Razlika između matematike i fizike na primjeru padajućih ljestvi

Alešković, Marina

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

MARINA ALEŠKOVIĆ

RAZLIKA IZMEĐU MATEMATIKE I FIZIKE NA PRIMJERU PADAJUĆIH LJESTVI

Završni rad

Osijek, 2017.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

MARINA ALEŠKOVIĆ

RAZLIKA IZMEĐU MATEMATIKE I FIZIKE NA PRIMJERU PADAJUĆIH LJESTVI

Završni rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

radi stjecanja zvanja prvostupnice fizike

Osijek, 2017.

“ Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom doc. dr. sc. Darija Hrupeca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. „

SADRŽAJ

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku Završni rad

Odjel za fiziku

RAZLIKA IZMEĐU MATEMATIKE I FIZIKE NA PRIMJERU PADAJUĆIH LJESTVI

MARINA ALEŠKOVIĆ

SAŽETAK

Padajuće ljestve su dobar primjer kojim se može pokazati ključna razlika između matematike i fizike. Jednostavan i naizgled prihvatljiv matematički model daje predviđanje koje se očito ne slaže s iskustvom: brzina vrha padajućih ljestvi teži u beskonačno kad kut koji ljestve zatvaraju s podom teži u nulu. U matematičkom je svijetu takvo ponašanje sasvim legitimno. No takav model očito ne opisuje dobro fizički svjet - svijet u kojem živimo. Za opis fizičkog svijeta model treba nadograditi. Drugim riječima, treba u obzir uzeti neka ograničenja koja nameće fizika. Zbog tih ograničenja jednadžbe obično postaju zamršenije pa ih je teže riješiti, no predviđanja modela bolje se slažu s opažanjima.

U ovom radu jednostavan matematički model padajućih ljestvi nadograđen je u dvije etape. U jednostavnijem slučaju uzeta je u obzir činjenica da ljestve imaju masu (zbog koje u gravitacijskom polju padaju), ali je ta masa stavljena u središte ljestvi. Korštena je, dakle, dinamika točkatog tijela. U realističnijem slučaju masa je jednoliko raspoređena po ljestvama. Tu je korištena dinamika krutog tijela. U oba je slučaja, radi jednostavnosti, trenje bilo zanemareno. Oba fizička modela, očekivano, daju konačnu brzinu vrha padajućih ljestvi kad ljestve dođu u vodoravni položaj.

(24 stranice, 11 slika)

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: problem padajućih ljestvi / razlika između matematike i fizike / model

Mentor: doc. dr. sc. Dario Hrupec

Ocjenjivač: doc. dr. sc. Dario Hrupec

Rad prihvaćen:

University Josip Juraj Strossmayer Osijek
Department of Physics

Bachelor of Physics Thesis

THE DIFFERENCE BETWEEN MATHEMATICAL AND PHYSICAL VIEW ON THE FALLING LADDER PROBLEM

MARINA ALEŠKOVIĆ

Abstract

Falling ladders is a good example which can show the key difference between mathematics and physics. A simple and seemingly acceptable mathematical model gives prediction which obviously does not agree with experience: the speed at the top of the ladder tends to infinity when the angle between the ladder and the floor tends to zero. In the mathematical world such behavior is quite legitimately. But such model obviously does not describe good physical world – the world we live in. To describe the physical world, the model needs to be upgraded. In other words, it is necessary to take some restrictions imposed by physics. Because of that restrictions, equations usually become more complicated and it's more difficult to solve them. But that model predictions better get along with observations.

In this work, a simple mathematical model of falling ladders has been upgraded into two stages. In the easier case we took a fact that ladders have a mass (because they fall in the gravity field), but that mass is placed in the center of the ladder. So, the dynamics of the dot body has been used. In a more realistic case, the mass is uniformly deployed by ladders. Solid body dynamics has been used here. In both cases, for simplicity, friction was neglected. As expected, both physical models give the ultimate speed of the top of the ladder when the ladder comes to the horizontal position.

(24 pages, 11 figures)
Thesis deposited in Department od Physics library
Keywords: falling ladder problem / the difference between mathematics and physics / model
Supervisor: Dario Hrupec, Ph.D., Assistant professor
Thesis accepted:

UVOD

Padajuće ljestve su problem koji prvi pogled djeluje trivijalano, a uz površnu analizu djeluje kao paradoks. Tek detaljnija analiza otkriva skrivene detalje problema koje je nužno uzeti u obzir da bi se formulirao matematički opis stvarnih (fizičkih) ljestvi. Zato je problem izvrstan edukativni primjer iz kojeg se vidi kako se gradi matematički model koji na zadovoljavajući način opisuje fizičku stvarnost.

Statički slučaj ljestvi naslonjenih na zid relativno je jednostavan. Možemo izračunati točan iznos faktora trenja između ljestava i podloge da bi ljestve ostale u ravnoteži. Nešto složeniji problem je kada faktori trenja nisu zanemarivi, no i u ovom slučaju također možemo izračunati koliki faktor trenja mora biti između ljestava i podloge. Problem ljestava naslonjenih na zid ovisi i o kutu pod kojim su one nagnute. Izraz za iznos minimalnog kuta pod kojim ljestve moraju biti nagnute da bi bile u ravnoteži ovisi o faktoru trenja, kao što će biti prikazano u nastavku.

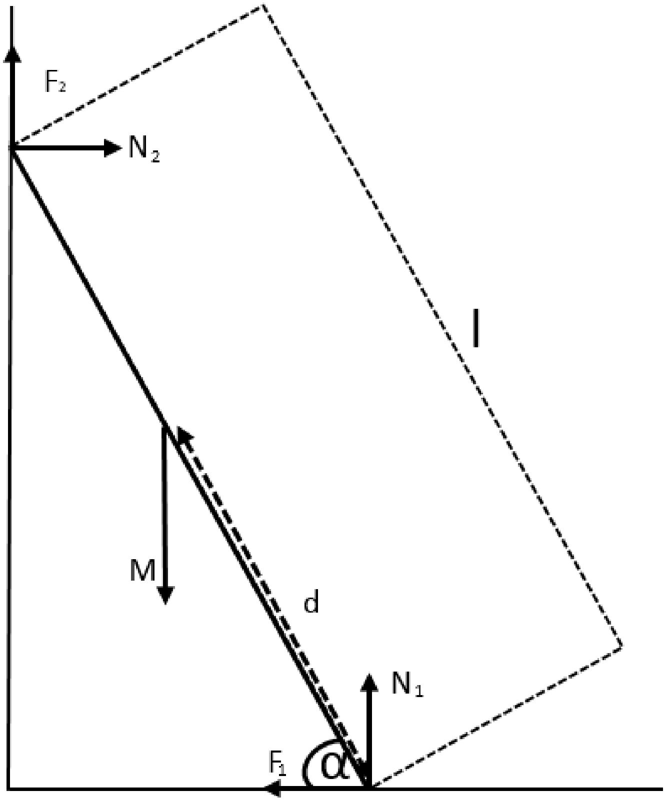
Ako u jednostavnom matematičkom modelu računamo brzinu vrha ljestava u trenutku udara o tlo, dobit ćemo beskonačno. U okviru same matematike taj rezultat nije neobičan. No ako želimo model koji opisuje stvarni svijet, onaj u kojem živimo, onda model od kojega smo krenuli nije zadovoljavajući. Moramo naći neka ograničenja odnosno poveznice varijabli koje proizlaze iz fizike. To su ograničenja koja nameće fizički svijet. U ovom ću radu izvesti izraze za faktor trenja i izraz za minimalni kut da bi ljestve bile u ravnoteži, te ću objasniti u čemu se to fizika i matematika razilaze kod shvaćanja problema padajućih ljestava.

LJESTVE NASLONJENE NA ZID

Problem padajućih ljestava je plodni izvor za rasprave u edukaciji fizike. Razni vidovi tog problema poslužili su, u udžbenicima i obrazovnim člancima, kao izvrsni primjeri za razumijevanje fizike i općenito za razumijevanje nastanka primjerenog matematičkog modela stvarnosti. Iako problem padajućih ljestava običnom čovjeku nije toliko zanimljiv, svaki student fizike je vrlo dobro upoznat sa problemom ljestava naslonjenih na zid. Ako uzmemo knjigu iz fizike koja se bavi statikom krutog tijela naići ćemo na puno problemskih zadataka koji se bave spomenutim problemom. Pogledajmo ovaj problem uz prepostavke da imamo savršeno kruto tijelo (ljestve) naslonjeno na zid pod određenim kutom i kojemu je faktor trenja između ljestava i tijela približno jednak faktoru trenja između ljestava i podloge (tla)[1].

[1] Y. Salu, *Revisiting the Ladder on a Wall Problem*, The Physics Teacher, **49**, 289-290 (2011)

FAKTOR TRENJA



Slika 1.: Ljestve naslonjene na zid

Ljestve duljine l naslonjene su na zid te s njim zatvaraju kut α. Težina M je težina ljestava i osobe koja se nalazi na njima, a ta je osoba udaljena za d od dna ljestava. Na ljestve djeluju dva para sila, a par sila predstavlja „više paralelnih sila ($\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_{2,\ldots,}\boldsymbol{F}_n$), čiji je vektorski zbroj jednak nuli,a mogu se zamjeniti dvjema paralelnim silama istog iznosa, a suprotnog smjera“. N_1 i N_2 su normalne komponente sile koje djeluju na zid i tlo. F_1 i F_2 su tangencijalne komponte sile koje djeluju na zid i tlo. Uvjeti koji moraju biti zadovoljeni da bi ljestve bile u ravnoteži su da zbroj svih sila mora iščezavati: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ i da zbroj svih momenata sile također mora iščezavati: $\sum \tau = 0$. Gdje F_x i F_y predstavljaju x-komponentu i y-komponetu sila koje djeluju na ljestve, a τ je zakretni moment tih sila. Prvi od zahtijeva je da je zbroj svih sila koje djeluju na ljestve jednak nuli, pa sljedeće jednadžbe vrijede:

$$N_2 - F_1 = 0 \qquad (1)$$

$$N_1 + F_2 - M = 0 \qquad (2)$$

Kod računanja momenta sile, kao točku oko koje se ljestve okreću uzimamo točku u kojoj one diraju podlogu na kojoj se nalaze. Ljestve se zakreću suprotno od smjera kazaljke na satu što ćemo u jednadžbu uvrstiti tako da momenti koji djeluju u smjeru kazaljke na satu imaju negativan predznak. Drugi je zahtijev da je zbroj svih momenata jednak nuli, tako da sljedeća jednadžba vrijedi:

$$-N_2 l \sin\alpha - F_2 l \cos\alpha + Md \cos\alpha = 0$$

podijelimo jednadžbu sa $l \cos\alpha,$ tada dobivamo:

$$-N_2 l \sin\alpha - F_2 l \cos\alpha + Md \cos\alpha = 0 \ / -l \cos\alpha$$

$$N_2 \tan\alpha + F_2 - M\frac{d}{l} = 0 \qquad (3)$$

Označmo s μ_1 faktor trenja što između ljestava i tla, a sa μ_2 faktor trenja između ljesatva i zida. Pretpostavljamo da sile trenja zadovoljavaju sljedeće nejednakosti:

$$F_1 \leq \mu_1 N_1 \qquad (4)$$

$$F_2 \leq \mu_2 N_2 \qquad (5)$$

SILU TRENJA IZMEĐU ZIDA I LJESTAVA ZANEMARUJEMO

Jednadžbe (1), (2) i (3) čine tri jednadžbe s četiri nepoznanice, što ne možemo jedinstveno riješiti. Da bismo bismo mogli naći jedinstveno rješenje, trebamo postaviti još jedan uvjet koji će dati četvrtu jednadžbu. Tada ćemo dobiti sustav od četiri jednadžbe sa četiri nepoznanice, što znamo jedinstveno riješiti. Uvijet koji dodajemo je da je $F_2 = 0$ to jest da nema sile trenja između zida i ljestava. Ta jednadžba nam ujedno predstavlja četvrtu jednadžbu za ovaj slučaj. Nakon dodavanja ovoga uvijeta odnosno nakon dodavanja četvrte jednadžbe iz druge jednadžbe jasno poizlazi da je $N_1 = M$, iz preostale dvije dobivamo da je: $N_2 = M \cdot \frac{d}{l \cos\alpha}$ (6) i da je $F_1 = M \cdot \frac{d}{l \tan\alpha}$ (7). Budući da je $F_2 = 0$ možemo zaključiti i da je $\mu_2 = 0,$ jer nema sile trenja između ljestava i zida. Nakon uvrštavanja jednadžbi (6) i (7) u jednadžbu (4) slijedi da faktor trenja između ljestava i poda mora biti:

$$\mu_1 \geq \frac{d}{l \tan\alpha} \quad (8).$$

NE ZANEMARUJEMO SILU TRENJA IZMEĐU ZIDA I LJESTAVA

Razmotrimo sada uvijet u kojemu će $F_2 \neq 0$. Iz jednadžbi (1), (2) i (3) dobivamo:

$$N_1 = M - F_2 \qquad (9)$$

$$N_2 = \frac{M \cdot \frac{d}{l} - F_2}{\tan\alpha} \qquad (10)$$

$$F_1 = \frac{M \cdot \frac{d}{l} - F_2}{\tan\alpha} \qquad (11).$$

Iz jednadžbi (5) i (10) za silu trenja između ljestava i podloge dobit ćemo sljedeći izraz:

$$F_2 \leq M \frac{d \cdot \mu_2}{\mathrm{l}(\tan\alpha + \mu_2)} = \mathrm{M} \frac{d \cdot \mu_2}{l(\tan\alpha + \mu_2)} \quad (12).$$

Zatim iz jednadžbi (11) i (12) za silu između ljestava i podloge dobit ćemo sljedeći izraz:

$$F_1 \geq M \frac{d}{\mathrm{l} \cdot \tan\alpha}\left(1 - \frac{\mu_2}{\tan\alpha + \mu_2}\right) = \mathrm{M} \frac{d}{l(\tan\alpha + \mu_2)} \quad (13).$$

Za faktor trenja između ljestava i podloge iz jednadžbi (4) i (13) dobivamo:

$$\mu_1 N_1 \geq F_1 \geq M \frac{d}{l(\tan\alpha + \mu_2)}$$

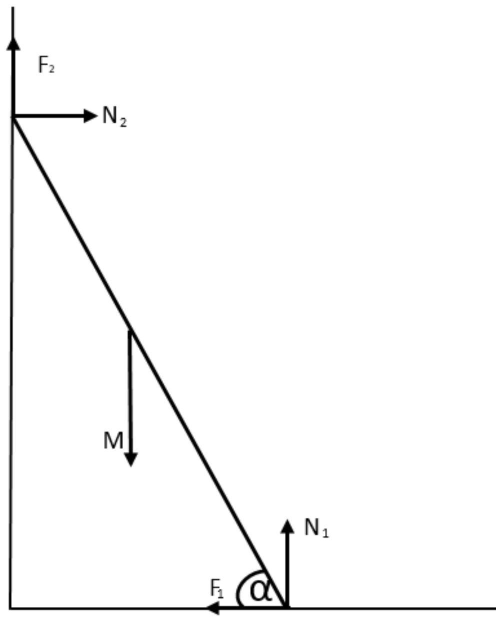
i koristeći jednadžbe (9) i (12) dolazimo do općenitog izraza za faktor trenja između ljestava i podloge:

$$\mu_1 \leq \frac{d}{l(\mu_2\left(1 - \frac{d}{l}\right) + \tan\alpha)} \qquad (14).$$

Dobili smo izraz koji povezuje sve parametre koji su zadani kod problema padajućih ljestava. Također možemo uočiti da je ova jednadžba poopćenje jednadžbe (8), jer ako u jednadžbu (14) uvrstimo da je $\mu_2 = 0$ dobivamo upravo izraz (8), s tim da mora biti znak jednakosti. Možemo još jednu stvar uočiti, a to je da ako je $\mu_1 = 0$ tada je kut između ljesatva i podloge jednak nuli ili je $\mu_2 = \infty$ ako postoji. No ako to vrijedi onda nemamo statične ljestve naslonjene na zid.

KUT IZMEĐU LJESTAVA I PODLOGE

Bennett i Mauney[2] promatraju kako na ljestve naslonjene na zid djeluje kut pod kojim su one nagnute.



Slika 2.: Ljestve naslonjene na zid

Kao i u prethodnom problemu jednadžbe (1) i (2) vrijede dok se jednadžba (3) može napisati u malo drugačijem obliku, jer sada razmatramo problem na način da nema osobe koja se nalazi na njima.

$$\frac{1}{2} Ml \cos\alpha = N_2 l \sin\alpha + F_2 l \cos\alpha \quad (3^*)$$

[2] J. Bennett, i A. Mauney, *The Static Ladder Problem with Two Sources of Friction*, The Physics Teacher, **49**, 567-569 (2011)

Podijelimo jednadžbu (3*) s $l \sin \alpha$ za izraz N_2, dobit ćemo sljedeći izraz:

$$N_2 = \cot \alpha \, (\tfrac{1}{2} M - F_1) \qquad (4^*)$$

Također uočavamo da su i ovom problemu zadovoljenje jednadžbe (4) i (5). Ako pretpostavimo da je sila trenja sa zidom dosegnula maksimalnu vrijednost, a sila trenja s podlogom nije doseugnula svoju maksimalnu vrijednost, tada uvrštavanjem jednadžbe (4*) u jednadžbu (2) dobivamo izraz za F_2u sljedećem obliku:

$$F_2 = \frac{M \cdot \mu_2}{2(\tan \alpha + \mu_2)} \quad (5^*)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (5*) u jednadžbu (2) i uvrštavanjem izraza za N_2 u jednadžbu (5) dolazimo do sljedećeg izraza za kut:

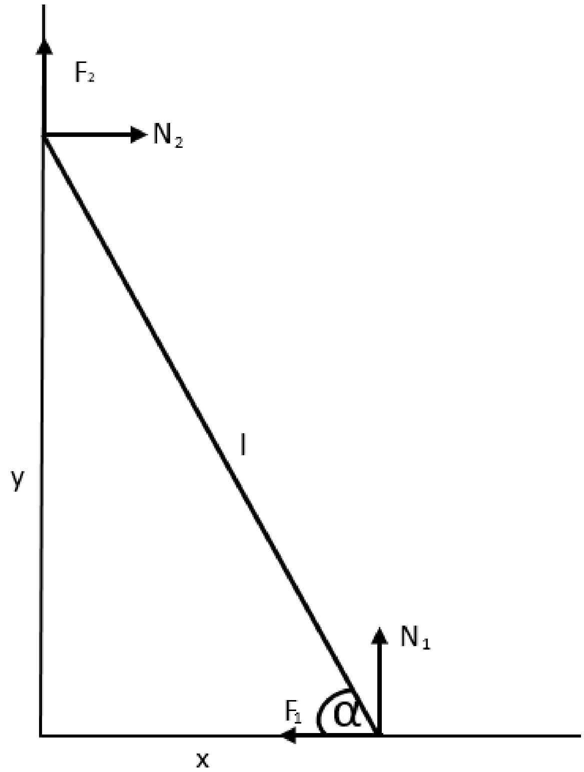
$$\alpha \geq \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} - \mu_2\right)\right] \equiv \alpha_{crit} \quad (6^*)$$

Iz ove jednadžbe možemo zaključiti da ako je $\alpha < \alpha_{crit}$ ljestve će početi klizati, pa zbog toga sila trenja između ljestava i zida mora biti maksimalna kako bi se održala ravnoteža i kako ljestve ne bi pale na tlo. Ako pogledamo situaciju iz drugog kuta, pretpostavimo da je sila trenja između ljestava i podloge maksimalna, a da sila trenja između ljesatva i zida nije, dobit ćemo isti izraz (6*) koji vrijedi i u tom slučaju.

Pogledajmo posebne slučajeve jednadžbe (6*): ako pretpostavimo da je sila trenja između ljestava i poda zanemariva tada je $\mu_1 = 0$ dakle, u tom će slučaju $\alpha_{crit} = 90°$ to jest ljetve neće biti u ravnoteži i past će na tlo. Možemo sad pogledati situaciju kada je $\mu_2 = 0$ tada će ljestve biti u ravnoteži kada su naslonje pod kutem u rasponu od 90°do $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_1}\right)$. Razmotrimo još ovaj slučaj kada je $\mu_2 = \mu_1 = \mu$ tada je izraz za kut dan sljedećim izrazom:$\alpha \geq \tan^{-1}\left[\frac{(1-\mu^2)}{2 \cdot \mu}\right]$.

PADAJUĆE LJESTVE

Scholten i Simoson[3] promatraju ljestve duljine l naslonjene su na zid koje sa tlom zatvaraju kut α.



Slika 3.: Padajuće ljestve

Ovaj naizgled jednostavan primjer pogledat ćemo iz dvije različite perspektive. Naslonjene ljestve pogledat ćemo iz perspektive „matematičkih ljestava“ i iz perspektive „fizičkih ljestava“.

Matematički problem padajućih ljestava polazi od dvije pretpostavke: prva je konstantna brzina kojom se donji dio ljestava giba u vodoravnom smjeru, a drugi je klizanje po podu i zidu (vrh ljestava je u dodiru sa zidom dok je dno ljestava u dodiru sa podlogom na kojoj se ljestve nalaze). To je dakle razlog zašto ljestve kada padaju na dno dosegnu beskonačnu brzinu. Rezultat beskonačno u matematici je vrlo čest rezultat i nije ništa neobično, pa tako i u ovom slučaju. No također moramo imati na umu da matematika često opisuje situacije koje u

[3] P. Scholten i A. Simoson, *The Falling Ladder Paradox,* The College Mathematics Journal, **1**, 49-54 (1996)

stvarnom svijetu nisu moguće, tako i brzina beskonačno nije moguća, brzine izmjerene u stvarnom svijetu su puno manje od beskonačnosti. Zbog toga da bi se mogao opisati problem padajućih ljesatva, ne mogu biti zadovoljena oba gore navedana ograničenja.

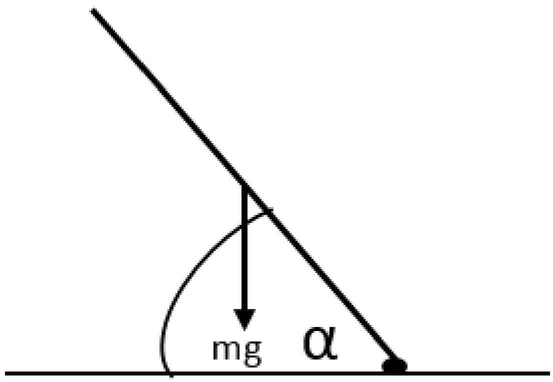
Gledano iz kuta fizičkih ljestava ljestve moraju izgubiti dodir sa zidom (ako želimo da je brzina dna ljestava stalna) ili dno ljestava mora promijeniti brzinu (ako želimo da ljestve ostanu u dodiru sa zidom na koji su naslonjene).

FIZIČKA OGRANIČENJA

Scholten i Simoson[4] problem fizičkih ljestava promatraju u dvije različite fizičke situacije: pokretne ljestve naslonjene na zid i slobodne ljestve koje se ponašaju kao fizičko njihalo.

Ako ljestve razmatramo kao njihalo, onda za opis dinamike krutoga tijela možemo primijeniti analogiju drugog Newtonovog zakona: ukupni moment vanjskih sila koje djeluju na tijelo jednak umnošku momenta tromosti i kutne akceleracije. Ako primjenimo ovaj princip na osi koje prolaze točkom dodira ljestava sa tlom i koji je okomit na ravninu padanja ljestava, i tada se točka dodira giba konstantnom brzinom. Jedina sila koja djeluje na slobodnopadajuće ljestve je sila kojom podloga djeluje na ljestve u točki dodira, i koja uzrokuje zakretni moment i silu težu. Taj zakretni moment je isti kao i moment sile jačine mg koja djeluje prema dolje na centar mase ljestava.

[4] P. Scholten i A. Simoson, *The Falling Ladder Paradox*, The College Mathematics Journal, **1**, 49-54 (1996)



Slika 4.: Ravno njihalo duljine l

Izraz za moment je dan u sljedećem obliku:

$$\tau = mg\frac{l\cos\alpha}{2}$$

Moment tromosti homogenog štapa mase m duljine l je:

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

Dok je kutna akceleracija jednostavno $-\ddot{\alpha}$. Tada je Newtonov aksiom za padajuće ljestve dan sljedećim izrazom:

$$\frac{1}{3}ml^2(-\ddot{\alpha}) = \frac{1}{2}mgl\cos\alpha$$

ili napisan u sljedećem obliku:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{2l}\cos\alpha \qquad (2)$$

taj izraz vrijedi nakon što ljestve izgube dodir sa zidom.

Pogledajmo sada situaciju kada su ljestve u kontaktu sa zidom. Tada je $y = l\sin\alpha$ to jest $\dot{y} = l\cos\alpha\,\dot{\alpha} = x\dot{\alpha}$. Usporedimo li ovaj izraz sa izrazom $\dot{y} = -\frac{kx}{y}$ dobivamo da je $\dot{\alpha} = -\frac{k}{l\sin\alpha}$, a druga derivacija je:

$$\ddot{\alpha} = \frac{k\cos\alpha}{l(\sin\alpha)^2}\dot{\alpha} = -\frac{k^2\cos\alpha}{l^2(\sin\alpha)^3} \qquad (3)$$

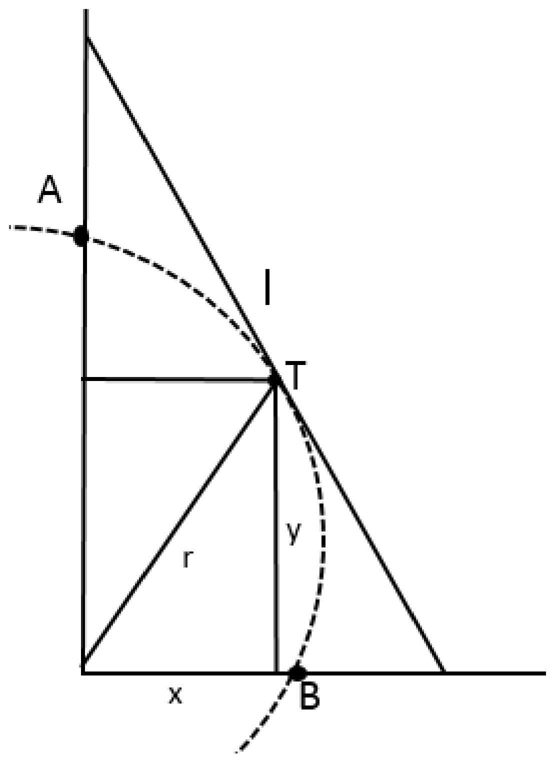
ova jednadžba vrijedi kada ljestve imaju kontakt sa zidom.

Pogledajmo fizičke ljestve i u sljedeće dvije situacije. Kako bi došli do odgovora na pitanje koja je brzina ljestava (preciznije govoreći njihova težišta) pri udaru od podlogu moramo odabrati fizički svijet kojeg želimo promatrati. Jer odgovor na pitanje kolika je brzina ljestava pri udaru od tlo ovisit će upravo o tome koji fizički svijet ćemo odabrati. Pri odabiru svijeta u kojem problem promatramo možemo zamišljati razne svijetove, stvarne i nestvarne, a svaki od tih svijetova ima svoja fizička ograničenja.

Pogledajmo problem padajućih ljesatva na dva primjera iz stvarnog svijeta:

1. ljestve u svemirskoj postaji (bestežinsko stanje)

2. ljestve na površini Zemlje (homogeno gravitacijsko polje)



Slika 5.: Padajuće ljestve

Centar mase ljestava T se može gibati samo po dijelu kružnice od toče A do točke B. Sa slike se lako vidi da vrijedi sljedeća jednadžba:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

LJESTVE U SVEMIRSKOJ POSTAJI

Ako ih ne diramo, ljestve naslonjene okomito na savršeni glatki zid stoje mirno na savršeno glatkoj podlozi. Ako težištu ljestava damo neku početnu brzinu (slučajno ih sruši jedan od astronauta) $v_\circ$ onda sljedeći uvijeti vrijede:

$$\begin{pmatrix} v_y = 0 \\ v_x = v_\circ \end{pmatrix}_{\substack{početak \\ gibanja}} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} v_y = v_\circ \\ v_x = 0 \end{pmatrix}_{\substack{kraj \\ gibanja}}.$$

Dakle riješenje je dano sljedećim izrazom: $v = -v_\circ$.

Matematičko objašnjenje: jednadžbu $x^2 + y^2 = r^2$ deriviramo i dobivamo:

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0\ ,$$

iz čega za drugu derivaciju dobivamo:

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0.$$

Riješenja su dana u obliku:

$$x = r\sin\omega t \quad i \quad y = r\cos\omega t$$

to jest uz oznaku $r\omega = v_\circ$:

$$\dot{x} = v_\circ \cos\omega t \quad i \quad \dot{y} = -v_\circ \sin\omega t.$$

U točki A je $\omega t = 0$ pa slijedi da je:

$$v_x = v_\circ \quad i \quad v_y = 0.$$

U točki B je $\omega t = \frac{\pi}{2}$ pa slijedi da je:

$$v_x = 0 \quad i \quad v_y = -v_\circ.$$

Iako je ovo matematičko riješenje trivijalno, fizičko ograničenje nije tako trivijalno. Naime, ako krenemo od činjenice da nema sila to jest da su $\ddot{x} = 0 \quad i \quad \ddot{y} = 0$. Dolazimo da začaranog kruga budući da potonje navedeni uvijeti nisu ispunjeni. Iz navedenog zaključujemo da težište nije slobodno nego je prisiljeno gibati se po kružnici.

LJESTVE NA POVRŠINI ZEMLJE

Freeman i Palffy-Muhoray[5] promatraju ljestve naslonjene na zid. Ljestve su vezane uz zid, trenje se zanemaruje i sva je masa u središtu. Dakle ako promatramo ljestve na površini Zemlje (što je upravo ono što nas najviše i zanima) gibanje je puno kompliciranije za opisati, no fizičko ograničenje je relativno jednostavno $\ddot{y} = -g$ (2). Time se od različitih svijetova i različitih opisa koji proizlaze iz jednandžbe (1) bira samo jedan svijet.

Postavimo jednadžbe:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0$$

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0.$$

Iz (2) proizlazi sljedeće:

$\dot{y} = -gt + v_{y_\circ}$ (no $v_{y_\circ}$ iščezava jer to brzina koja je tangenta na kružnicu),

$y = -\frac{g}{2}t^2 + r$ (za $y = 0$ dobivamo sljedeći rezultat) $T = \sqrt{\frac{2r}{g}}$,

$$x\dot{x} - gt\left(r - \frac{g}{2}t^2\right) = 0\ .$$

Za brzinu $v_x(T)$ vrijedi:

$v_x(T) = g\sqrt{\frac{2r}{g}}(r - \frac{g}{2} \cdot \frac{2r}{g})$ iz čega sljedi da je $v_x(T) = 0$.

Za brzinu $v_y(T)$ vrijedi:

$v_y(T) = -gT$ (sa slike 5. se vidi da je $r = \frac{l}{2}$) pa dobivamo:

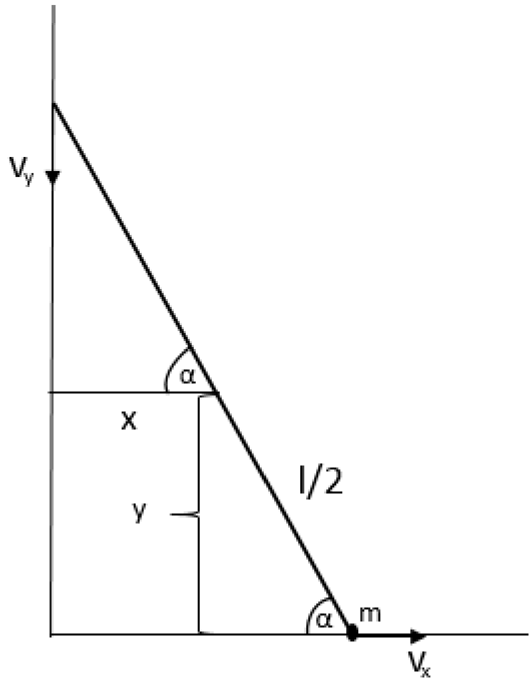
$$v_y(T) = -\sqrt{gl}$$

[5] M.Freeman i P.Palffy-Muhoray, *On mathematical and physical ladders*, American Journal of Physics, **53**, 276 (1998)

„MATEMATIČKE LJESTVE“

Sve nadalje navedene formule samostalno su izvedene.

Problem ljestava naslonjenih na zid izrečen jezikom matematike definiramo na sljedeći način: ljestve duljine l naslonjene su na zid i sa podlogom zatvraju kut α. Ako se dno ljestava udaljava prema van konstantnom brzinom v_x, kojom će brzinom vrh ljestava udariti od tlo?



Slika 6.: Matematičke ljestve

Kod problema matematičkih ljestava pronaći ćemo izraz kojim se pokazuje kako brzina vrha ljestava ovisi o kutu pod kojim su ljestve nagnute. Prva pretpostvka od koje krećemo je da spojnica između ljestava i zida kliže prema tlu, održavajući kontakt sa zidom dok ne padne na tlo. Pogledajmo geometriju prikazanu na prethodnoj slici (slika 4), iz nje očitavamo prvi uvjet:

$$l^2 = (2x)^2 + (2y)^2 \qquad (1).$$

Također sa slike očitavamo da je:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \quad (2).$$

Druga pretpostavka je da nema trenja niti između zida i ljesatva niti između podloge i ljestava. I treća pretpostavka modela je da je sva masa ljestava sadržana u donjoj točki (kako je prikazano na slici 4.).

Izraz koji pokazuje kako brina vrha ljesatva ovisi o kutu izvest ćemo preko Lagrangeovih funkcija to jest preko Lagranžijana:

$$L = T - U \qquad (3)$$

gdje je sa T označena kinetička energija, a sa U potencijalna energija.

$$T = \frac{m}{2}(2\dot{x})^2 = 2m\dot{x}^2$$

$$U=0$$

Uvrštavanjem u (3) dobivamo:

$$L= 2m\dot{x}^2 \quad (4).$$

Euler-Lagrangove jednadžba je:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (5).$$

Nakon pracijalne derivacije izraza (4) po varijablama x i $\dot{x}$ i nakon uvrštavanja u izraz (5) dobivamo sljedeći izraz:

$$\frac{d}{dx}(2\dot{x}) = 0.$$

Iz toga izraza zaključujemo da je $v_x = const = v_\circ$ to jeste dobivamo izraz kako brzina dna ljestava ovisi o kutu:

$$v_x(\alpha) = v_\circ.$$

Nakon kvadriranja i deriviranja izraza (1) dobit ćemo sljedeću jednadžbu:

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

napišimo taj izraz u sljedećem obliku:

$$xv_x + yv_y = 0 \quad (5).$$

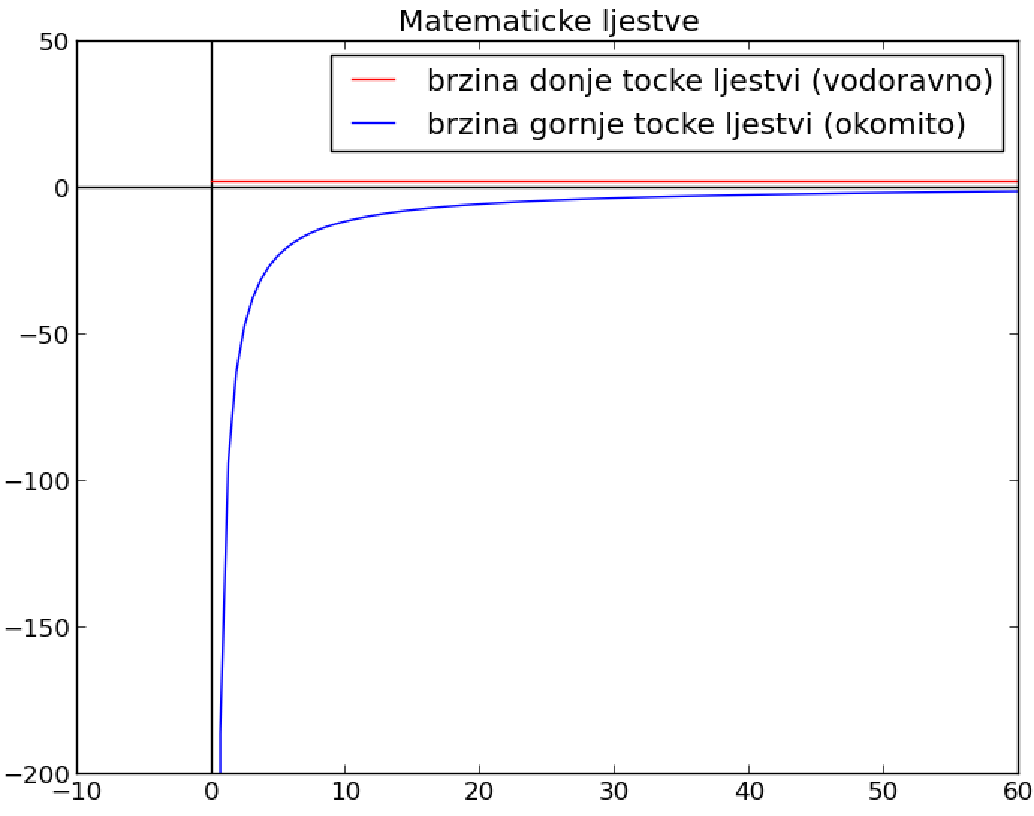
Iz izraza (6) dobivamo da je:

$$v_y = -\frac{v_x}{\frac{y}{x}} \quad (7).$$

Uvrštavanjem izraza (2) u jednadžbu (7) dobivamo:

$$v_y(\alpha) = -\frac{v_\circ}{\tan\alpha} \quad (8).$$

Za matematiče ljestve dobivamo da je brzina dna ljestava konstantna i da je njen iznos $v_\circ$. Dok iz jednadžbe (8) dobivamo ovistnost brzine vrha ljestava o kutu, iz te jednandžbe zaključujemo da brzina vrha ljestava pri udaru o tlo ide u beskonačno. Dobiveni rezultat za metematički svijet nije ništa neobično, dok ga u svijetu fizike ne možemo objasniti. Također dobiveni rezultat ne možemo primjeniti na stvarni svijet, jer brzina beskonačno nije moguća.



Slika 7.: Prikaz ovisnosti brzine vrha matematičkih ljestvi o kutu, početni kut $\alpha = 60°$ te se smanjuje do $\alpha = 0°$ gdje brzina ide u beskonačno, te smo kao početnu vrijednost uzeli da je $v_\circ = 2$ m/s

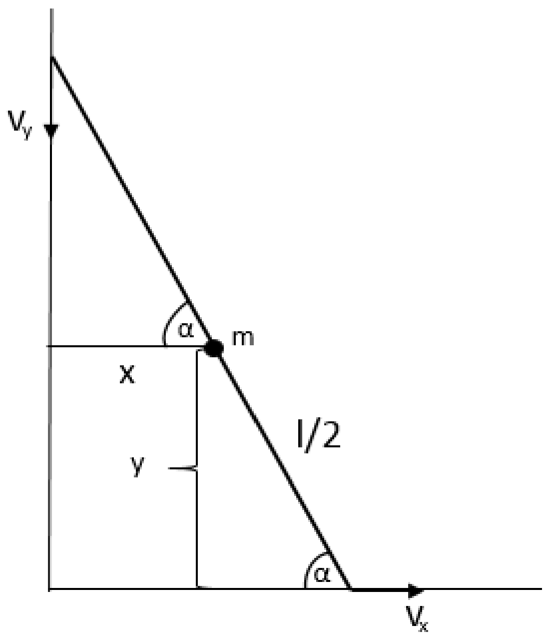
MATEMATIKA ≠ FIZIKA

Pogledajmo samo ukratko zašto je matematika toliko različita od fizike. Već na prvi pogled matematika je ta koja se ne opterećuje sa dobivenim rezultatima dokle god su oni dobiveni s korektnim matematičkim postupcima. Dok za razliku od matematike fizika je ta koju zanima kako objasniti dobivene rezultate i na koji način ti rezultati opisuju stvari u prirodi. Moglo bi se reći da je matematika na neki način bogatija, jer matematička jednadžba može imati različite realizacije u fizičkom svijetu oko nas, no samo su neke od njih doista i ostvarive. Najbolji primjer za navedeno je teorija struna. Kao matematička teorija ona savršeno funkcionira, ali ne znamo da li ona uopće opisuje svijet u kojem se nalazimo ili kao takva samo predstavlja idealan matematički aparat.

„FIZIČKE LJESTVE"

MASA LJESTAVA U JEDNOJ TOČKI

Ako promatramo problem padajućih ljestava sa stajališta fizičara shvatit ćemo da je glavni cilj istaknuti da je naš fizički svijet samo jedan prikaz mnogih matematičkih mogućnosti. I to je glavni razlog zbog kojeg ne možemo imati toliko puno ograničenja ako želimo opisati stvarni fizički svijet oko nas. Pogledajmo fizičke ljestve gdje smo postavili uvijet da je sva masa ljestava u jednoj točki koja se nalazi u centru mase i označili smo ju s m. Promatrat ćemo kako brzina vrha ljestava ovisi o kutu pod kojim su one nagnute.



Slika 8.: Prikaz fizičkih ljestava gdje je sva masa u jednoj točki m

Kako bi došli do izraza za brzinu vrha ljestava u ovisnosti o kutu postavljamo model sa sljedećim pretpostavkama:

1. vrh ljestava nije vezan uz zid pa tada vrijedi:

$$l^2 \neq (2x)^2 + (2y)^2 \qquad (1)$$

2. sva je masa u središtu

3. nema trenja

4. nekon puštanja ljestvama damo brzinu $v_\circ$ u x-smjeru

Sa slike 5. očitavamo da je $y = \frac{l}{2}\sin\alpha$ (2).

Jednadžba za kinetičku energiju ima sljedeći oblik:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

dok je potencijalna energija dana u sljedećem obliku:

$$U = mgy.$$

Lagranžijan je dan sljedećim izrazom:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy.$$

Izraz za Euler-Lagrangeovu jednadžbu promatrat ćemo odvojeno za x-komponentu i odvojeno za y-komponentu.

Euler-Lagrangeova jednandžba za x-komponentu je:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (3).$$

Parcijalne derivacije iščezavaju, a $2\dot{x} = const$. Pa je brzina dna ljestava konstantna:

$$v_x(\alpha) = v_\circ.$$

Euler-Lagrangeova jednandžba za y-komponentu je:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (4).$$

Krećemo od sljedećeg izraza:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -mg$$

odakle dobivamo da je:

$$\ddot{y} = -g$$

$$\dot{y} = -gt$$

$$v_y = -2gt$$

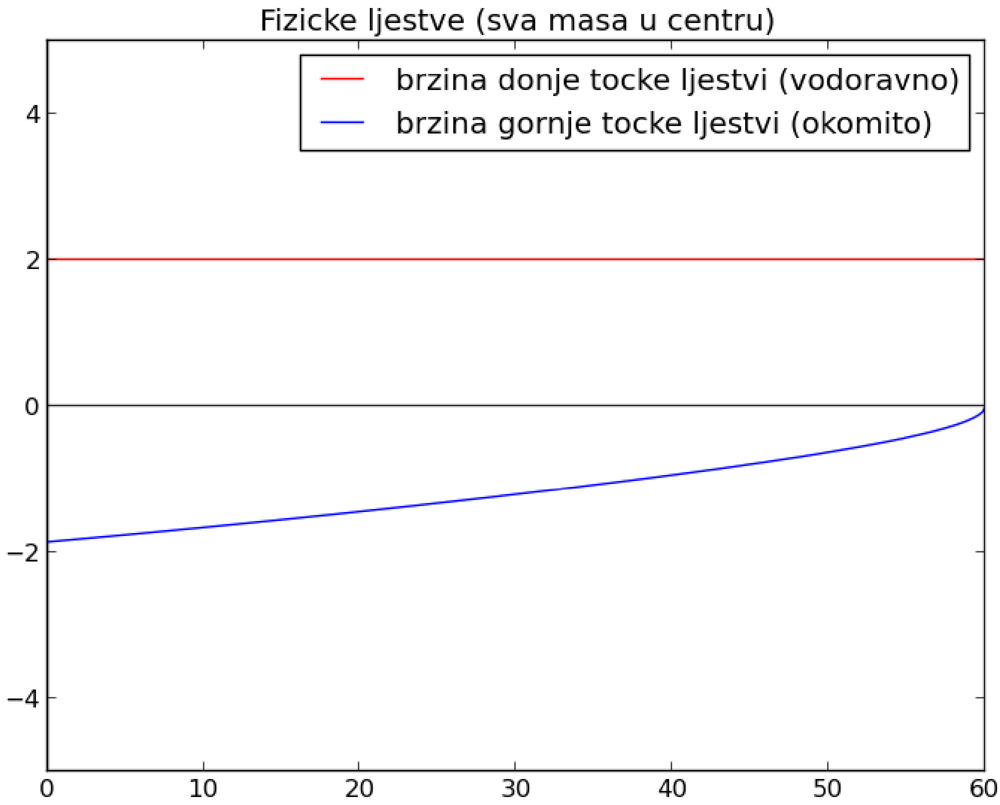
$$y = -g\frac{t^2}{2} + y(0) = -g\frac{t^2}{2} + \frac{l}{2}\sin\alpha_\circ \quad (5).$$

Izjednačavenjem desnih strana izraza (2) i (5) dobivamo:

$$\frac{l}{2}\sin\alpha = -g\frac{t^2}{2} + \frac{l}{2}\sin\alpha_\circ.$$

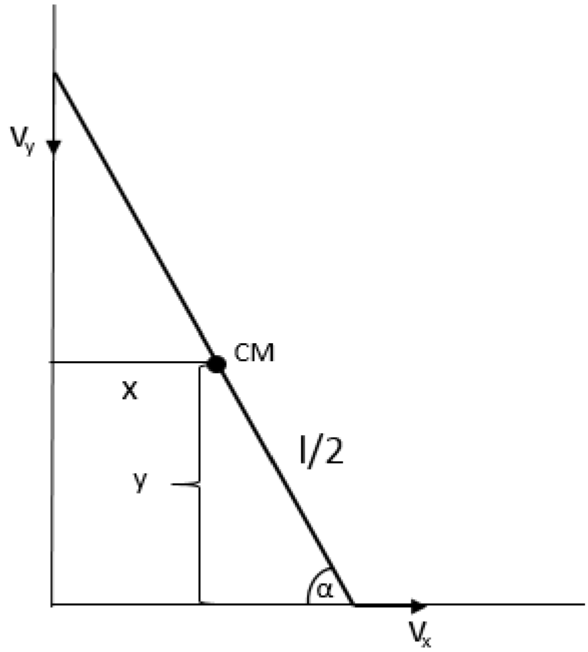
Nakon sređivanja gornjeg izraza dobivamo izraz za ovisnost brzine vrha ljestava o kutu:

$$v_y(\alpha) = -2\sqrt{gl(\sin\alpha_\circ - \sin\alpha)}.$$



Slika 9.: Prikaz ovisnosti brzine vrha fizičkih ljestvi o kutu gdje je sva masa u centru to jest u jednoj točki T, početni kut $\alpha = 60°$ te se smanjuje do $\alpha = 0°$ gdje brzina ima neku konačnu vrijednost, te smo također uzeli kao početnu vrijednost da je $v_\circ = 2$ m/s

MASA LJESTAVA JEDNOLIKO RASPOREĐENA



Slika 10.: Prikaz fizičkih ljestava gdje je masa jednoliko raspoređena

Kako bi došli do izraza za brzinu vrha ljestava, kada je masa ljestava jednoliko raspoređena, u ovisnosti o kutu postavljamo sljedeće uvijete:

1. vrh ljestava nije vezan uz zid pa tada vrijedi:

$$l^2 \neq (2x)^2 + (2y)^2 \qquad (1)$$

2. masa ljestava je jednoliko raspoređena

3. nema trenja

4. nekon puštanja ljestvama damo brzinu $v_\circ$ u x-smjeru

Sa slike 7. očitavamo da je $y = \frac{l}{2} \sin \alpha$ (2).

Kada promatramo kinetičku energiju ljestava u obzir uzimamo i moment tromosti ljestava. Promatrat ćemo kao da se ljestve rotiraju oko točke u kojoj ljestve dodiruju podlogu, tada je izraz za moment tromosti $I = \frac{1}{3} ml^2$,a $\omega = \dot{\alpha}$. Izraz za kinetičku energiju je:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3).$$

Potencijalna energija je dana sljedećim izrazom:

$$U = mgy.$$

Derivacijom izraza (2) dobivamo:

$$\dot{y} = \frac{l}{2}\cos\alpha\,\dot{\alpha}.$$

Sada će izraz za kinetičku energiju imati sljedeći oblik:

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{8}(\cos\alpha)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\alpha}^2.$$

Dok je izraz za potencijalnu energiju:

$$U = mg\frac{l}{2}\sin\alpha.$$

Izraz za Langranžijan je:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{8}(\cos\alpha)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\alpha}^2 - mg\frac{l}{2}\sin\alpha.$$

Iz Euler-Lagrangove jednadžbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

dobivamo da je:

$$v_x(\alpha) = v_\circ.$$

Napišimo jednadžbu gibanja za rotaciju ljestava:

$$I\ddot{\alpha} = M = \frac{l}{2}mg\cos\alpha.$$

Iz te jednadžbe dobivamo:

$$\ddot{\alpha} = \frac{3g}{2l}\cos\alpha = \frac{3g}{2l}\frac{(-v_y)}{l\dot{\alpha}}$$

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{l^2}v_y$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}^2) = -\frac{3g}{l^2}v_y = \frac{d}{dt}(-\frac{3g}{l^2}2y)$$

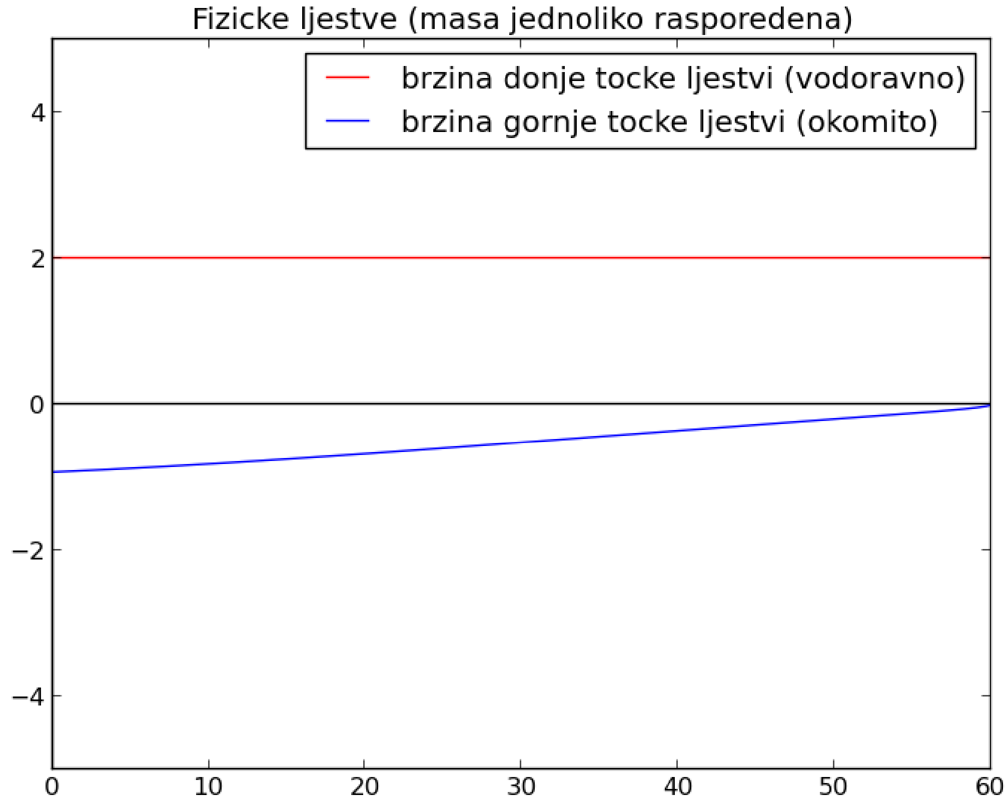
$$\dot{\alpha}^2 = -\frac{3g}{l^2}\frac{l}{2}\sin\alpha + const$$

$$0 = -3\frac{g}{l}\sin\alpha_\circ + const$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{v_y}{l\cos\alpha}.$$

Izraz za brzinu vrha ljestava o kutu je:

$$v_y(\alpha) = -\cos\alpha\sqrt{3gl(\sin\alpha_\circ - \sin\alpha)}.$$



Slika 11.: Prikaz ovisnosti brzine vrha fizičkih ljestvi o kutu gdje je masa jednoliko raspoređena, početni kut $\alpha = 60°$ te se smanjuje do $\alpha = 0°$, u ovom sličaju graf očitavamo s desna na lijevo to jest od početnog kuta pa dok ljestve na postanu paralelne sa podlogom, kao početne vrijednosti uzimamo da je $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ i da je $l = 5$ m

ZAKLJUČAK

U ovom smo završnom radu, na primjeru padajućih ljestvi, pokazali kako se gradi matematički model koji na zadovoljavajući način opisuje stvarnost. Bilo koji matematički opis problema je, što se matematiče tiče, potpuno legitiman, pod uvjetom da poštuje matematička pravila. S fizikom je drukčije. Zadovoljavajući je samo onaj matematički opis problema čija se predviđanja slažu s opažanjima. Zato za fiziku možemo reći da je ograničena. Ograničava se na onaj dio matematičkog opisa koji, do tražene točnosti, opisuje stvarnost. Matematika to ograničenje nema.

Nakon uvodnih, općenitih razmatranja o ljestvama naslonjenim o zid, razmatramo dinamiku padajućih ljestvi. Krećemo od vrlo jednostavnog modela koji možemo zvati "matematičkim" zato što u njemu ljestve padaju zato što donjem dijelu damo neku početnu brzinu, a gornji je dio vezan uz zid pa slijedi gibanje donjeg dijela. Taj model predviđa da vrh ljestvi doseže beskonačnu brzinu kad ljestve dođu u vodoravni položaj. To se predviđanje drastično razlikuje od opažanja, a kako na prvi pogled nije očit razlog onda se ponekad govori o paradoksu padajućih ljestvi. No, već prvi model koji uključuje fizički uzrok padanja ljestvi - gravitaciju – ne predviđa više beskonačnu nego konačnu brzinu vrha ljestvi. Radi jednostavnosti pretpostavljamo svu masu u središtu i odsustvo trenja. U malo naprednijem modelu razmatramo ljestve čija je masa jednoliko raspoređena. Matematički opis tog problema nešto je složeniji, a predviđanje krajnje brzine vrha ljestvi zbog tromosti je, u skladu s očekivanjima, nešto manje nego u prvom modelu fizičkih ljestvi.

LITERATURA

1. Y. Salu, *Revisiting the Ladder on a Wall Problem*, The Physics Teacher, **49**, 289-290 (2011)

2. J. Bennett, i A. Mauney, *The Static Ladder Problem with Two Sources of Friction*, The Physics Teacher, **49**, 567-569 (2011)

3. P. Scholten i A. Simoson, *The Falling Ladder Paradox*, The College Mathematics Journal, **1**, 49-54 (1996)

4. M.Freeman i P.Palffy-Muhoray, *On mathematical and physical ladders*, American Journal of Physics, **53**, 276 (1998)

5. http://digre.pmf.unizg.hr/910/1/245-1%20str.3-8.pdf (24. 9. 2017)

6. http://aapt.scitation.org/doi/abs/10.1119/1.14140 (20. 9. 2017.)

7. http://aapt.scitation.org/doi/abs/10.1119/1.14415 (20. 9. 2017.)

ŽIVOTOPIS

Marina Alešković rođena je u Požegi, 7. lipnja 1995. godine. Osnovnu školu završila je u Jakšiću, a Katoličku klasičnu gimnaziju s pravom javnosti u Požegi. Sada studira fiziku na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

DODATAK

Ovdje su priloženi svi kodovi u Pythonu koji su u radu korišteni za crtanje.

Kod za matematičke ljestve.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alfa_0 = 60 # odabrani pocetni kut ljestvi u stupnjevima
alfa = np.linspace(0.01,alfa_0,100)

v_0 = 2.0 # odabrana konstanta u m/s
v_x = v_0 * np.ones(100) # brzina donjeg dijela ljestvi u m/s
v_y = -v_0 / np.tan(alfa*np.pi/180) # brzina gornjeg dijela
ljestvi u m/s


plt.axhline(color='black')
plt.axvline(color='black')
plt.xlim(-10,alfa_0)
plt.ylim(-200,50)
plt.plot(alfa,v_x,'r-',label='brzina donje tocke ljestvi
(vodoravno)')
plt.plot(alfa,v_y,'b-',label='brzina gornje tocke ljestvi
(okomito)')

plt.legend(loc='upper right')

plt.title('Matematicke ljestve')
plt.show()
```

Kod za fizičke ljestve kada je sva masa u jednoj točki.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alfa_0 = 60 # odabrani pocetni kut ljestvi u stupnjevima
alfa = np.linspace(0,alfa_0,300)

v_0=2.0 # odabrana konstanta u m/s
v_x = v_0 * np.ones(300) # brzina donjeg dijela ljestvi u m/s
v_y = -v_0 * np.sqrt(np.sin(alfa_0*np.pi/180)-np.sin
(alfa*np.pi/180)) # brzina gornjeg dijela ljestvi u m/s



plt.axhline(color='black')
plt.axvline(color='black')
plt.xlim(0,alfa_0)
plt.ylim(-5,5)
plt.plot(alfa,v_x,'r-',label='brzina donje tocke ljestvi
(vodoravno)')
plt.plot(alfa,v_y,'b-',label='brzina gornje tocke ljestvi
(okomito)')

plt.legend(loc='upper right')

plt.title('Fizicke ljestve (sva masa u centru)')
plt.show()
```

Kod za fizičke ljestve kada je masa jednoliko raspoređena.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alfa_0 = 60 # odabrani pocetni kut ljestvi u stupnjevima
alfa = np.linspace(0,alfa_0,300)

v_0 = 2.0 # odabrana konstanta u m/s
g=9.81 #ubrzanje sile teze u m/s^2
l=5 #duljina ljestava u m
v_x = v_0 * np.ones(300) # brzina donjeg dijela ljestvi u m/s
v_y=-np.cos(alfa*np.pi/180)*np.sqrt(np.sin(alfa_0*np.pi/180)-
np.sin(alfa*np.pi/180)) # brzina gornjeg dijela ljestvi u m/s


plt.axhline(color='black')
plt.axvline(color='black')
plt.xlim(0,alfa_0)
plt.ylim(-5,5)
plt.plot(alfa,v_x,'r-',label='brzina donje tocke ljestvi
(vodoravno)')
plt.plot(alfa,v_y,'b-',label='brzina gornje tocke ljestvi
(okomito)')

plt.legend(loc='upper right')

plt.title('Fizicke ljestve (masa jednoliko rasporedena)')
plt.show()
```