duljina, koje mjere opažač koji se nalazi u sustavu koji miruje i opažač koji se nalazi u sustavu koji se giba, pokazuju određena odstupanja, a sama odstupanja ovise o brzini kojom se jedan sustav giba u odnosu na drugi sustav. Važno je napomenuti da i jedan i drugi opažač miruju u vlastitom sustavu, odnosno gibaju se zajedno s njim.

Još jedna vrlo važna formulacija unutar specijalne teorije relativnosti jest poznata jednadžba $E = mc^2$. Pokazati ćemo na koji način je Einstein došao do spomenute jednadžbe. Počinjemo s Newtonovim zakonom da je sila jednaka brzini promjene količine gibanja:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \quad (1)$$

Količina gibanja dana je izrazom $p = mv$, no kada uvrstimo relaciju za relativističku masu[4] izraz za količinu gibanja prelazi u:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

Ovaj izraz je Einsteinova modifikacija Newtonovih zakona. Važno je napomenuti da se s m_0 označava masa mirovanja tijela. Postavljamo si pitanje što ako na tijelo djeluje konstanta sila. Ono što znamo jest da će tijelo ubrzavati. Po Newtonovoj mehanici tijelo će ubrzavati dok se ne počne gibati brzinom većom od brzine svjetlosti. Prisjetimo li se postulata teorije relativnosti, zaključujemo da je to nemoguće. No, ako brzina ne može poprimati vrijednosti veće od brzine svjetlosti, kako to da količina gibanja raste. Zaključujemo da se radi o masi, odnosno da masa raste s povećanjem količine gibanja.

Upravo ovo gornje razmatranje navelo je Einsteina da masu tijela izrazi kao energiju tijela podijeljenu s kvadratom iznosa brzine svjetlosti odnosno:

$$E = mc^2 \quad (3)$$

Ovaj izraz zapravo izjednačava energiju i masu tijela i pokazuje kako se međusobno odnose. Ovaj izraz najbolje se očituje kod radioaktivnih raspada (kontroliranih ili nekontroliranih). Čak je i u nekim eksperimentima pokazano da atomska bomba energijske vrijednosti 20 kilotona nakon eksplozije uzrokuje povećanje mase obližnjeg pijeska za 1 gram. Također, konačna potvrda ekvivalencije mase i energije dolazi u obliku pokusa anihilacije. Sudare li se elektron i pozitron, od kojih svaki ima masu m_0 dolazi do njihove dezintegracije i oslobađa se izmjerena energija $m_0 c^2$[4].

Ono što možemo uočiti kada raspravljamo o specijalnoj teoriji relativnosti jest to da zanemarujemo ubrzane sustave, odnosno sustave na koje djeluje sila. Samog Einsteina je dugo mučila gravitacijska sila i na koji način se ona uklapa u teoriju relativnosti. Iako je Newtonov zakon gravitacije već dugo vremena bio poznat, on vrijedi za svakodnevni život, ali kod objekata velikih masa potrebne su određene prilagodbe. Također, ukoliko pogledamo izraz za Newtonov zakon gravitacije između dva tijela masa m_1 i m_2

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (4)$$

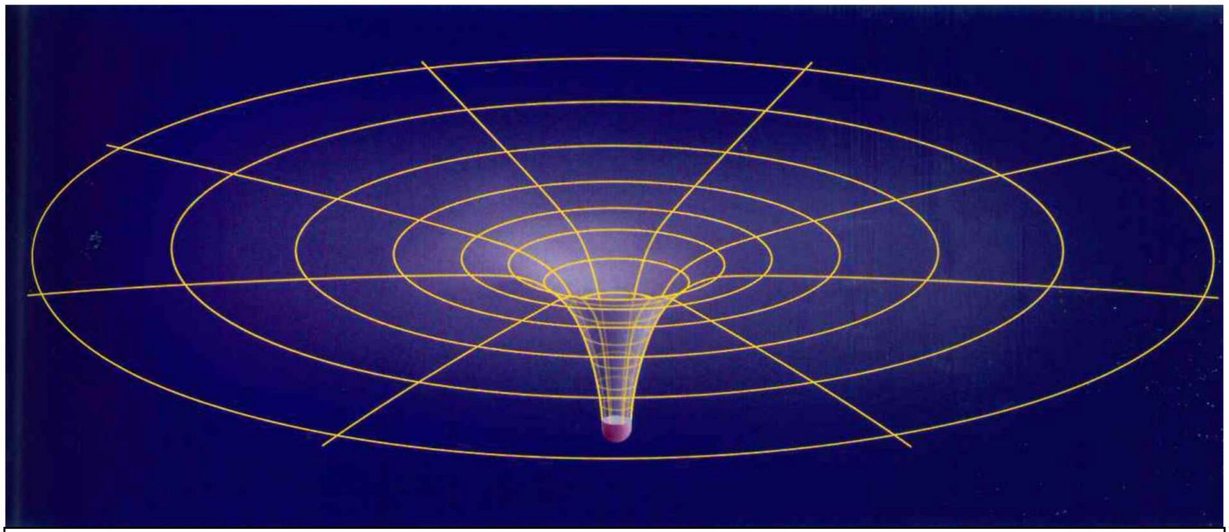
uočiti ćemo da iznos sile osim masa, ovisi o kvadratu udaljenosti. Shvaćamo li gravitaciju na ovaj način, tada bi se iznos sile mijenjao trenutno promjenom udaljenosti među tijelima. Specijalna teorija relativnosti kaže da je najveća moguća brzina kojom se neko tijelo može gibati upravo brzina svjetlosti. No, brzina svjetlosti ne odnosi se samo na gibanje. Zapravo, teorija relativnosti kaže da je brzina svjetlosti najveća moguća brzina kojom se bilo koja promjena može odvijati. To se odnosi i na gravitacijsku silu. To znači da se iznos gravitacijske sile neće promijeniti u trenutku kada promijenimo udaljenost među tijelima.

Još jedan problem koji je mučio Einsteina je upravo taj što svako materijalno tijelo oko sebe stvara gravitacijsko polje, pa svako tijelo djeluje na drugo tijelo nekom silom. Einstein je taj problem riješio drugačijim pogledom na gravitacijsku silu. Gravitacijsku silu ne smatra više silom već gravitacijska polja smatra distorzijama u prostoru, odnosno zakrivljenjima samog prostora. Mase ne djeluju silama jedne na druge već zakrivljuju prostor oko sebe, a tijela koja se gibaju kroz prostorvrijeme, gibaju se većinom pravocrtno dok ne naiđu na zakrivljenja u prostoru, te tada i njihove putanje postaju zakrivljene. Upravo je ove zaključke Albert Einstein iznio u svom radu *„Jednadžbe gravitacijskog polja“* 1915. godine. Zaključke ovog rada Einstein je iznio u vidu svojih jednadžbi[4]:

$$G_{\mu\upsilon} + \Lambda g_{\mu\upsilon} = \kappa T_{\mu\upsilon} \quad (5),$$

gdje je $G_{\mu\upsilon}$ Einsteinov tenzor, $g_{\mu\upsilon}$ metrički tenzor, $T_{\mu\upsilon}$ tenzor energije i količine gibanja, Λ kozmološka konstanta, κ Einsteinova gravitacijska konstanta.

Godina 1963. vrlo je važna za astronomiju i potragu za crni rupama, jer upravo je te godine Marteen Schmidt otkrio kvazare i na taj način pokrenuo potragu za crnim rupama. Potraga je kulminirala 1971. godine kada je otkrivena prva crna rupa Cygnus X-1 (naziv crna rupa skovao je John Wheeler 1968. godine.)[1].

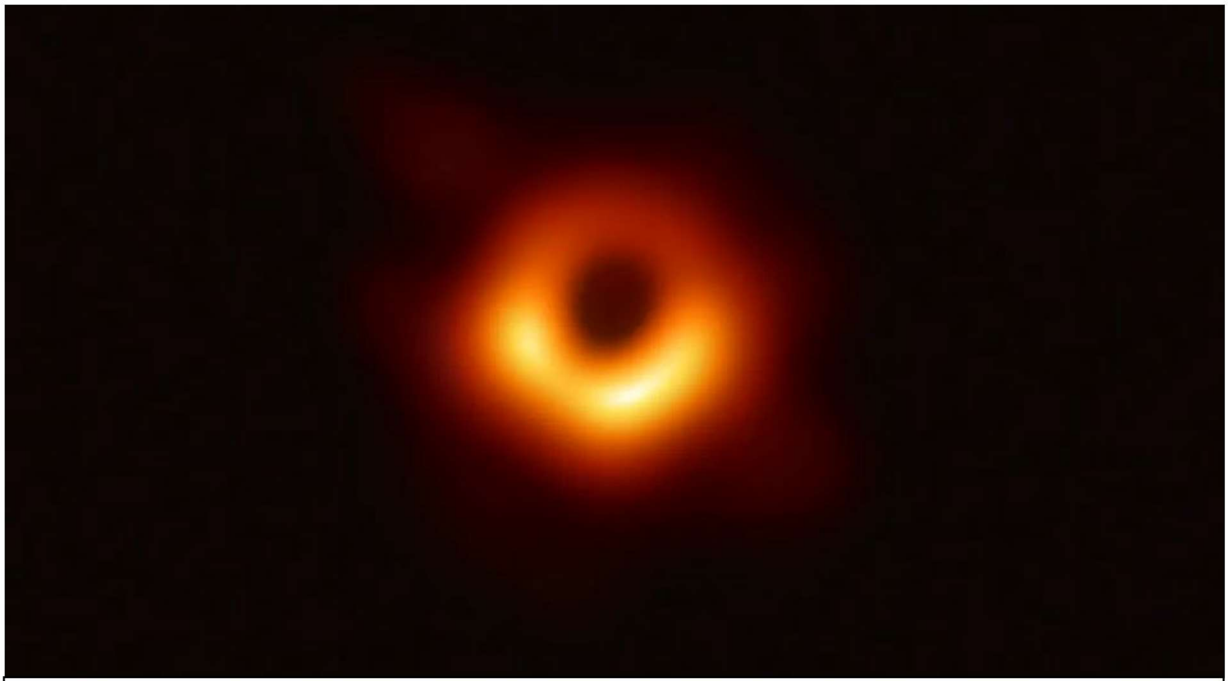


Slika 2. Dvodimenzionalni prikaz prostornog zakrivljenja. Ovo zakrivljenje zovemo gravitacija, odnosno gravitacijska sila, s obzirom na to da se čestice, koje uđu u gravitacijsko polje, ponašaju kao da ih privlači neka sila. No zapravo, čestice se jednostavno gibaju kroz zakrivljen prostor. Ukoliko se radi o crnoj rupi, jama sa slike biti će beskonačno duboka.

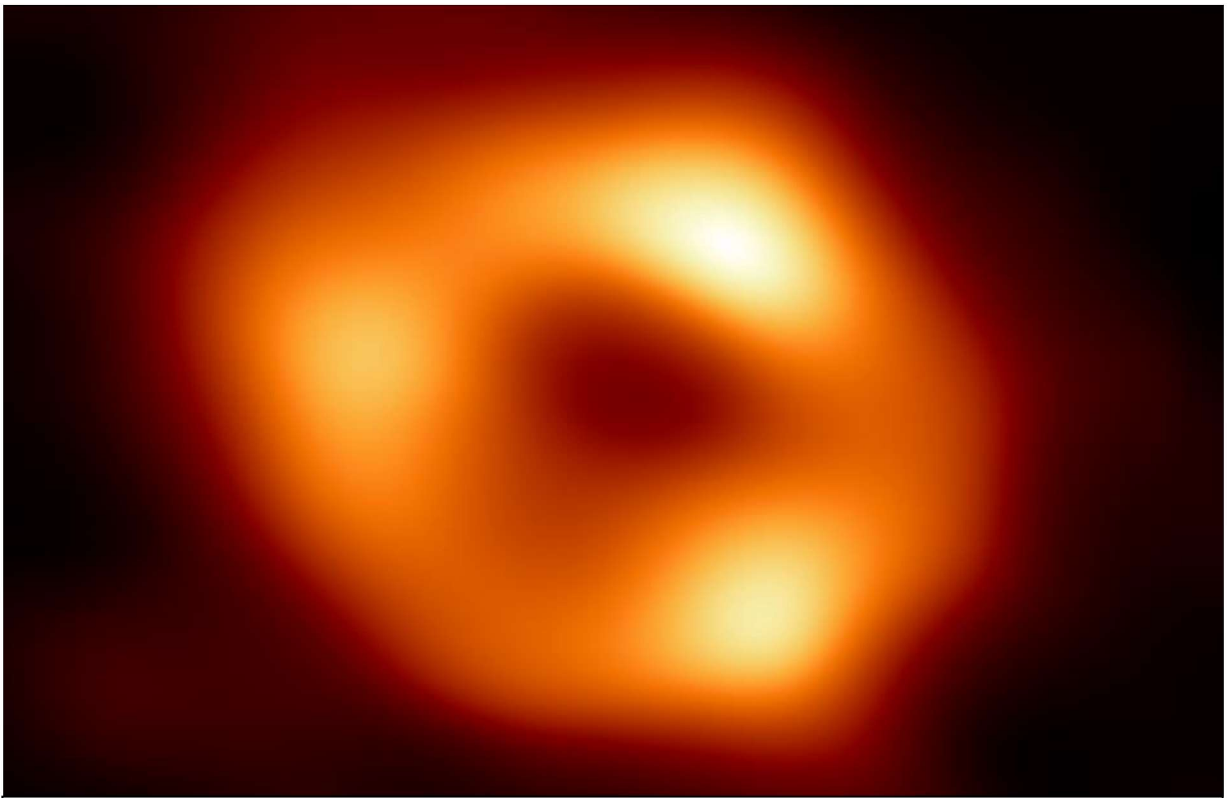
Gravity's fatal attraction, Mitchell Begelman, Martin Reese.

Iako su crne rupe do 1971. godine, kada je službeno otkrivena prva crna rupa, Cygnus X-1[1], bile gotovo isključivo hipotetski objekti, pokušavalo se objasniti fizikalna načela takvih astronomskih objekata. Tako je prvo nastala Schwarzschildova metrika, a ubrzo zatim i Kerrova metrika.

Datuma 10. travnja 2019. godine objavljenja je prva slika crne rupe[8][9]. Znanstvenici su koristeći se Event Horizon teleskopom dobili prvu jasnu sliku crne rupe. Crna rupa nalazi se u središtu galaksije nazvane M87. Ova slika potvrđuje postojanje crnih rupa, a veličina prstena crne rupe slaže se s Einsteinovim predviđanjima u općoj teoriji relativnosti. Godine 2022., datuma 12. svibnja snimljena je crna rupa u središtu Mliječne staze[9].



Slika 3. Slika prikazuje crnu rupu u središtu galaksije M87 (Messier 87).



Slika 4. Slika crne rupe u središtu galaksije Mliječna staza. Objekt je nazvan Strijelac A.

Spomenimo još i 2020. godinu. Upravo te godine Roger Penrose dobio je polovinu Nobelove nagrade (ostali primaoci su Reinhard Genzel i Andrea Ghez). Penrose je matematički pokazao da se u središtu crne rupe nalazi singularnost. Matematički dokaz da se u središtu crne rupe nalazi singularnost još se naziva i Penroseov teorem[10][2].

1.1. Schwarzschildova metrika

Schwarzschildova metrika, odnosno geometrija, daje rješenja Einsteinovih jednadžbi za gravitacijska polja u vakuumu, na udaljenosti r od zvijezde. Rješenje je dano izrazom[2]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} r^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \ (6)$$

Ono što možemo uočiti iz ove jednadžbe, jest to da rješenje jednadžbe ne ovisi o vremenskoj koordinati t, već samo o masi M objekta, koji oko sebe stvara gravitacijsko polje. Postavimo li probnu česticu u beskonačnost u odnosu na izvor gravitacije ($r \to \infty$), prostorvrijeme prelazi u ravni oblik prostorvremena Minskowskog[2] (nema zakrivljenja). U tom slučaju gravitacijsko polje može se opisati aproksimacijom slabog polja:

$$-g_{tt} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \ (7)$$

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \ (8)$$

Usporedimo li ovo rješenje s Schwarzschildovom jednadžbom, možemo zaključiti kako je *M* centralna masa, odnosno izvor gravitacijskog polja. Napomenimo još da, ukoliko izvor gravitacijskog polja rotira na način da mu je očuvana sferna simetričnost, područje koje je udaljeno od materije koja stvara gravitacijsko polje biti će konstantno (statično i asimptotski ravno) – ova izjava još se naziva i Birkhoffov teorem.

1.2. Schwarzschildov referentni okvir

Veličine $(t,\ r,\ \theta,\ \phi)$ iz Schwarzschildovog rješenja nazivaju se i *Schwarzschildove koordinate*, a referentni okvir koji je njima opisan naziva se *Schwarzschildov referentni okvir*[2].

Ono što nas ovdje zanima jest to kako će se međusobno odnositi da referentna okvira u slučaju kada su oba postavljena u beskonačnost u odnosu na izvor gravitacijskog polja i kada je jedan postavljen u beskonačnost, a drugi u blizinu gravitacijskog polja.

Vrijeme $d\tau$ u nekoj točki koja se nalazi na udaljenosti r biti će dano izrazom[2]:

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} dt \ \ (9)$$

$$t - vrijeme\ koje\ mjeri\ promatrač\ koji\ se\ nalazi\ u\ beskonačnosti$$

Ukoliko pretpostavimo da $r \to \infty$, $d\tau = dt$. No, što je r manji, to se vrijeme $d\tau$ povećava, odnosno progresivno se smanjuje što je sustav bliže izvoru gravitacijskog polja u odnosu na vrijeme dt. Kako $r \to \frac{2GM}{c^2}$, tako zaključujemo da je $d\tau \to 0$. Izraz $\frac{2GM}{c^2 r}$ predstavlja zakrivljenost prostora.

Pokazati ćemo još kako se ponaša ubrzanje tijela u gravitacijskom polju. Zamislimo tijelo koje se nalazi u Schwarzschildovom referentnom okviru. Neka je ono na početku u stanju mirovanja. U trenutku kada se to tijelo nađe u gravitacijskom polju, ono počinje padati prema središtu gravitacijskog polja, odnosno prema izvoru. Tijelo se prema izvoru giba ubrzano, akceleracijom[2]:

$$a = \frac{GM}{r^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}}} \ \ (10)$$

Kako smo već napomenuli, akceleracija je usmjerena prema središtu izvora polja. Ono što možemo iz izraza zaključiti je to da ako je $r \to \frac{2GM}{c^2}$ tada akceleracija teži u beskonačnost. Povežemo li to s vremenom $d\tau$, možemo zaključiti kako Schwarzschildov referentni okvir ima singularnost[2].

Veličina $r = r_g = \frac{2GM}{c^2}$ naziva se Schwarzschildov polumjer. Kada budemo spominjali fizikalnu veličinu horizont događaja onda ćemo uočiti i fizikalno značenje Schwarzschildovog polumjera. Recimo još samo kako je Schwarzschildov polumjer vrlo malen čak i za nebeska tijela (npr. za Zemlju on iznosi 0,9 kilometara, a za Sunce oko 3 kilometra), pa se još uvijek u području svakodnevnih nebeskih tijela koriste Newtonove jednadžbe gravitacije (za slučajeve kada je $r \gg r_g$), te za ta gravitacijska polja koristimo još i naziv Newtonova gravitacijska polja. No što se događa kada se dogodi kontrakcija sferne mase na vrijednost manju od r_g?

1.3. Gravitacijsko urušavanje

Urušavanje velike količine materije, nakon kojeg nastaje crna rupa, dovodi do nastajanja horizonta događaja. Ono što je važno za zapamtiti jest to da prilikom opisa crnih rupa najčešće se koristimo najjednostavnijim modelom urušavanja: pretpostavljamo da je crna rupa statična i sferno simetrična. Kasnije kada budemo objašnjavali stvarne, astrofizičke crne rupe uvidjeti ćemo da je samo urušavanje vrlo kompleksan i dinamičan proces. No za sada ćemo se zadržati na horizontu događaja.

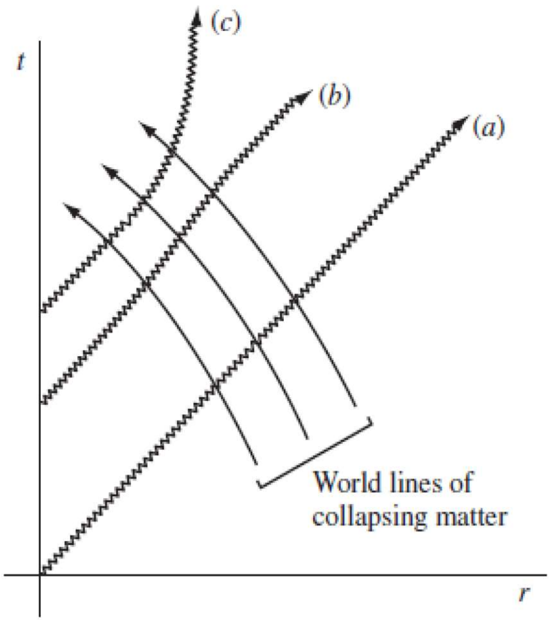
Jedna od definicija horizonta događaja glasi ovako:

„Horizont događaja je granica u prostorvremenu između događaja koji mogu komunicirati sa udaljenim opažačem i događaja koji ne mogu."[4]

Ono što možemo uočiti iz ove definicije jest to da ona pretpostavlja da postoji opažač koji u konačnici može detektirati udaljene događaje. Razlika između događaja koji mogu komunicirati s udaljenim opažačem može se uvidjeti upravo iz definicije. Događaji koji mogu komunicirati s udaljenim opažačem nalaze se s vanjske strane granice horizonta događaja. Mogli bismo reći kako je vanjski događaj (u odnosu na horizont događaja) vanjski ukoliko može emitirati barem jedan foton u bilo kojem smjeru, a da u konačnici taj foton bude apsorbiran od strane opažača. Uz sve rečeno, još nešto može se uvidjeti iz definicije, a to je činjenica da je horizont događaja granica u prostorvremenu, a ne samo u trodimenzionalnom prostoru.

Osim što je horizont događaja granica između događaja koji se mogu udaljiti od njega i događaja koji su zarobljeni unutar njega, sam horizont događaja sastoji se od marginalno zarobljenih događaja, odnosno zraka svjetlosti. To su zrake koje nemaju dovoljno energije da napuste granicu, ali imaju dovoljno energije da ne prijeđu u unutrašnjost horizonta događaja. U idealnim uvjetima, takve zrake mogle bi vječno ostati u orbiti oko crne rupe. Međutim, uvjeti kod astrofizičkih crnih rupa gotovo nikada nisu idealni.

Zamislimo zvijezdu koja se urušava u crnu rupu. Na kraju urušavanja ostaje statičan Schwarzschildov horizont. No, postoji period u kojem horizont raste od nule do „konačne" veličine. Shematski je to prikazano na sljedećoj slici:



Slika 3. Shematski prikaz urušavanja materije u crnu rupu. Linija (a) predstavlja zraku svjetlosti (foton) koja vrlo lako napušta horizont događaja. Zraka (b) napušta horizont, ali uz određeno zakašnjenje. Zraka (c) ostaje rubno zarobljena.

First Course in General Relativity – 2nd edition, Bernard Schutz

Sa slike možemo uočiti kako foton (a) napušta horizont bez većih poteškoća, foton (b) napušta horizont uz zakašnjenje, a foton (c) ostaje u rubnoj orbiti. Zapravo nam foton (c) predstavlja horizont događaja, pa pomoću njega možemo odrediti vanjsku granicu horizonta. I kada bismo znali početne uvjete urušavanja i ako je situacija sferno simetrična mogli bismo točno odrediti položaj horizonta. Problem je u tome što neposredno nakon urušavanja gotovo nikada nije uspostavljena simetrija (najčešće zbog gravitacijskog zračenja).

Prikazati ćemo jednostavniji primjer dinamičkog horizonta. Promotriti ćemo što se događa sa horizontom događaja kada u „konačnu" crnu rupu upadne određena količina materije određene mase. Pretpostavimo da je masa crne rupe prije nego što u nju upadne materija M_0. Tada je površina horizonta događaja $r = 2M_0$ (gravitacijska konstanta G i brzina svjetlosti c svedene su na jedinice). Površina je statična i sferno simetrična. Nakon što u crnu rupu upadne određena količina materije, masa crne rupe poveća se na M_1, a površina horizonta postaje $r = 2M_1$. Sada će ta nova površina činiti horizont događaja, a zrake koje su dosada bile one zrake koje napuštaju horizont postati će rubno zarobljene. Slijedi logičan zaključak da su zrake, koje su prethodno bile rubno zarobljene, sada upadaju prema singularnosti. Granica između zarobljenih i nezarobljenih zraka sastoji se od zraka koje se nalaze na $r = 2M_1$. To znači da $r = 2M_0$ nikada niti nije bio horizont događaja iako se sastojao od rubno zarobljenih zraka, već samim time što se granica od početka upadanja materije širila. Ovo je jedan od slikovitih prikaza kako horizont događaja nije samo granica u prostoru već prostoru i vremenu. Nije dovoljno samo u određenom vremenskom trenutku promotriti crnu rupu i odrediti horizont događaja, već moramo promotriti cijelu njenu evoluciju.

1.4. Kerrova crna rupa

Svi objekti nakon urušavanja imaju kutnu količinu gibanja. Logično je zapitati se događa li se isto i kod crni rupa. Pretpostavlja se da je odgovor da. Iz tog razloga Roy Kerr ponudio je rješenja Einsteinovih jednadžbi polja[1].

Do sada smo promatrali crne rupe kao stacionarne simetrične objekte. Možemo si postaviti pitanje što se događa kada urušavajući objekt ima znatno odstupanje od sferne simetrije i kada njegov naboj i kutna količina gibanja nisu zanemarivi. U tom slučaj crna rupa opisuje se s tri parametra: masa M, kutna količina gibanja J i naboj Q. Zanemariti ćemo druga svojstva kao što su sastav objekta koji se urušava, asimetrije nastale zbog nehomogene raspodjele mase, utjecaj magnetskog polja, itd. jer ta svojstva neće imati značajan utjecaj na konačnu stacionarnu crnu rupu. U tom slučaju rješenje Einsteinovih jednadžbi poprima oblik[2]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A\sin^2\theta}{\Sigma}d\phi^2 \quad (11)$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \quad (12)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \quad (13)$$

$$A \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta \quad (14)$$

Fizikalna veličina a bezdimenzijski je parametar, a predstavlja spin crne rupe. Još ga se naziva i specifična kutna količina gibanja.

$$a = \frac{J}{M} \quad (15)$$

Uočimo da, ukoliko svedemo $M \to 0$ i $a \to 0$ dobivamo:

$$ds^2 = -dt^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)\left(\frac{dr^2}{r^2 + a^2} + d\theta^2\right) + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\, d\phi^2 \quad (16)$$

Koordinate (r, θ, ϕ) povezane su s Kartezijevim koordinatnim sustavom na slijedeći način:

$$x = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\cos\phi\,, y = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\sin\phi\,, z = r\cos\theta$$

Sada možemo primijetiti da, ukoliko iz sferno, pređemo u Kartezijev koordinatni sustav, jednadžba (16) prelazi u jednadžbu ravnog prostorvremena:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (17)$$

Spomenimo još samo kako je Kerrova metrika simetrična (vremenski neovisna) i osnosimetrična[2].

2. OPĆA SVOJSTVA CRNIH RUPA

(1) Pretpostavlja se kako će svaki horizont nakon dovoljno dugo vremena postati stacionaran pretpostavimo li da nema dotoka nove materije putem akrecije (nakupljanje materije oko objekta). To znači da će svaka izolirana crna rupa u konačnici postati stacionarna. To znači da će takva crna rupa biti opisana samo pomoću dva parametra, a to su masa M i kutna količina gibanja J. Upravo ovakvo rješenje ponudio je Roy Kerr, a rotirajuća crna rupa naziva se Kerrova crna rupa. Ukoliko je kutna količina gibanja crne rupe nula, tada ona postaje Schwarzschildova crna rupa[3].

(2) Ukoliko crna rupa nije u vakuumu moguće je da zadrži određeni naboj Q. Također, mogu nastati i neka druga polja tokom urušavanja kao što su samogravitirajuća skalarna polja. Unatoč tome, smatra se kako su ti efekti zanemarivi pa se i dalje kao najvažnije veličine promatraju samo masa i kutna količina gibanja. Ali, ono što može biti važno jest utjecaj plimnih sila na horizont događaja. Pretpostavimo li da se oko crne rupe nakupilo dovoljno materije, može se dogoditi distorzija horizonta događaja, a u tom slučaju čak ni Kerrova metrika nije adekvatna za opisivanje takvog objekta.

(3) Ukoliko je urušavanje sferno, svi elementi koji su dio ne sferne masene distribucije izračeni su u obliku gravitacijskog zračenja.

(4) U dinamičkim procesima crnih rupa ukupna površina horizonta događaja nikada se ne može smanjiti tokom vremena. To znači da se dvije crne rupe mogu spojiti i povećati svoj ukupan horizont događaja, ali jedna crna rupa ne može se raspasti na dvije manje crne rupe, te na taj način smanjiti svoj ukupan horizont događaja. Ovaj teorem još se naziva i Hawkingov teorem.

(5) Unutar Schwarzschildovog i Kerrovog polumjera nalaze se singularnosti gdje su plimne sile, a samim time i zakrivljenje, beskonačne. Pretpostavlja se da će bilo koji

horizont u svom središtu imati singularnost (Hawking i Penrose), iako zapravo nije u potpunosti sigurno hoće li singularnosti imati uvijek beskonačno zakrivljenje.

(6) Postojanje singularnosti unutar horizonata potaklo je znanstvenike na postavljanje pitanja postoji li *„gola"* singularnost, odnosno singularnost izvan horizonta. Roger Penrose je 1979. godine formulirao *„zaključak o kozmičkoj cenzuri",* u kojemu je, između ostalog, predvidio kako postojanje takvih singularnosti nije moguće.

3. APLIKACIJA ZA IZRAČUN FIZIKALNIH VELIČINA CRNE RUPE IZ MASE I SPINA

U daljnjem dijelu rada pogledati ćemo kod aplikacije, kako ona radi i na koji način računa neke od fizikalnih veličina crne rupe kao što su horizont događaja, Eddingtonova luminoznost, akrecijski prirast, itd.. No, prije svega moramo prvo objasniti jednadžbe koje su korištene za izračun tih fizikalnih veličina.

3.1. Horizont događaja. Kutna količina gibanja

Prvo ćemo prikazati kako se računa horizont događaja Schwarzschildove, a potom i Kerrove crne rupe.

Kako smo već ranije objasnili značenje horizonta događaja, ovdje ćemo samo prikazati na koji način se računaju[2].

$$r_s = \frac{2GM_{\odot}}{c^2} \rightarrow Schwarzschildov\ radijus$$

$$r_k = \frac{GM_{\odot}}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM_{\odot}}{c^2}\right)^2 (1 - a^2)} \rightarrow Kerrov\ radijus$$

Parametar a predstavlja spin crne rupe, odnosno rotaciju crne rupe i ovisi o kutnoj količini gibanja J crne rupe:

$$a = \frac{Jc}{GM_{\odot}}$$

$$J = \frac{GM_{\odot}a}{c}$$

3.2. Najstabilnija unutarnja orbita. Polumjer fotonske sfere. Bondijev polumjer

Najstabilnija unutarnja orbita predstavlja granicu između stabilnih kružnih orbita i nestabilnih. Ukoliko se energija E_{circ}, odnosno kutna količina gibanja L_{circ} čestice, mase m, u orbiti računa kao[2]:

$$\frac{E_{circ}}{m} = \frac{r^2 - 2Mr \pm a\sqrt{Mr}}{r\sqrt{r^2 - 3Mr \pm a\sqrt{Mr}}} \quad (18)$$

$$\frac{L_{circ}}{m} = \pm\frac{\sqrt{Mr}\left(r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2\right)}{r\sqrt{r^2 - 3Mr \pm a\sqrt{Mr}}} \quad (19)$$

Napomenimo samo da smo u ovom slučaju brzinu svjetlosti i gravitacijsku konstantu sveli na 1 ($G = c = 1$), odnosno:

$$M = \frac{GM_{\odot}}{c^2}$$

Kružne orbite postoje samo u slučaju kada je nazivnik u jednadžbama (18) i (19) realan, a to će vrijediti za slučaj:

$$r^2 - 3Mr \pm a\sqrt{Mr} \geq 0$$

Polumjer orbite koja se nalazi najbliže crnoj rupi, je udaljenost od crne rupe na kojoj se čestice oko crne rupe gibaju brzinom svjetlosti, pa se ta udaljenost naziva još i fotonski polumjer[2]:

$$r_{foton} = 2M\left\{1 + \cos\left[\frac{2}{3}arccos\left(\mp\frac{a}{M}\right)\right]\right\} \quad (20)$$

Za $a = 0$, $r_{foton} = 3M$. Za $a = M$, $r_{foton} = M$ za progradno, a $r_{foton} = 4M$ za retrogradno gibanje. Također, ova orbita je nestabilna.

Bilo koja orbita za koju vrijedi $r > r_{foton}, \frac{E_{circ}}{m} \geq 1$ je nestabilna zato što će bilo koja sila koja djeluje od smjera središta vrtnje prema van na česticu, pogurati česticu tako da će ona napustiti orbitu i „pobjeći“ u beskonačnost.

Nestabilna orbita, kod koje je $E_{circ} = m$ dana je izrazom[2]:

$$r_{ns} = 2M \mp a + 2\sqrt{M(M \mp a)}$$

Granica između stabilnih i nestabilnih orbita naziva se najstabilnija unutarnja orbita i računa se kao[2]:

$$r_{isco} = M\left\{3 + Z_2 \mp \sqrt{[(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]}\right\} \quad (21)$$

$$Z_1 = 1 + \sqrt[3]{\left(1 - \left(\frac{a}{M}\right)^2\right)}\left[\sqrt[3]{1 + \frac{a}{M}} + \sqrt[3]{1 - \frac{a}{M}}\right]$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{3a^2}{M^2} + {Z_1}^2}$$

Ukoliko postavimo brzinu bijega na brzinu zvuka, tada možemo izračunati Bondijev polumjer:

$$r_{Bondi} = \frac{2GM}{{c_s}^2}$$

Brzina zvuka ovdje je c_s, a sam Bondijev polumjer predstavlja razliku između supersoničnog i subsoničnog upada čestica prema izvoru gravitacije.

3.2. Eddingtonova luminoznost. Eddingtonov akrecijski prirast

Gotovo svaka crna rupa (ili neutronska zvijezda) oko sebe ima akrecijski disk. Upadanje plina i kozmičke prašine prema nekom gravitirajućem sustavu naziva se akrecija. Godine 1926. Arthur Eddington postavio je teorijski račun brzine kojom objekt oko sebe nakuplja materiju, uzimajući pritom u obzir gravitacijsko fokusiranje. Ukoliko čestice upadaju na negravitirajuću sferu, akrecija je određena površinom sfere, brzinom i gustoćom čestica. No, gravitacija ima efekt fokusiranja trajektorija čestica prema izvoru gravitacije. Iz tog razloga akrecija je jača što izvor gravitacije ima veću masu.

Pretpostavljamo da je materija koja se nakuplja oko crne rupe uglavnom ionizirani vodik. U tim uvjetima zračenje djeluje silom na slobodne elektrone putem Thomsonovog raspršenja. Ukoliko je S tok zračenja energije, a $\sigma_T = 6.7 \cdot 10^{-29}\mathrm{m}^2$ Thomsonov presjek, tada je sila koja djeluje na svaki elektron prema van jednaka brzini promjene količine gibanja,$\sigma_T S/c$. Elektrostatska sila između protona i elektrona znači da, kada se elektroni gibaju prema van, za sobom povlače protone i na taj način nastaju elektron-proton parovi. Zračenje zatim gura van parove elektron-proton, protivno gravitacijskoj sili $GM_\odot(m_p + m_e)/r^2 \cong GM_\odot m_p/r^2$ (možemo zanemariti masu elektrona u odnosu na masu protona) koja djeluje na udaljenosti r od centra gravitacije. Ukoliko je luminoznost L tada je tok energije $S = L/4\pi r^2$. U tom slučaju ukupna sila (gravitacijska, privlačna) na par elektron-proton je[2]:

$$G_{uk} = \left(GM_\odot m_p - \frac{L\sigma_T}{4\pi c}\right)\frac{1}{r^2} \quad (22)$$

Postoji granica za slučaj kada izraz (22) iščezava:

$$GM_\odot m_p - \frac{L\sigma_T}{4\pi c} = 0$$

$$L_{edd} = \frac{GM_\odot m_p 4\pi c}{\sigma_T}$$

Izraz L_{edd} naziva se Eddingotonva granica[2], a to je maksimalna luminoznost koju neko tijelo može postići kada su gravitacijska potencijalna i sila nuklearnih reakcija u ravnoteži. Još se naziva i Eddingtonova luminoznost.

Eddingtonova granica pretpostavlja stalan dotok materije, odnosno stalnu akreciju (prirast). Ako sva upadna materija pretvara svu svoju kinetičku energiju u radijaciju na površini objekta, luminoznost prirasta je:

$$L_{acc} = \frac{GM_\odot \dot{M}}{r_s} \quad (23)$$

Vrijednost $\dot{M}$ je masa prirasle materije, a r_s je polumjer sfere (polumjer objekta). U slučaju crne rupe, polumjer crne rupe ne odnosi se na čvrstu površinu već samo na površinu na koju materija može pasti i s koje ne može „pobjeći“. U tom slučaju velika količina energije prirasta može biti izgubljena u crnoj rupi i jednostavno biti dodana masi crne rupe. U tom slučaju uvodi se bezdimenzijski parametar iskoristivosti η[6]:

$$L_{acc} = \frac{2\eta G M_{\odot} \dot{M_{edd}}}{r_s} \quad (24)$$

Ako za polumjer uzmemo vrijednost $2GM_{\odot}/c^2$ tada izraz (24) prelazi u:

$$L_{acc} = \eta \dot{M}_{edd} c^2 \quad (25)$$

3.3. Efektivna luminoznost

Eddingotonova luminoznost teorijska je vrijednost i ona se može razlikovati od stvarne vrijednosti. Kako luminoznost ovisi o akrecijskom prirastu, postoji omjer koji se naziva Eddingtonov omjer, a to je omjer stvarnog i teorijskog prirasta[2]:

$$\lambda = \frac{\dot{M}}{\dot{M_{edd}}} \quad (26)$$

Pomnožimo li izraze (25) i (26) dobivamo izraz za efektivnu luminoznost:

$$L_{acc} = \eta \lambda \dot{M}_{edd} c^2 \quad (27)$$

3.4. Hawkingova temperatura. Vrijeme isparavanja

Stephen Hawking (1974., 1975.) pokazao je nestabilnost vakuuma u prisutnosti crne rupe. Pokazao je da crna rupa stvara i emitira čestice, odnosno zrači kao crno tijelo zagrijano na temperaturu T_H. Ta temperatura još se naziva i Hawkingova temperatura, a računa se kao[2][5]:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c k_B}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} - reducirana\ Planckova\ konstanta$$

$$h = 6.626 \cdot 10^{-27}\mathrm{Js} - Planckova\ konstanta$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\mathrm{m^2\,kg\,s^{-2}K^{-1}} - Boltzmannova\ konstanta$$

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM} - površinska\ gravitacija\ za\ Schwarzschildovu\ crnu\ rupu$$

Kod Hawkingovog efekta jedna čestica stvorena je ispod horizonta događaja i ima negativnu energiju, dok je druga čestica stvorena izvan horizonta događaja i ima pozitivnu energiju. Iz tog razloga Hawkingovo zračenje odnosi dio energije crne rupe i masa crne rupe se smanjuje. Taj proces naziva se isparavanje crne rupe.

Kako smo već ranije spomenuli, crna rupa zrači kao crno tijelo temperature T_H i površine $A = 4\pi {r_g}^2$. Gubitak mase je reda veličine $M \sim \sigma {T_H}^4 A$. Veličina σ naziva se Stefan-Boltzmannova konstanta $(\sigma = \pi^2 {k_B}^4/(60\hbar^3 c^2))$. Promjena mase u vremenu je $\frac{dM}{dt}$ te je tada vrijeme isparavanja crne rupe[2][5]:

$$\tau_{BH} \sim \frac{5120\pi G^2}{\hbar c^4}$$

4. KOD I SUČELJE APLIKACIJE

```
import tkinter as tk
import numpy as np
import math
from tkinter import messagebox
from  tkinter import ttk
from sympy import latex
from matplotlib.backends.backend_tkagg import FigureCanvasTkAgg
import matplotlib.pyplot as plt
from PIL import Image, ImageTk
import matplotlib.transforms as transforms

import event_horizon
import angular_mom
import eddlum
import eddap
import bondi
import photonrad
import isco
import hawk_temp
import evap
import entropy
import surface
import eff_lum

G = 6.67 * pow(10, -11) #Gravitacijska konstanta
c = 3 * pow(10, 8) #Brzina svjetlosti
sigt = 6.652 * pow(10, -29) #Thomsonovo raspršenje (poprečni presjek)
mp = 1.67 * pow(10, -27) #Masa protona u kg
pi = math.pi
Msol = 1.989 * pow(10, 30) #Masa Sunca u kg
h = 6.626 * pow(10, -34) #Plankova konstanta
hp = h/(2 * pi) #Reducirana Plankova konstanta
kb = 1.38 * pow(10, -23) #Boltzmannova konstanta

```

```python
#kod za GUI

class MyGUI:

    def __init__(self):

        self.root = tk.Tk()

        self.root.geometry("800x600")
        self.root.resizable(True, False)
        self.root.title("Black Hole Calculator")

        def show_home():
            clear_frame()
            self.label = tk.Label(self.content_frame, text='Home', font = ('Times new roman', 18))
            self.label.pack(pady=20)

        def show_teorija():
            clear_frame()
            self.label = tk.Label(self.content_frame, text='Teorija', font = ('Times new roman', 18))
            self.label.pack(pady=20)

        def show_literatura():
            clear_frame()
            self.label = tk.Label(self.content_frame, text='Literatura', font = ('Times new roman', 18))
            self.label.pack(pady=20)
```

```python
def show_jednadzbe(*args):
            clear_frame()
            self.canvas = tk.Canvas(self.content_frame)
            self.scrollbar = ttk.Scrollbar(self.content_frame, orient='vertical', command= self.canvas.yview)
            self.scrollbar.pack(side=tk.RIGHT, fill=tk.Y)
            self.canvas.configure(yscrollcommand=self.scrollbar.set)
            self.canvas.bind('<Configure>', lambda e: self.canvas.configure(scrollregion = self.canvas.bbox('all')))
            self.canvas.pack(fill=tk.BOTH, expand=1)
            self.in_frame = tk.Frame(self.canvas)
            self.canvas.create_window((0, 0), window=self.in_frame)
            scrollable_frame = ttk.Frame(self.canvas)

            self.jedn_img = Image.open('jednadzbe.png')

            self.jedn_img = self.jedn_img.resize((800, 1300))
            self.jedn_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.jedn_img)


            self.jedn_slika = tk.Label(self.in_frame, image=self.jedn_img_tk)
            self.jedn_slika.pack(fill=tk.BOTH, expand=True)

```

```python
def show_kalkulator(*args):
            clear_frame()
            self.canvas = tk.Canvas(self.content_frame)
            self.scrollbar = ttk.Scrollbar(self.content_frame, orient='vertical', command= self.canvas.yview)
            self.scrollbar.pack(side=tk.RIGHT, fill=tk.Y)
            self.canvas.configure(yscrollcommand=self.scrollbar.set)
            self.canvas.bind('<Configure>', lambda e: self.canvas.configure(scrollregion = self.canvas.bbox('all')))
            self.canvas.pack(fill=tk.BOTH, expand=1)
            self.in_frame = tk.Frame(self.canvas)
            self.canvas.create_window((0, 0), window=self.in_frame, anchor="nw")
            scrollable_frame = ttk.Frame(self.canvas)

            self.label = tk.Label(self.in_frame, text='Kalkulator', font=('Times New Roman', 18))
            self.label.pack(pady=20)

            self.unos_mase = tk.Label(self.in_frame, text='Unesite masu crne rupe (pripazite da unosite masu u kilogramima):', font=('Times New Roman', 12))
            self.unos_mase.pack(pady=10)
            self.masa = tk.Entry(self.in_frame, font=('Times New Roman', 12))
            self.masa.pack(pady=10)

            self.unos_spina = tk.Label(self.in_frame, text='Unesite spin crne rupe (pripazite da unosite vrijednosti između 0 i 1):', font=('Times New Roman', 12))
            self.unos_spina.pack(pady=10)
            self.spin = tk.Entry(self.in_frame, font=('Times New Roman', 12))
            self.spin.pack(pady=10)

            self.efikasnost = tk.Label(self.in_frame, text='Unesite iznos radijacijske efikasnosti (obično se uzima vrijednost 0.1)', font=('Times new roman', 12), state=tk.DISABLED)
            self.efikasnost.pack(pady=10)
            self.efikasnost_unos = tk.Entry(self.in_frame, font=('Times New Roman', 12), state=tk.DISABLED)
            self.efikasnost_unos.pack(pady=10)

            self.omjer = tk.Label(self.in_frame, text='Unesite iznos Eddingtonovog omjera', font=('Times new roman', 12), state=tk.DISABLED)
            self.omjer.pack(pady=10)
            self.omjer_unos = tk.Entry(self.in_frame, font=('Times new roman', 12), state=tk.DISABLED)
            self.omjer_unos.pack(pady=10)

            self.izracunaj_button = tk.Button(self.in_frame, text='Izračunaj', font=('Times New Roman', 12), command=kg_napredno)
            self.izracunaj_button.pack(pady=10)

            self.switch_unos = tk.Button(self.in_frame, text='Promijeni način unosa mase (mijenjate između mase u kilogramima i masa izražena u obliku solarne mase).', font=('Times new roman', 12), command = toggle_unos)
            self.switch_unos.pack(padx=10, pady=10)

            self.napredno = tk.Button(self.in_frame, text='Napredni unos (efikasnost zračenja)', font=('Times new roman', 12), command=toggle_napredno)
            self.napredno.pack(padx=10, pady=10)

            self.eff_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.eff_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.ap_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.ap_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.acc_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.acc_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.a2_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.a2_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.a1_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.a1_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.ent_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.ent_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.etime_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.etime_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.hawkt_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.hawkt_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.bondi_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.bondi_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.isco5_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.isco5_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.isco4_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.isco4_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.isco3_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.isco3_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.isco2_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.isco2_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.isco1_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.isco1_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.eddl_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.eddl_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.ang_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.ang_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.kerr_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.kerr_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.sch_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.sch_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

            self.masa_slika = tk.Label(self.in_frame)
            self.masa_slika.pack(pady=10, side=tk.BOTTOM)

```

```python
def slike(broj, tekst, ime_datoteke='jednadzba.png'):
            plt.figure(figsize=(8, 2))
            broj_size = plt.text(0.1, 0.5, f"${broj}$", fontsize=18, ha='center', va='center')
            plt.gca().set_xlim(0, 1)
            plt.gca().set_ylim(0, 1)

            renderer = plt.gcf().canvas.get_renderer()
            bbox = broj_size.get_window_extent(renderer=renderer)
            bbox_data_coords = bbox.transformed(plt.gca().transData.inverted())

            text_width = bbox_data_coords.width

            plt.text(0.1 + text_width, 0.5, tekst, fontsize=18, ha='left', va='center')

            plt.axis('off')
            plt.savefig(ime_datoteke, bbox_inches='tight', pad_inches=0.1, transparent=True)
            plt.close()

        def format_broja(broj):
            if broj==0:
                return 0

            exponent = math.floor(math.log10(abs(broj)))
            mantissa = broj / pow(10, exponent)
            notacija = f"{mantissa:.2f} \\times 10^{{{exponent}}}"
            return notacija
```

```python
def toggle_unos():
            trenutni_unos = self.unos_mase.cget('text')
            if trenutni_unos == 'Unesite masu crne rupe (pripazite da unosite masu u kilogramima):':
                self.unos_mase.config(text = 'Unesite masu kao cjelobrojni višekratnik mase Sunca:')
                self.izracunaj_button.config(command = sol_napredno)
            else:
                self.unos_mase.config(text = 'Unesite masu crne rupe (pripazite da unosite masu u kilogramima):')
                self.izracunaj_button.config(command = kg_napredno)

        def toggle_napredno():
            unos_napredno = self.napredno.cget('text')
            if unos_napredno == 'Napredni unos (efikasnost zračenja)':
                self.napredno.config(text = 'Osnovni unos')
                self.efikasnost['state'] = tk.NORMAL
                self.efikasnost_unos['state'] = tk.NORMAL
                self.omjer['state'] = tk.NORMAL
                self.omjer_unos['state'] = tk.NORMAL
            else:
                self.napredno.config(text='Napredni unos (efikasnost zračenja)')
                self.efikasnost['state'] = tk.DISABLED
                self.efikasnost_unos['state'] = tk.DISABLED
                self.omjer['state'] = tk.DISABLED
                self.omjer_unos['state'] = tk.DISABLED
```

```python
def unos_kilogrami():
            try:
                M = float(self.masa.get())
                a = float(self.spin.get())
                if M >= 0 and (0 <= a <= 1):
                    Mex = format_broja(M)
                    slike(Mex, 'kg - masa crne rupe', 'masa.png')
                    slike(a, '- spin crne rupe', 'spin.png')
                    Rs1, Rs2 = event_horizon.evhor(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Rs1ex = format_broja(Rs1)
                    Rs2ex = format_broja(Rs2)
                    slike(Rs1ex, 'm - Schwarzschildov radijus', 'sch.png')
                    slike(Rs2ex, 'm - Kerrov radijus', 'kerr.png')
                    J = angular_mom.angmom(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Jex = format_broja(J)
                    slike(Jex, 'kg×m²/s - kutna količina gibanja', 'ang.png')
                    Ledd = eddlum.eddlum(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Leddex = format_broja(Ledd)
                    slike(Leddex, 'W - Eddingtonova luminoznost', 'eddl.png')
                    Rsch, Riscop, Riscor, Rphotonp, Rphotonr = isco.ISCO(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Rschex = format_broja(Rsch)
                    slike(Rschex, 'm - ISCO za Schwarzschildovu crnu rupu', 'isco1.png')
                    Riscopex = format_broja(Riscop)
                    slike(Riscopex, 'm - ISCO za Kerrovu crnu rupu (progradno gibanje)', 'isco2.png')
                    Riscorex = format_broja(Riscor)
                    slike(Riscorex, 'm - ISCO za Keerovu crnu rupu (retrogradno gibanje)', 'isco3.png')
                    Rphotonpex = format_broja(Rphotonp)
                    slike(Rphotonpex, 'm - radijus fotonske sfere (progradno gibanje)', 'isco4.png')
                    Rphotonrex = format_broja(Rphotonr)
                    slike(Rphotonrex, 'm - radijus fotonske sfere (retrogradno gibanje)', 'isco5.png')
                    Rbondi = bondi.bondi(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Rbondiex = format_broja(Rbondi)
                    slike(Rbondiex, 'm - Bondijev radijus', 'bondi.png')
                    Th = hawk_temp.temp(G, c, M, a, mp, pi, sigt, hp, kb)
                    Thex = format_broja(Th)
                    slike(Thex, 'K - Hawkingova temperatura', 'hawkt.png')
                    tbh = evap.evap_t(G, c, M, a, mp, pi, sigt, hp, kb)
                    tbhex = format_broja(tbh)
                    slike(tbhex, 's - vrijeme isparavanja (iščezavanja)', 'etime.png')
                    Sbh = entropy.entropy(G, c, M, a, mp, pi, sigt, hp)
                    Sbhex = format_broja(Sbh)
                    slike(Sbhex, 'entropija (bezdimenzionalna)', 'ent.png')
                    A1, A2, k = surface.surface(Rs1, Rs2, pi, M, G, c)
                    A1ex = format_broja(A1)
                    slike(A1ex, 'm² - površina Schwarzschildove crne rupe', 'a1.png')
                    A2ex = format_broja(A2)
                    slike(A2ex, 'm² - površina Kerrove crne rupe', 'a2.png')
                    kex = format_broja(k)
                    slike(kex, 'm/s² - površinska gravitacija (gravitacijsko ubrzanje)', 'acc.png')
                else:
                    if M < 0:
                        messagebox.showerror('Greška!', 'Masa crne rupe mora biti pozitivna')
                    if not (0 <= a <= 1):
                        messagebox.showerror('Greška!', 'Spin mora poprimati vrijednosti između 0 i 1.')
            except ValueError:
                messagebox.showerror('Greška!', 'Molimo unesite broj, a ne stringove')
```

```python
def unos_sol():
            try:
                M1 = float(self.masa.get())
                a = float(self.spin.get())
                M = M1 * Msol
                if M >= 0 and (0 <= a <= 1):
                    Mex = format_broja(M)
                    slike(Mex,'kg - masa crne rupe', 'masa.png')
                    slike(a, '- spin crne rupe', 'spin.png')
                    Rs1, Rs2 = event_horizon.evhor(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Rs1ex = format_broja(Rs1)
                    Rs2ex = format_broja(Rs2)
                    slike(Rs1ex, 'm - Schwarzschildov radijus', 'sch.png')
                    slike(Rs2ex, 'm - Kerrov radijus', 'kerr.png')
                    J = angular_mom.angmom(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Jex = format_broja(J)
                    slike(Jex, 'kgxm²/s - kutna količina gibanja', 'ang.png')
                    Ledd = eddlum.eddlum(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Leddex = format_broja(Ledd)
                    slike(Leddex, 'W - Eddingtonova luminoznost', 'eddl.png')
                    Rsch, Riscop, Riscor, Rphotonp, Rphotonr = isco.ISCO(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Rschex = format_broja(Rsch)
                    slike(Rschex, 'm - ISCO za Schwarzschildovu crnu rupu', 'isco1.png')
                    Riscopex = format_broja(Riscop)
                    slike(Riscopex, 'm - ISCO za Kerrovu crnu rupu (progradno gibanje)', 'isco2.png')
                    Riscorex = format_broja(Riscor)
                    slike(Riscorex, 'm - ISCO za Keerovu crnu rupu (retrogradno gibanje)', 'isco3.png')
                    Rphotonpex = format_broja(Rphotonp)
                    slike(Rphotonpex, 'm - radijus fotonske sfere (progradno gibanje)', 'isco4.png')
                    Rphotonrex = format_broja(Rphotonr)
                    slike(Rphotonrex, 'm - radijus fotonske sfere (retrogradno gibanje)', 'isco5.png')
                    Rbondi = bondi.bondi(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
                    Rbondiex = format_broja(Rbondi)
                    slike(Rbondiex, 'm - Bondijev radijus', 'bondi.png')
                    Th = hawk_temp.temp(G, c, M, a, mp, pi, sigt, hp, kb)
                    Thex = format_broja(Th)
                    slike(Thex, 'K - Hawkingova temperatura', 'hawkt.png')
                    tbh = evap.evap_t(G, c, M, a, mp, pi, sigt, hp, kb)
                    tbhex = format_broja(tbh)
                    slike(tbhex, 's - vrijeme isparavanja (iščezavanja)', 'etime.png')
                    Sbh = entropy.entropy(G, c, M, a, mp, pi, sigt, hp)
                    Sbhex = format_broja(Sbh)
                    slike(Sbhex, 'entropija (bezdimenzionalna)', 'ent.png')
                    A1, A2, k = surface.surface(Rs1, Rs2, pi, M, G, c)
                    A1ex = format_broja(A1)
                    slike(A1ex, 'm² - površina Schwarzschildove crne rupe', 'a1.png')
                    A2ex = format_broja(A2)
                    slike(A2ex, 'm² - površina Kerrove crne rupe', 'a2.png')
                    kex = format_broja(k)
                    slike(kex, 'm/s² - površinska gravitacija (gravitacijsko ubrzanje)', 'acc.png')
                else:
                    if M < 0:
                        messagebox.showerror('Greška!', 'Masa crne rupe mora biti pozitivna')
                    if not (0 <= a <= 1):
                        messagebox.showerror('Greška!', 'Spin mora poprimati vrijednosti između 0 i 1.')
            except ValueError:
                messagebox.showerror('Greška!', 'Molimo unesite broj, a ne stringove')
```

```python
def napredno_izracun():
            if self.efikasnost['state'] == tk.NORMAL:
                try:
                    M = float(self.masa.get())
                    a = float(self.spin.get())
                    radef = float(self.efikasnost_unos.get())
                    lam = float(self.omjer_unos.get()) #omjer stvarne prirasti i Eddingotonove prirasti (akrecije)
                    if M >= 0 and (0 <= a <= 1) and radef > 0 and 0 <= lam:
                        Medd = eddap.eddap(G, c, M, a, mp, pi, sigt, radef)
                        Meddex = format_broja(Medd)
                        slike(Meddex, 'kg/s - akrecijski prirast', 'ap.png')
                        Leff = eff_lum.eff_lum(radef, lam, Medd, c)
                        Leffex = format_broja(Leff)
                        slike(Leffex, 'W - efektivna luminoznost', 'eff.png')
                        self.ap_img = Image.open('ap.png')
                        self.eff_img = Image.open('eff.png')
                        self.ap_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.ap_img)
                        self.eff_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.eff_img)
                        self.ap_slika.config(image=self.ap_img_tk)
                        self.eff_slika.config(image=self.eff_img_tk)

                    else:
                        if M < 0:
                            messagebox.showerror('Greška!', 'Masa crne rupe mora biti pozitivna')
                        if not (0 <= a <= 1):
                            messagebox.showerror('Greška!', 'Spin mora poprimati vrijednosti između 0 i 1.')
                        if radef < 0 and lam < 0:
                            messagebox.showerror('Greška!', 'Unijeli ste negativnu vrijednost za efikasnost i Eddingtonov omjer.')
                except ValueError:
                    messagebox.showerror('Greška!', 'Molimo unesite broj, a ne stringove')
```

```python
def slike_create():
            self.masa_img = Image.open('masa.png')
            self.spin_img = Image.open('spin.png')
            self.sch_img = Image.open('sch.png')
            self.kerr_img = Image.open('kerr.png')
            self.ang_img = Image.open('ang.png')
            self.eddl_img = Image.open('eddl.png')
            self.isco1_img = Image.open('isco1.png')
            self.isco2_img = Image.open('isco2.png')
            self.isco3_img = Image.open('isco3.png')
            self.isco4_img = Image.open('isco4.png')
            self.isco5_img = Image.open('isco5.png')
            self.bondi_img = Image.open('bondi.png')
            self.hawkt_img = Image.open('hawkt.png')
            self.etime_img = Image.open('etime.png')
            self.ent_img = Image.open('ent.png')
            self.a1_img = Image.open('a1.png')
            self.a2_img = Image.open('a2.png')
            self.acc_img = Image.open('acc.png')

            #Pretvara slike u tkinter format
            self.masa_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.masa_img)
            self.spin_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.spin_img)
            self.sch_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.sch_img)
            self.kerr_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.kerr_img)
            self.ang_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.ang_img)
            self.eddl_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.eddl_img)
            self.isco1_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.isco1_img)
            self.isco2_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.isco2_img)
            self.isco3_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.isco3_img)
            self.isco4_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.isco4_img)
            self.isco5_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.isco5_img)
            self.bondi_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.bondi_img)
            self.hawkt_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.hawkt_img)
            self.etime_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.etime_img)
            self.ent_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.ent_img)
            self.a1_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.a1_img)
            self.a2_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.a2_img)
            self.acc_img_tk = ImageTk.PhotoImage(self.acc_img)

            self.masa_slika.config(image=self.masa_img_tk)
            self.sch_slika.config(image=self.sch_img_tk)
            self.kerr_slika.config(image=self.kerr_img_tk)
            self.ang_slika.config(image=self.ang_img_tk)
            self.eddl_slika.config(image=self.eddl_img_tk)
            self.isco1_slika.config(image=self.isco1_img_tk)
            self.isco2_slika.config(image=self.isco2_img_tk)
            self.isco3_slika.config(image=self.isco3_img_tk)
            self.isco4_slika.config(image=self.isco4_img_tk)
            self.isco5_slika.config(image=self.isco5_img_tk)
            self.bondi_slika.config(image=self.bondi_img_tk)
            self.hawkt_slika.config(image=self.hawkt_img_tk)
            self.etime_slika.config(image=self.etime_img_tk)
            self.ent_slika.config(image=self.ent_img_tk)
            self.a1_slika.config(image=self.a1_img_tk)
            self.a2_slika.config(image=self.a2_img_tk)
            self.acc_slika.config(image=self.acc_img_tk)
```

```
def kg_napredno():
            unos_kilogrami()
            napredno_izracun()
            slike_create()
            self.root.geometry("800x601")

        def sol_napredno():
            unos_sol()
            napredno_izracun()
            slike_create()
            self.root.geometry("800x601")

        def clear_frame():
            for widget in self.content_frame.winfo_children():
                widget.destroy()
```

```
self.buttonframe = tk.Frame(self.root)
        self.buttonframe.columnconfigure(0, weight = 1)
        self.buttonframe.columnconfigure(1, weight = 1)
        self.buttonframe.columnconfigure(2, weight = 1)
        self.buttonframe.columnconfigure(3, weight = 1)
        self.buttonframe.columnconfigure(4, weight = 1)

        self.home = tk.Button(self.buttonframe, text = 'Home', font=('Times new roman', 12), command = show_home)
        self.home.grid(row=0, column=0, sticky=tk.W + tk.E)
        self.teorija = tk.Button(self.buttonframe, text = 'Teorija', font=('Times new roman', 12), command = show_teorija)
        self.teorija.grid(row=0, column=1, sticky=tk.W+tk.E)
        self.literatura = tk.Button(self.buttonframe, text = 'Literatura', font=('Times new roman', 12), command = show_literatura)
        self.literatura.grid(row=0, column=2, sticky=tk.W+tk.E)
        self.formule = tk.Button(self.buttonframe, text = 'Jednadžbe', font=('Times new roman', 12), command = show_jednadzbe)
        self.formule.grid(row=0, column=3, sticky=tk.W+tk.E)
        self.kalkulator = tk.Button(self.buttonframe, text = 'Kalkulator', font=('Times new roman', 12), command = show_kalkulator)
        self.kalkulator.grid(row=0, column=4, sticky=tk.W+tk.E)

        self.buttonframe.pack(fill='x')

        self.content_frame = tk.Frame(self.root)
        self.content_frame.pack(fill=tk.BOTH, expand=True)

        self.root.mainloop()
```

```python
def izracun(M, a):
            #Poziv funkcija za izračun
            event_horizon.evhor(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
            angular_mom.angmom(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
            eddlum.eddlum(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
            eddap.eddap(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
            bondi.bondi(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
            photonrad.photonrad(G, c, M, a, mp, pi, sigt)
            isco.ISCO(G, c, M, a, mp, pi, sigt)

MyGUI()
```

```python
import numpy as np
import math

def evhor(G, c, M, a, mp, pi, sigt):

    Rs1 = 2 * G * M/pow(c, 2)
    Rs2 = G * M * (1 + np.sqrt(1 - pow(a, 2)))/pow(c, 2)
    return Rs1, Rs2
```

```python
import numpy as np
import math

def angmom(G, c, M, a, mp, pi, sigt):

    J = a * G * pow(M, 2)/c
    return J
```

```python
import numpy as np
import math

def bondi(G, c, M, a, mp, pi, sigt):

    v = 10000 #brzina zvuka u m/s (10 km/s)

    Rbondi = 2 * G * M/pow(v, 2)
    return Rbondi
```

```python
#ISCO i foton radijus

import math

def ISCO(G, c, M, a, mp, pi, sigt):

    Ms = G * M/pow(c, 2)

    Rsch = 6 * G * M/pow(c, 2) #Za Schwarzschildovu crnu rupu

    Z1 = 1 + pow((1 - pow(a, 2)), 1/3) * (pow((1 + a), 1/3) + pow((1 - a), 1/3))
    Z2 = pow((3 * pow(a, 2) + pow(Z1, 2)), 1/2)

    Riscop = Ms * (3 + Z2 - pow((3 - Z1) * (3 + Z1 + 2 * Z2), 1/2))
    Rphotonp = 2 * Ms * (1 + math.cos(2/3 * math.acos(-a))) #Kao argument trigonometrijske funkcije unosi se vrijednost u radijanima

    Riscor = Ms * (3 + Z2 + pow((3 - Z1) * (3 + Z1 + 2 * Z2), 1/2))
    Rphotonr = 2 * Ms * (1 + math.cos(2/3 * math.acos(a)))
    return Rsch, Riscop, Riscor, Rphotonp, Rphotonr
```

```python
import numpy as np
import math

def eddlum(G, c, M, a, mp, pi, sigt):

    Ledd = 4 * pi * G * M * mp * c/(sigt)
    return Ledd
```

```python
import numpy as np
import math

def eddap(G, c, M, a, mp, pi, sigt, radef):

    Ledd = 4 * pi * G * M * mp * c/(sigt)
    Medd = Ledd/(radef * pow(c, 2))
    return Medd
```

```python
import math

def eff_lum(radef, lam, Medd, c):
    Leff = radef * lam * Medd * pow(c, 2)
    return Leff
```

```python
import math

def temp(G, c, M, a, mp, pi, sigt, hp, kb):
    if M==0:
        return 0

    Th = hp * pow(c, 3)/(8 * pi * G * M * kb)
    return Th
```

```python
import math

def evap_t(G, c, M, a, mp, pi, sigt, hp, kb):

    tbh = 5120 * pi * pow(G, 2) * M/(hp * pow(c, 4))
    return tbh
```

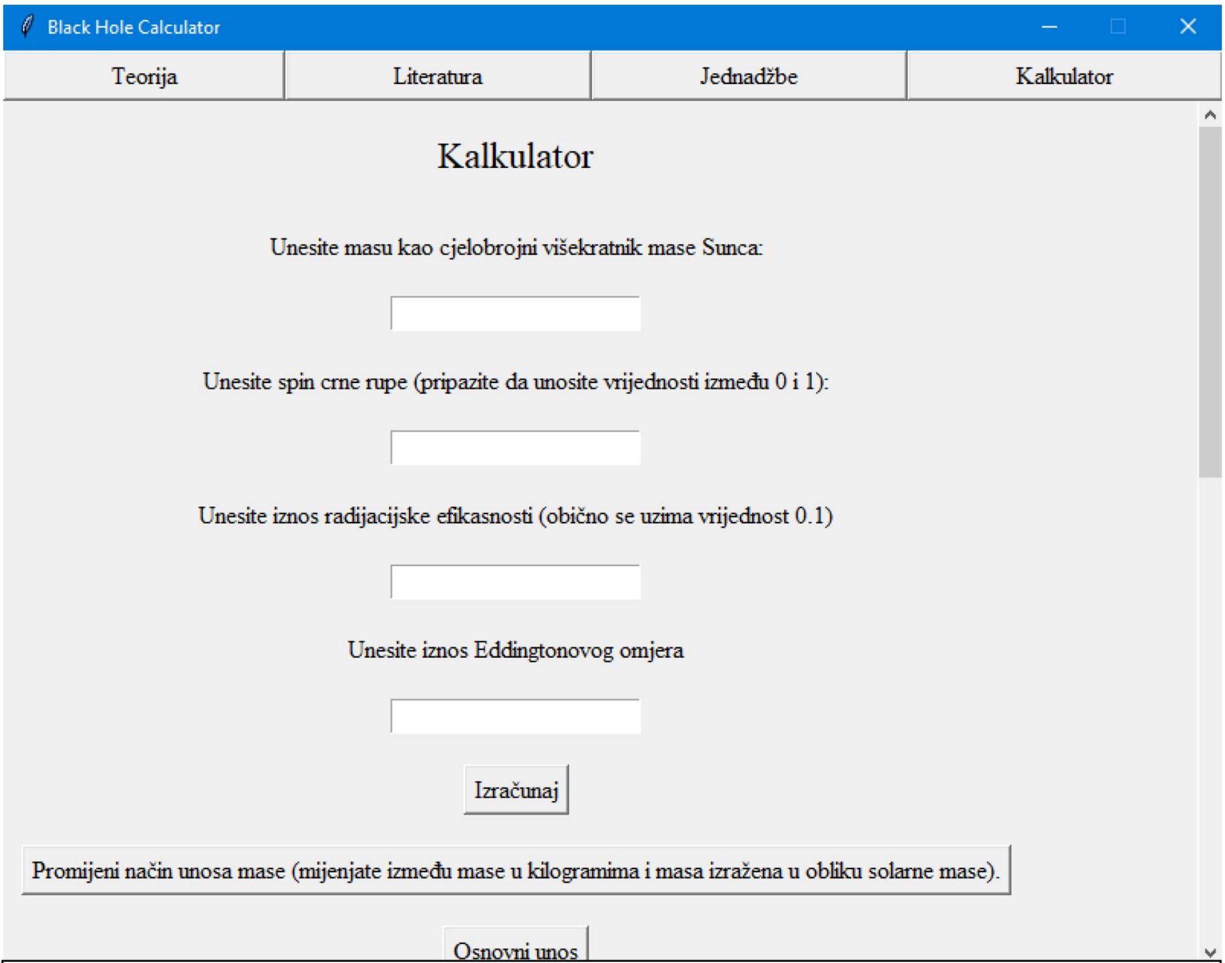
```
import math

def surface(Rs1, Rs2, pi, M, G, c):
    if M==0:
        return 0, 0, 0

    A1 = 4 * pi * pow(Rs1, 2)
    A2 = 4 * pi * pow(Rs2, 2)
    k = pow(c, 4)/(4 * M * G)
    return A1, A2, k
```

```
import math

def entropy(G, c, M, a, mp, pi, sigt, hp):

    Sbh = 4 * pi * G * M/(c * hp)
    return Sbh
```

4.1. Sučelje aplikacije

Najvažniji dio aplikacije je kalkulator unutar aplikacije. Kalkulator koristi jednadžbe ispisane u potprozoru jednadžbe. Korisnik ima izbor dvije vrste unosa: jednostavni i napredni. Kod jednostavnog unosa korisnik unosi iznose samo mase i spina. U tom slučaju računaju se vrijednosti Schwarzschildovog i Kerrovog polumjera, kutna količina gibanja, Eddingtonova luminoznost, polumjer najstabilnije unutarnje orbite, polumjer fotonske sfere, Hawkingovu temperaturu, vrijeme isparavanja crne rupe, Bondijev polumjer, entropiju crne rupe, površinu crne rupe te površinsku gravitaciju. Također, korisnik ima izbor unositi masu crne rupe kao cjelobrojni višekratnik mase Sunca (tako se najčešće izražavaju mase astronomskih objekata) ili izravno masu objekta. Pri naprednom unos korisnik unosi i iznos radijacijske efikasnosti[2] te Eddingtonov omjer[2]. U tom slučaju dodatno se još računaju akrecijski prirast te efektivna luminoznost.

Slika 5. Ova slici prikazuje izgled prozora kalkulator kada se radi o jednostavnom unosu. Polja radijacijske efikasnosti i Eddingonovog omjera su zasivljena.



Slika 6. Klikom na tipku napredni unos, aplikacija sada od korisnika očekuje koeficijent radijacijske efikasnosti te Eddingtonov omjer.

Pod prozorom literatura nalazi se popis literature korištene prilikom izrade aplikacije i rada. Pod prozorom teorija nalazi se poveznica na internet stranicu rada.

5. Zaključak

Kako smo mogli vidjeti iz rada masa i spin crne rupe igraju veliku ulogu u njihovom nastanku. Možemo izračunati dovoljno parametara crne rupe da imamo određena saznanja o njezinom ponašanju. No, kako smo mogli i pročitati u radu, najviše saznanja o crnim rupama odnosi se na fizikalne pojave s vanjske strane horizonta događaja. Iako je unutrašnjost crnih rupa velika enigma, to ne znači da ništa o unutrašnjosti crnih rupa nije poznato. Kako smo mogli vidjeti Roger Penrose dao ja matematičku potvrdu postojanja singularonosti u središtu crnih rupa. Također, Stephen Hawking je 1976. dao jedan novi uvid, otkrivši da crne rupe zrače kao crno tijelo (u blizini horizonta događaja) te na taj način gube masu. Stephen Hawking je pokazao da će, nakon dovoljno dugo vremena, crna rupa izračiti toliko energije da će u konačnici nestati (uz pretpostavku da nema dotoka nove mase). Crne rupe ostaju veliko i bitno područje istraživanja opažačke i teorijske astronomije.

REFERENCE

[1] Mitchell Begelman, Martin Reese, *Gravity's fatal attraction, Black holes in the universe, Third edition,* Cambridge University Press, 2020.

[2] Valeri P. Frolov, Igor D. Novikov, *Black hole physics, Basic concepts and new developments,* Kluwer academic publishers, 1997.

[3] Bernard Schutz, *A first course in general relativity, Second edition,* Cambridge University Press, 2009.

[4] Richard Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, *Feynman lectures on physics, Second edition,* Addison-Wesley, 2005.

[5] Stephen W. Hawking, *Particle creation by Black holes,* Springer-Verlag, 1975.

[6] Juhan Frank, Andrew King, Derek Raine, *Accretion power in astrophysics, Second edition,* Cambridge University Press, 2002.

[7] John Michell, *On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other dana should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose,* 27. studeni 1783.

[8] Event Horizon Telescope., Astronomers reveal first image of the black hole at the heart of our galaxy. *Event Horizon Telescope*. 12. svibnja 2022. **https://eventhorizontelescope.org/blog/astronomers-reveal-first-image-black-hole-heart-our-galaxy**

[9] NASA, First image of a black hole, *NASA Science*, 10. travnja 2019. **https://science.nasa.gov/resource/first-image-of-a-black-hole/**

[10] Nobelova nagrada , Theoretical foundation for black holes and the supermassive compact object at the galactic centre, *Nobel Prize in Physics 2020.*

ŽIVOTOPIS

Mario Kirhofer rođen je 3. rujna 1991. godine. Pohađao je OŠ „Grigor Vitez“ u Osijeku od 1998. do 2006. godine. Upisuje III. Gimnaziju u Osijeku 2006. i završava 2010. godine. Iste godine upisuje preddiplomski studij fizike, na Sveučilištu Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, te studij završava 2020. godine. Iste te godine upisuje diplomski studij fizike i informatike, nastavnički smjer.