Teorija raspodjele

Kruhoberec, Matej

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA FIZIKU

Matej Kruhoberec

Teorija raspodjele

Završni rad

Osijek, 2017.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA FIZIKU

Matej Kruhoberec

Teorija raspodjele

Završni rad

Predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
radi stjecanja zvanja prvostupnika fizike

„Ovaj završni rad je izrađen u Osijeku pod vodstvom mentora doc.dr.sc. Zvonka Glumca u sklopu Sveučilišnog preddiplomskog studija fizike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku".

Sadržaj

Teorija raspodjele

Matej Kruhoberec

Sažetak

Rad na temu teorije raspodjela. Zamjenjujemo klasične matematičke funkcije s drugačijim načinom opisivanja prirodnih pojava.

(stranica 48 , slika 17, fusnota 4)

Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku

Ključne riječi: delta funkcija, raspodjela, funkcije, teorija

Mentor: doc.dr.sc. Zvonko Glumac

Rad prihvaćen:

1. Uvod

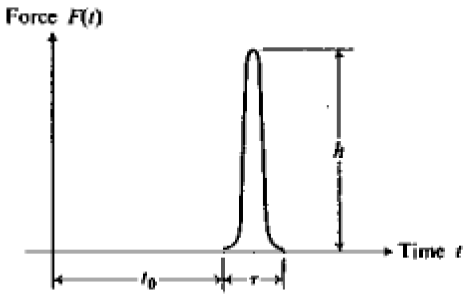
U ovom radu pisati ću o konceptu teorije raspodjele, delta funkciji i kako se ona u tom kontekstu koristi. Proći ćemo neke osnovne primjene u fizici i životu te usporediti raspodjelu s pravim matematičkim funkcijama.

2. Jako visoke funkcije i Diracova delta funkcija

U fizici, često susrećemo koncept impulsa infinitezimalnog trajanja. Npr., tijelo koje se pokreće iz stanja mirovanja naglim udarcem dobiva moment jednak impulsu udarca,

$$mv = I = \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)dt$$

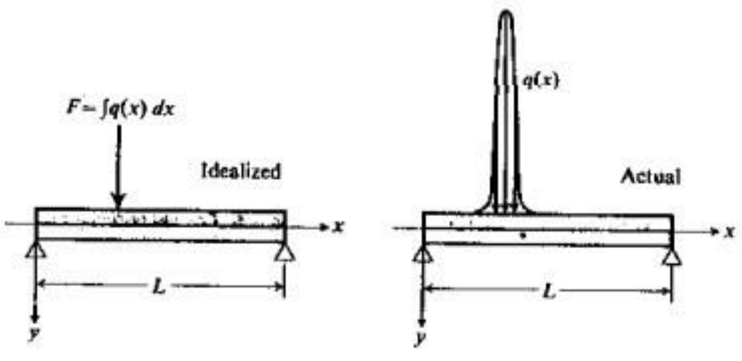
gdje je $F(t)$ sila a τ je trajanje djelovanja te sile. Udarac implicira da je τ toliko kratak da se promjena momenta događa trenutno. Međutim, kako je promjena momenta konačan broj to povlači da $F(t)$ treba biti vrlo velik tijekom udarca, a inače je nula.



Slika 1. Sila F u intervalu udarca (τ)

Ovakav tip opisa nije u potpunosti ispravan. Pravi graf bi više izgledao kao snažna skokovita funkcija prikazana na slici 1 gdje je h vrlo velik, a τ toliko kratak da je površina ispod krivulje iznosa 1. U velikoj većini slučajeva točan izgled funkcije nije poznat. Međutim, to nam inače nije toliko bitno. Bitan je intenzitet impulsa tj. iznos integrala

$$\int_{t_0}^{t_0+t} F(t)dt,$$



Slika 2. Raspored pritiska na gredi

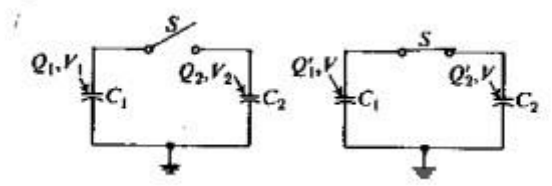
i vrijeme kada se impuls dogodio, t_0.

Jako visoke funkcije su česte u svim granama fizike. Npr. koncentrirana sila koja djeluje na gredu je zapravo raspored jako visokih sila koje raspoređene daju određen pritisak (Slika 2.).

U električnim se krugovima jako izražene struje s jako kratkim trajanjima često događaju u procesima izmjene, kao npr. preraspodjela naboja između dva kondenzatora pokazana na slici 3. Na početku se pretpostavlja da su naponi $V_1 = Q_1/C_1$ i $V_2 = Q_2/C_2$ različiti. Kada se prekidač zatvori, struja kroz njega proteče dok se naboji Q_1 i Q_2 preraspodjele u:

$$Q_1' = \frac{C_1(Q_1 + Q_2)}{C_1 + C_2}, Q_2' = \frac{C_2(Q_1 + Q_2)}{C_1 + C_2}$$

Ako je otpor vodiča zanemariv, tada je trenutni impuls jako kratkog trajanja i struja je neograničeno velika. Ovo nikada ne može biti potpuno točno, osim neizbježnog otpora (mali, ali nikada nula), uvijek će postojati i samoindukcija L petlje koja pokušava utjecati na nagli porast struje do njezine maksimalne vrijednosti, nakon što se zatvori prekidač.



Slika 3. Kondenzatori

Kako bi pojednostavio neke operacije u matematičkoj fizici i kvantnoj mehanici, Dirac je predložio uvođenje delta funkcije $\delta(x)$ koja će predstavljati naglo skokovite funkcije dana s

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty & x \neq 0, \end{cases}$$

ali takva da je integral $\delta(x)$ normiran:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Prva i osnovna operacija za koju je Dirac iskoristio $\delta(x)$ je integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx,$$

gdje je $f(x)$ bilo koja kontinuirana funkcija. Ovaj integral može biti "procijenjen" sljedećim argumentom: Pošto je $\delta(x)$=0 za $x \neq 0$, granice integrala mogu se promijeniti na $-\epsilon$ i $+\epsilon$, gdje je ϵ mali pozitivan broj. Pošto je $f(x)$ kontinuirana u $x = 0$, njezine vrijednosti na intervalu $(-\epsilon, +\epsilon)$ neće biti puno različitije od $f(0)$ i možemo tvrditi, otprilike, da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)f(x)dx \cong f(0)\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)dx,$$

gdje se točnost povećava kako se ϵ približava nuli. Međutim,

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)dx = 1,$$

za sve vrijednosti ϵ, jer je $\delta(x) = 0$ za $x \neq 0$, i jer je $\delta(x)$ normirana. Slijedi da puštanjem $\epsilon \to 0$ imamo točno

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \qquad (1)$$

Granice $-\infty$ i $+\infty$ mogu biti zamijenjene s bilo koja dva broja a i b tako da vrijedi $a < 0 < b$. Gornji integral se nekad naziva sitasto svojstvo delta funkcije: $\delta(x)$ se ponaša kao sito, izabirući od svih mogućih vrijednosti $f(x)$, njezinu vrijednost u točci $x = 0$.

3. Delta nizovi

Izraz:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

nije prikladan, i ne može se koristiti za definiranje funkcije, još manje za definiranje integrabilne funkcije. Drugi način definiranja $\delta(x)$ kao funkcije, je zahtijevati da zadovoljava svojstvo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

za svaki kontinuirani $f(x)$. Međutim, ovaj pokušaj također ne uspijeva. Moguće je pokazati da ne može postojati funkcija s takvim svojstvom.

Ono što i dalje vrijedi je da postoji niz jako visokih funkcija koje se približavaju gornjem svojstvu

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x) dx = f(0).$$

Niz s ovim svojstvom će se zvati delta niz. Na primjer, funkcije

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}, & |x| < \frac{1}{n} \end{cases} \quad n = 1,2,3, \ldots$$

tvore delta skup. Promatramo integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x) dx$$

za bilo koji kontinuirani $f(x)$. Po definiciji $\phi_n(x)$ imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x) dx = \int_{-1/n}^{+1/n} \frac{n}{2} f(x) dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{+1/n} f(x) dx.$$

Sada, koristeći teorem srednje vrijednosti* za integrale, možemo zaključiti da

$$\frac{n}{2}\int_{-1/n}^{+1/n} f(x)dx = \frac{n}{2}\frac{2}{n}\ f(\xi) = f(\xi), \qquad -\frac{1}{n} \leq \xi \leq +\frac{1}{n}.$$

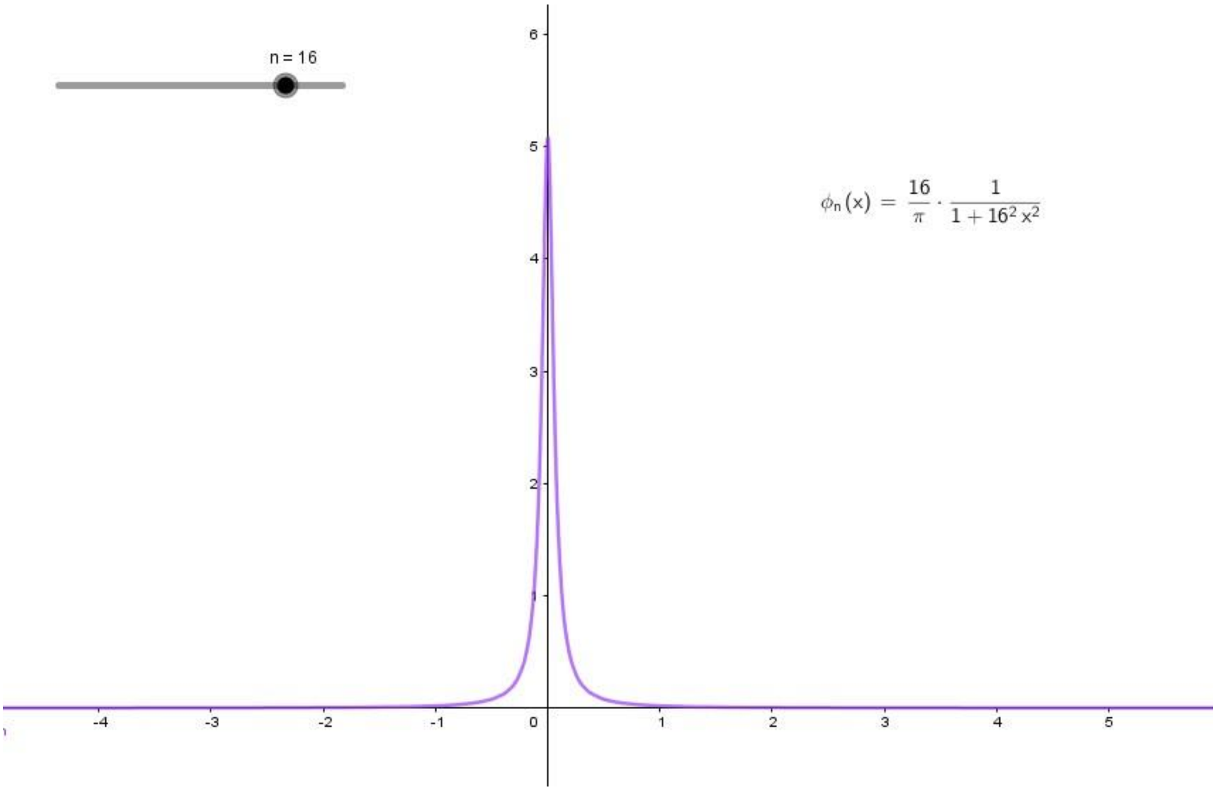
Ako $n \to \infty$ onda $\xi \to 0$. Zbog kontinuiranosti $f(x)$, slijedi da $f(\xi) \to f(0)$ te dobijemo rezultat

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x) dx = f(0)$$

koji definira $\phi_n(x)$ kao delta niz.

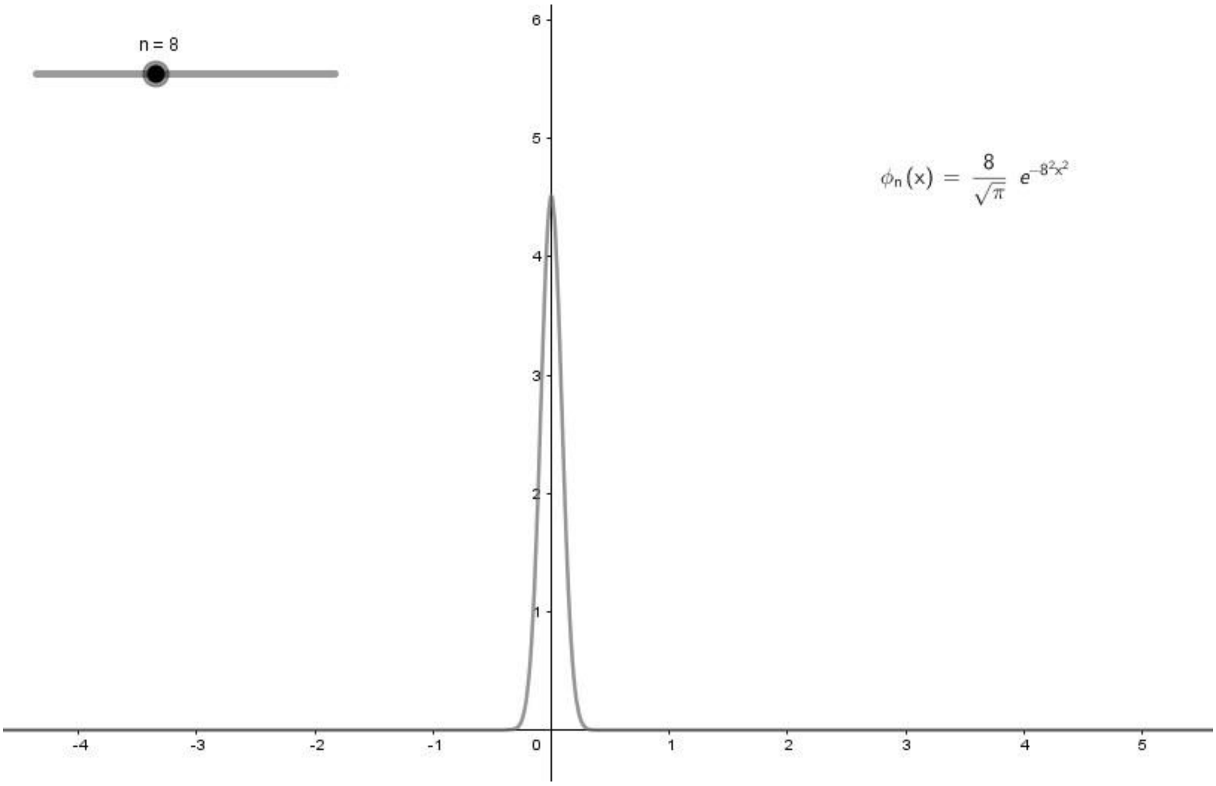
Za mnoge svrhe može biti poželjno konstruirati delta skup od funkcija koje su kontinuirane i derivabilne (ovo nije bilo slučaj u prethodnom primjeru). Na primjer, neki takvi nizovi su

a) $\phi_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$, (slika 4.1)



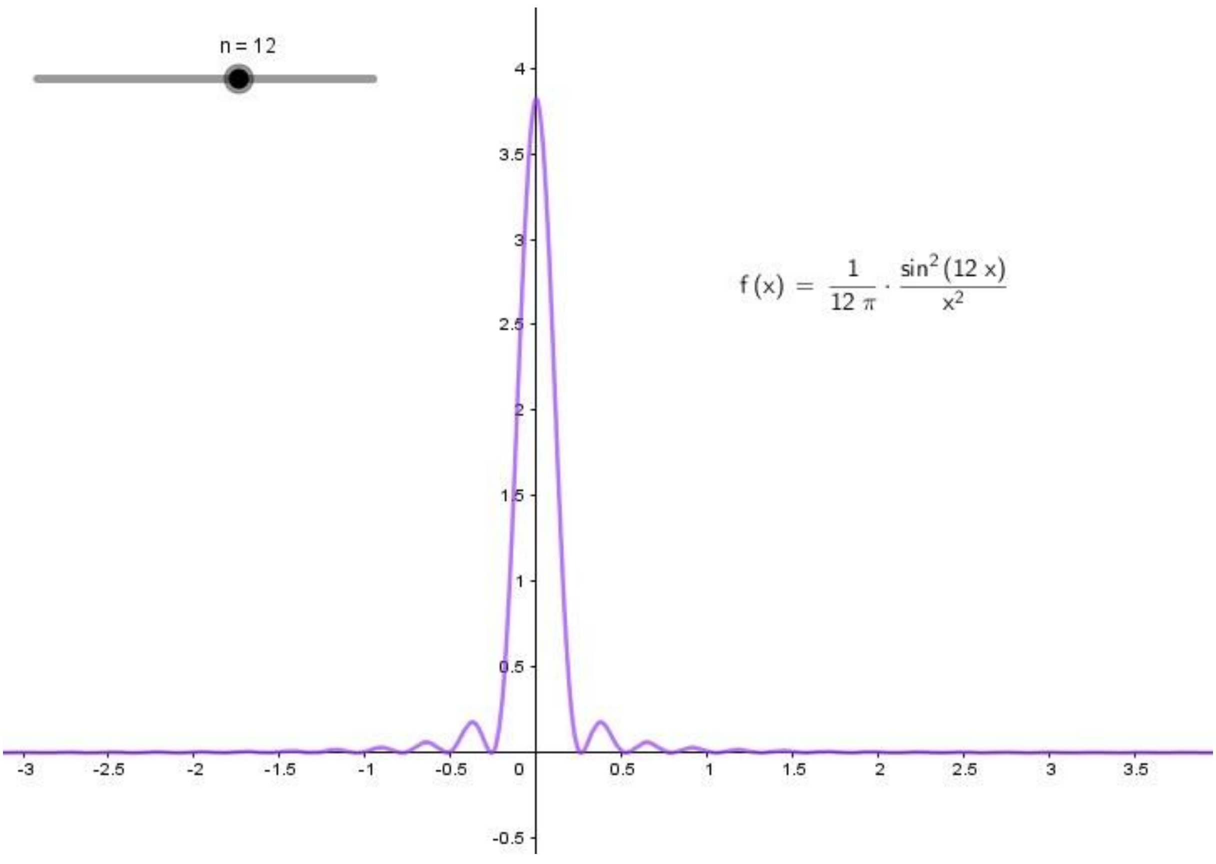
Slika 4.1 Graf $\phi_n(x)$ pod a) za n = 16.

b) $\phi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\ e^{-n^2x^2}$, (slika 4.2)



Slika 4.2 Graf $\phi_n(x)$ pod b) za $n = 8$.

c) $\phi_n(x) = \frac{\frac{1}{n\pi}\sin^2 nx}{x^2}$. (slika 4.3)



Slika 4.3 Graf $\phi_n(x)$ pod c) za $n = 12$.

Sve su te funkcije normirane, vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)dx = 1,$$

i svaki niz ima sitasto svojstvo (1) (naravno ako je $f(x)$ kontinuirana i integral konvergira):

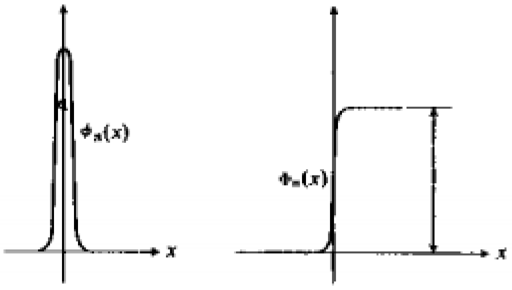
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)f(x)dx = f(0).$$

Ali opet, netočno je reći da ti nizovi konvergiraju u delta funkciju. Limesi tih nizova ne postoje (prema osnovnim definicijama konvergencije).

NAPOMENA. Normiranje ϕ_n nije obavezno za delta niz; treba samo vrijediti da

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)dx = 1$$

što slijedi iz sitastog svojstva (1) postavljanjem $f(x) = 1$.



Slika 4. Grafovi $\phi_n(x)$ i $\Phi_n(x)$

Predloženo je istražiti neodređene integrale funkcije $\phi_n(x)$,

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi_n(\xi)d\xi.$$

Na primjer, za niz a) naveden gore, grafovi $\phi_n(x)$ i $\Phi(x)$ za velike vrijednosti n bi izgledali kao na slici 4. Također nije teško provjeriti da

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = S(x),$$

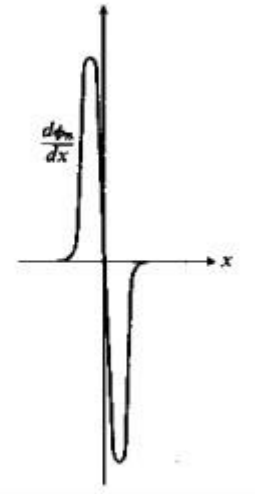
gdje je $S(x)$ step funkcija definirana kao

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Na prvi pogled moglo bi se reći da je $\delta(x)$ derivacija step funkcije $S(x)$. Međutim, $\frac{dS(x)}{dx} = 0$ za sve $x \neq 0$ (što je ispravno), dok derivacija ne postoji u $x = 0$ točno gdje se očekuje vrhunac delta funkcije.

4. $\delta - račun$

Korištenje delta niza napravljenog od derivabilnih funkcija ima jako važnu posljedicu; na primjer slika 5, neka je $\phi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$, $n = (1,2,3, \dots)$;



Slika 5.Prikazuje $\frac{d\phi_n}{dx}$

tada je

$$\frac{d\phi_n(x)}{dx} = -\frac{2n^3}{\sqrt{\pi}} x e^{-n^2x^2}$$

Promatramo integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi_n(x)}{dx} f(x)dx,$$

gdje je $f(x)$ derivabilna. Parcijalnom integracijom dobijemo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi_n(x)}{dx} f(x)dx = \phi_n(x)f(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Pretpostavimo da

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} f(x) = 0.$$

(Ovo inače vrijedi s obzirom da koristimo funkcije za koje integral $\int_{-}^{+} \phi_n(x)f(x)dx$ konvergira). Tada puštanjem $n \to \infty$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi_n(x)}{dx} f(x)dx = -\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)f'(x)dx = -f'(0).$$

Izgleda da je niz $\phi_n'(x)$ povezan sa sitastim svojstvom derivacija. Ovime uvodimo simbol $\delta'(x)$, za derivacije delta funkcije, takve da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x)dx = -f'(0).$$

Ovo se može dalje raspisati, što nam daje više derivacije $\delta(x)$ koje imaju svojstvo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m\delta(x)}{dx^m} f(x)dx = (-1)^m \ \frac{d^m f(0)}{dx^m}.$$

Nepotrebno je naglasiti da je jedina svrha gornje tvrdnje iznad ta da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m\phi_n(x)}{dx^m} \ f(x)dx = (-1)^m \frac{d^m f(0)}{dx^m},$$

i prešutno je pretpostavljeno da su korištene funkcije derivabilne m puta i da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k\phi_n(x)}{dx^k} f(x)dx$$

konvergira za sve n i za sve k od nula do m.

Sada bi trebalo biti jasno da postupanjem $\delta(x)$ i njezinim derivacijama kao funkcijama u običnom smislu (što one ne mogu biti) je kraći način za dobivanje rezultata ali samo ako se zadovolje određeni preduvjeti. Ovakvu proceduru možemo nazvati $\delta - račun$ i jako je prisutan u fizičkoj literaturi. Kao i u slučaju Heavisideova operacijskog računa, dobit ćemo točne rezultate ako su njegova ograničenja prepoznata i uočena.

Možemo izvesti različita pravila $\delta - računa$ s osnovnim analitičkim operacijama polazeći od svojstava:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)dx = f(0)$,

b) $\delta(x) = \frac{d}{dx} S(x)$,

c) $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, \ x = 0 & sa \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \end{cases}$,

i ignorirajući, za sada, njihovo matematičko opravdanje.

Provjerimo pravilo da $x\,\delta(x) = 0$

Uzmimo u obzir $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x) f(x)dx = 0$, gdje je $f(x)$ kontinuirana u x=0. Zapišimo $x\,f(x) = g(x)$; zatim $g(0) = 0$, te iz toga vrijedi da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x) f(x)dx = 0,$$

za sve kontinuirane (u $x = 0$) funkcije $f(x)$. Ovo opravdava jednakost $x\,\delta(x)$ i nule.

Odredimo značenje $\delta(x - a)$.

Uzmimo u obzir $\int_{-}^{+} \delta(x - a) f(x)dx$. Postavimo $x - a = \xi$ i zapišimo $f(\xi + a) = g(\xi)$;

Tada vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)g(\xi)d\xi = g(0) = f(a).$$

NAPOMENA. U skladu s $\delta - računom$ može se reći da

$$\delta(x-a) = \frac{d}{dx}S(x-a).$$

Provjerimo pravilo

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \qquad a \neq 0.$$

Pretpostavimo da je $a > 0$, i koristeći $ax = \xi, dx = \frac{1}{a}d\xi$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)f\left(\frac{\xi}{a}\right)\frac{1}{a}\, d\xi = -\frac{1}{a}f(0).$$

Ako je $a < 0$, koristimo $ax = \xi, dx = \frac{1}{a}d\xi$, tada su granice integrala zamijenjene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)f(x)dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(\xi)f\left(\frac{\xi}{a}\right)\frac{1}{a}\, d\xi = \frac{1}{a}f(0)$$

U oba slučaja, rezultat je $\frac{1}{|a|}f(0)$ što potvrđuje pravilo.

NAPOMENA: Iz ovoga slijedi da je $\delta(x)$ parna funkcija (odabirom $a = -1$).

Provjerimo pravilo

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x+a) + \delta(x-a)] \quad (a > 0).$$

Primijetimo da $\delta(x^2 - a^2) = \delta[(x+a)(x-a)]$. Pošto $\delta(\xi) = 0$ osim ako $\xi = 0$, slijedi da je $\delta(x^2 - a^2) = 0$ osim u točkama $x = \pm a$. Dakle možemo pisati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^2 - a^2)f(x)dx$$
$$= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} \delta[(x+a)(x-a)]f(x)dx$$
$$+ \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta[(x+a)(x-a)]f(x)dx, \qquad (a > 0),$$

gdje je $0 < \epsilon < 2a$ i ϵ može biti zanemarivo mali. Sada u okolini $x = -a$, član $(x-a)$ može biti zamjenjen s $-2a$. Tada

$$\int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} \delta[(x+a)(x-a)]f(x)dx$$
$$= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} \delta[(-2a)(x+a)]f(x)dx$$
$$= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} \frac{1}{|-2a|}\delta(x+a)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a}\delta(x+a)f(x)dx = \frac{1}{2a}f(-a)$$

Možemo ponovno koristiti beskonačne granice jer je $\delta(x+a)=0$ osim u $x=-a$.

Na sličan način,

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta[(x+a)(x-a)]f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a}\delta(x-a)f(x)dx = \frac{1}{2a}f(a),$$

i pravilo je potvrđeno.

NAPOMENA. Ovo pravilo ne vrijedi za $a=0$. Ne postoji način interpretiranja izraza $\delta(x^2)$.

5. Prikazi delta funkcije

Za prikaze osnovnih operacija postavljenih u $\delta - računu$ prikladno je izvesti izraze za $\delta(x)$ u obliku: Fourierovog reda, Laplaceove transformacije i integralnog izraza.

Promatramo impuls

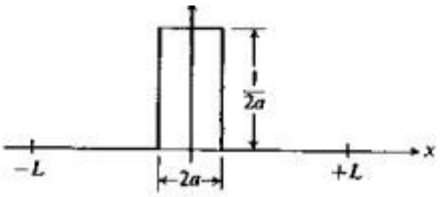
$$\phi_a(x) = \begin{cases} 0 & -L \le x < -a \\ \frac{1}{2a} & -a \le x \le a \\ 0 & a < x \le L, \end{cases}$$

pokazan na slici 6. Njegovi Fourierovi koeficijenti su $b_n = 0$ (funkcija je parna), $a_0 = \frac{1}{L}, a_n = \frac{1}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a}{L},\ \ n \ge 1$. Koeficijente računamo pomoću sljedeće tri formule[1]:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} \phi_a(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} \phi_a(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

$$b_n(x) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} \phi_a(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$



Slika 6. pravokutni impuls

Izraz za taj Fourierov red je:

$$\phi_a(x) = \frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Puštanjem $a \to 0$ dobijemo Fourierov red za $\delta(x)$:

[1] Formule su preuzete iz: Zvonimir Glumac, *Matematičke metode fizike – kratak uvod sa 348. stranice*

$$\delta(x) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Nakon razvoja u red i puštanja $a \to 0$, jedina točka vrijedna razmatranja je $x = 0$ (samo za nju funkcija razvijena u red nije nula). Kada postavimo $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L} = \infty,$$

čime je pokazana divergencija niza.

Ovo nas ne bi trebalo iznenaditi jer da je niz konvergentan, tada bi $\delta(x)$ postojala kao istinska funkcija, što ona nije.

Unatoč tom nedostatku, ne trebamo odmah pretpostaviti da je ovaj red potpuno beskoristan. Na primjer, pomnožimo ga s „ispravnom“ funkcijom $f(x)$ i integrirajmo ga u granicama od $x = -L$ do $x = +L$:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

gdje su $a_n(0,1,2,\ldots)$ Fourierovi koeficijenti za $f(x)$. Ako je $f(x)$ prikazana pomoću Fourierovog reda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}),$$

tada, ako je $f(x)$ kontinuirana u $x = 0$, dobijemo

$$f(0) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Slijedi da diveregentan red

$$\frac{1}{2L} + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L},$$

posjeduje sitasto svojstvo (1) te ga se može koristiti kao prikaz delta funkcije.

Na sličan način možemo izvesti druge izraze za delta funkciju.

Na primjer, Fourierov sinusni red za $\delta(x - \xi)$ izgleda ovako (izračunat na isti način kao i ranije samo uz promjenu granica[2]):

[2] Funkcija je sada oblika $\phi_a(x) = \begin{cases} 0 & -L \le x < \xi - a \\ \frac{1}{2a} & \xi - a \le x \le \xi + a. \\ 0 & \xi + a < x \le L \end{cases}$

$$\delta(x-\xi) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad 0 < \xi < L.$$

Također možemo izvesti integralni izraz za $\delta(x)$. Prisjetimo se integrala za step funkciju[3]:

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{z} e^{xz} dz.$$

Deriviranjem dobijemo,

$$\delta(x) = \frac{dS(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{xz} dz.$$

Broj γ u integralu za $S(x)$ može biti proizvoljan ali pozitivan zbog pola u $z = 0$. Kako ne postoji pol za $\delta(x)$ možemo (kako bi si olakšali) postaviti $\gamma = 0$, tada dobijemo

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{xz} dz.$$

Ovakav se izraz može malo drugačije prikazati promjenom varijabli, $k = iz$.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk.$$

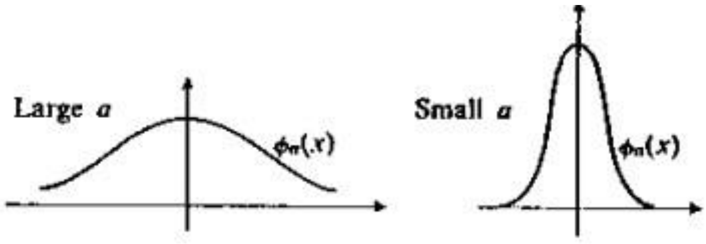
Ovaj je integral (divergentan naravno) jako čest u korištenju delta funkcije u fizici. Njegovo se sitasto svojstvo može vidjeti na više načina. Kao primjer, promotrimo funkciju

$$\phi_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2k^2} e^{ikx} dk \quad (a \neq 0).$$

Ovdje faktor konvergencije $e^{a^2k^2}$ čini integral konvergentnim. Možemo reći da je

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = \lim_{a\to 0}\phi_a(x),$$

uzevši u obzir da se operacije integracije i postavljana granice limesa u $a \to 0$ mogu zamijeniti.



Slika 7. $\phi_n(x)$ u ovisnosti o a

Sada, integralna definicija $\phi_a(x)$ može biti lako uspostavljena; Riješimo kvadratnu jednadžbu,

[3] Integral za step funkciju preuzet iz: *Eugene Butkov Mathematical Physics odlomak 2.15*

$$-a^2k^2 + ikx = -\left(ak + \frac{x}{2ai}\right)^2 - \frac{x^2}{4a^2}.$$

Tada je

$$\phi_a(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ak+\frac{x}{2ai}\right)^2} dk.$$

Postavimo $ak + \frac{x}{2ai} = u$ i koristimo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ da dobijemo

$$\phi_a(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}.$$

Ova funkcija, poznata kao funkcija Gaussove vjerojatnosti, je jako visoka kada je a mali. Nadalje, $\phi_a(x)$je normirana:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_a(x) dx = 1 \quad (za\ svaki\ a).$$

Tada je očekivano i može biti izravno dokazano da vrijedi

$$\lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_a(x) f(x) dx = f(0),$$

za bilo koju „standardnu“ funkciju $f(x)$; na primjer, derivabilnost u $x = 0$ će biti dostatna. Iz ove analize slijedi da će vrijediti sljedeći izraz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} f(x) dk dx = f(0).$$

Ova formula vrijedi, u uobičajenom rigoroznom smislu, za široki spektar funkcija $f(x)$, ali pod uvjetom da se prvo integrira po x.

Završit ćemo ovo poglavlje promatrajući Laplaceovu transformaciju delta funkcije. Laplaceova transformacija je preslikavanje $\mathcal{L}$, definirano s:

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in R.$$

Gdje je funkcija f definirana na intervalu $[0, +\infty\rangle$, te integral za tu funkciju konvergira. Funkcija $\mathcal{L}(f) = f$ se naziva Laplaceovim transformatom funkcije f.

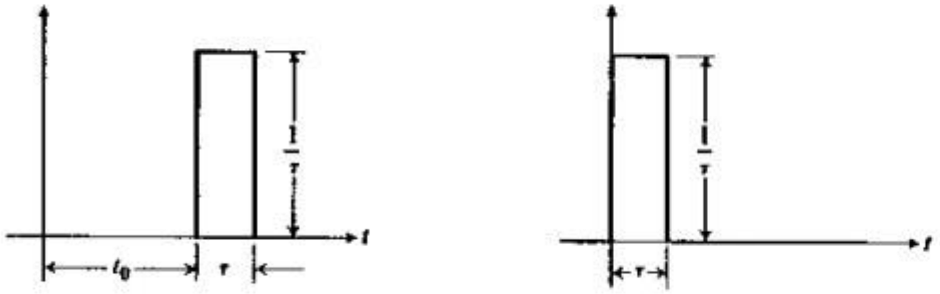
Promatramo normirani pravokutni impuls. Njegova Laplaceova transformacija je

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{1}{\tau} e^{-st} dt = e^{-st_0} \frac{1 - e^{-s\tau}}{s\tau}$$

Sada puštajući $\tau \to 0$; pošto je

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1 - e^{-s\tau}}{s\tau} = 1,$$

možemo pisati $\mathcal{L}\{\delta(t - t_o)\} = e^{-st_o}$.



Slika 8. Pomak pravokutnog impulsa

Napomena. Iako se može uspostaviti jednakost $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, postavljajući $t_0 = 0$ treba naglasiti da ta delta funkcija nije ista kao i ona definirana na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Na primjer, ne možemo reći da je ta $\delta(t)$ (konstruirana kao gore) parna funkcija pošto Laplaceova transformacija vrijedi samo za $t_0 > 0$, i pravokutni impuls korišten za konstrukciju delta funkcije izgleda više kao graf pokazan nas slici 8, a ne toliko kao krivulja na slici 6. Praktična posljedica ove činjenice je da će sitasto svojstvo sada prije izgledati

$$\int_0^\infty \delta(t)f(t)dt = f(0+0),$$

nego kao

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0).$$

Ovu činjenicu treba zapamtiti. pošto će se u mnogim problemima koji koriste Laplaceovu transformaciju iznos $f(0)$ teško definirati.

6. Primjene $\delta - ra\check{c}una$

Promatramo pomak prigušenog harmonijskog oscilatora pod utjecajem vanjske sile $f(t)$. Diferencijalna jednadžba gibanja je oblika

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = f(t).$$

Pretpostavimo da je sila $f(t)$ nagli udarac u trenutku t_0. Točan izgled sile nije poznat, ali je poznato da je impuls I:

$$\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t)dt = I \ \ (\epsilon > 0),$$

gdje je ϵ proizvoljno mali. Takva sila $f(t)$ može biti prikazana funkcijom

$$I\,\delta(t - t_0),$$

tada diferencijalna jednadžba koju treba riješiti izgleda

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{I}{m}\delta(t - t_o), \qquad \lambda = \frac{\rho}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Pretpostavimo da oscilator miruje u trenutku $t = 0$, pretpostavimo da je $t_0 > 0$. Tada je

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

Riješiti ćemo ovu jednadžbu koristeći Laplaceove transformacije. Transformirana je jednadžba oblika

$$s^2 X(s) + 2\lambda s X(s) + \omega_0^2 X(s) = \left(\frac{1}{m}\right) e^{-st_0}.$$

Tako da je

$$X(s) = \frac{I}{m}\frac{e^{-st_0}}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2}.$$

Korijeni nazivnika su $r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. Da budemo precizni, pretpostavimo da je $\omega_0^2 > \lambda^2$ i postavimo $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$. Nadalje, pišemo

$$X(s) = \frac{I}{m}\frac{1}{(s - r_1)(s - r_2)} e^{-at_0}$$

I zvedemo inverznu preobrazbu služeći se Heavisideovim teoremom:

$$x(t) = \frac{I}{m}\left\{\frac{e^{r_1(t-t_0)}}{r_1 - r_2} + \frac{e^{r_2(t-t_0)}}{r_2 - r_1}\right\}.$$

Sada koristeći $r_1 = -\lambda + i\omega, r_2 = -\lambda - i\omega$ svodimo izraz na

$$x(t) = \frac{1}{m} e^{-\lambda(t-t_0)} sin\omega(t - t_o) S(t - t_0)$$

ili

$$x(t) = \begin{cases} 0 \ (t < t_0), \\ \frac{I}{m} e^{-\lambda(t-t_0)} sin\omega(t - t_0) \ (t > t_0). \end{cases}$$

Pošto je djelovanje sile $f(t)$ trenutno u trenutku $t = t_0$, oscilator je opisan homogenom jednadžbom i za $t < t_0$ i $t > t_0$:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ \ (t \neq t_0).$$

Također vrijedi

$$x(t) = 0, \qquad \dot{x}(t) = 0 \ \ za\, t < t_0.$$

Za $t > t_0$, opće je rješenje oblika $x(t) = Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t + \phi)$.

Da bi pronašli $A\ i\ \phi$, primjetimo da fizički uvjeti zahtjevaju da je $x(t)$ u cijelosti kontinuirana (uključujući i $t = t_0$). Također primjetimo da ovo ne može vrijediti i za $\dot{x}(t)$.

Uzeći ovo sve u obzir, integriramo diferencijalnu jednadžbu od $t_0 - \epsilon\ do\ t_0 + \epsilon$:

$$\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \ddot{x}dt + 2\lambda \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \dot{x}dt + \omega_0^2 \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} xdt = \frac{1}{m},$$

ili

$$\dot{x}(t_0+\epsilon) - \dot{x_0}(t-\epsilon_0) + 2\lambda x(t_0+\epsilon) - 2\lambda x(t_0-\epsilon) + \omega_0^2 \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} xdt = \frac{I}{m},$$

ovo vrijedi za proizvoljni ϵ. Pustimo $\epsilon \to 0$ i koristimo svojstvo kontinurianost $f(x)$; tada dobijemo

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} x(t)dt = 0$$

i

$$\lim_{\epsilon\to 0}[x(t_0+\epsilon) - x(t_o-\epsilon)] = 0.$$

Primijetimo da je $\dot{x}(t_0-\epsilon) = 0$ (i za x i $\dot{x}$ iščezava kada je $t < t_0$). Iz toga slijedi

$$\lim_{\epsilon\to 0} \dot{x}(t_0+\epsilon) = \dot{x}(t_0+0) = \frac{I}{m}.$$

Pošto je

$\dot{x}(t) = \lambda e^{-\lambda t} Asin(\omega t+\phi) + \omega e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi)\ (t > t_0),$

možemo dobiti puštajući $t \to t_0$ s desna,

$$\frac{I}{m} = \omega e^{-\lambda t_0} Acos(\omega t_0+\phi).$$

S druge strane, puštajući $t \to t_0$ u izrazu za $x(t)$, dobijemo

$$0 = e^{-\lambda t_0} Asin(\omega t_0+\phi).$$

Dakle, $\sin(\omega t_0+\phi) = 0, ili\ \omega t_0+\phi = n\pi\ (n = 1,2,3 \dots)$. Tada

$$\cos(\omega t_0+\phi) = (-1)^n\ i\ A = (-1)^n \left(\frac{I}{\omega m}\right) e^{\lambda t_0}.$$

Rješenje je tada

$$x(t) = (-1)^n \frac{I}{\omega m} e^{-\lambda(t-t_0)} \sin[\omega(t-t_0) + n\pi]\ (t > t_0).$$

Kakav god da je n, rješenje je identično s

$$x(t) = \frac{I}{\omega m} e^{-\lambda(t-t_0)} sin\omega(t-t_0)\ \ (t > t_0).$$

Vidimo da je rješenje dobiveno pomoću $\delta - računa$ točno, i da smo ga dobili brže i lakše nego koristeći uobičajene metode.

Kao još jedan primjer, promatramo gredu učvršćenu s obje strane i silu P koja djeluje na središte. Diferencijalna je jednadžba oblika

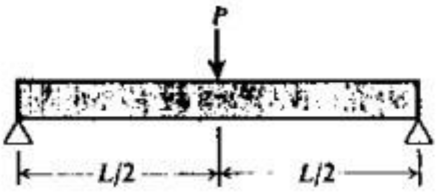
$$\frac{d^4y(x)}{dx^4} = \frac{1}{EI}q(x).$$

$E -$ modul elastičnosti, $I -$ moment tromosti, $q(x) -$ raspodjela pritiska, $y(x) -$ otklon u smjeru y osi.

Možemo zapisati da je $q(x) = P\delta(x - \frac{L}{2})$ na temelju toga što P predstavlja beskonačno visoku raspodjelu pritiska s

$$\int_{\frac{L}{2}-\epsilon}^{\frac{L}{2}+\epsilon} q(x)dx = P, \ \ (\epsilon > 0),$$

gdje je ϵ proizvoljno mali.



Slika 9. Pritisak na gredu

Ovaj se problem može riješiti proširivanjem u Fourierov sinusni red.

Pretpostavimo da je

$$y(x) = \sum_{(n=1)}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

i koristimo (divergentni) red

$$\delta\left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{L}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Uvrštavajući ovo u diferencijalnu jednadžbu dobijemo

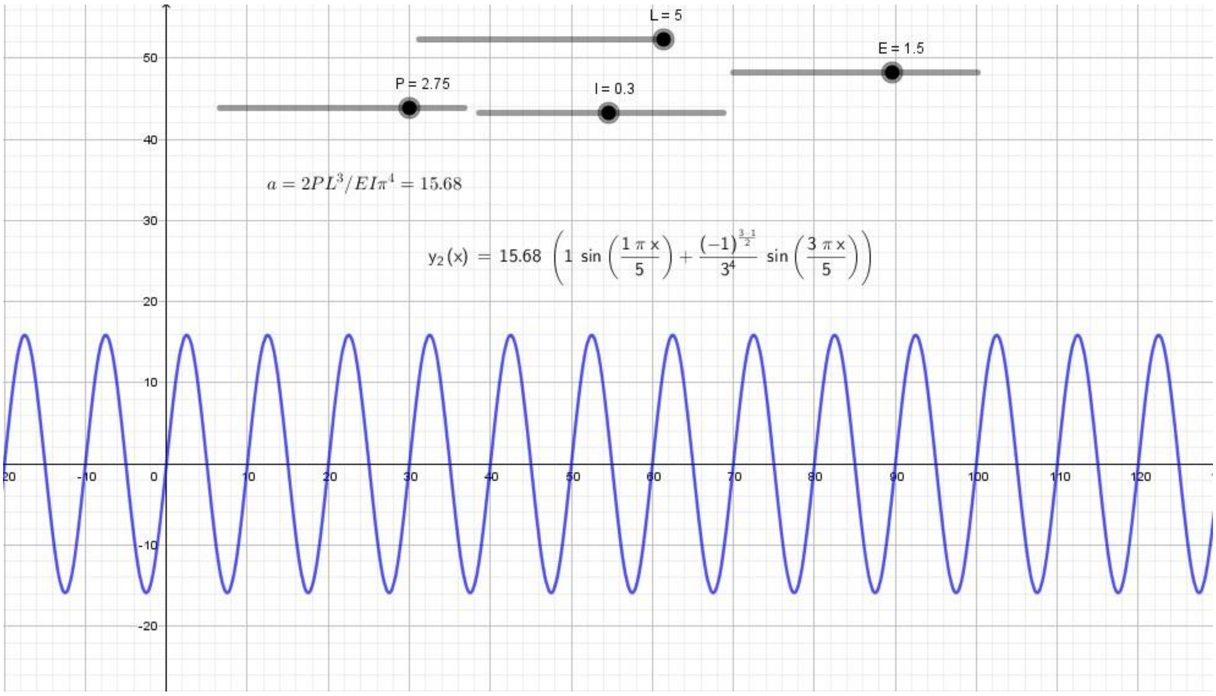
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{2P}{EIL}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Nakon toga slijedi,

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{2PL^3}{EI\pi^4}\dfrac{1}{n^4}, & (neparni\ n), \\ 0, \quad (parni\ n), \end{cases}$$

i

$$y(x) = \frac{2PL^3}{EI\pi^4}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$



Slika 9.1 Graf funkcije $y(x)$ za prva dva člana sume.

Nije teško provjeriti (metodama sličnima kao i u prvom primjeru) da je ovo zaista Fourierov sinusni red i točno rješenje za $y(x)$. Primijetimo, da direktan pokušaj provjere neće uspjeti; Zaplesti ćemo se nakon deriviranja reda tri puta, u tom će trenutku konvergencija prestati vrijediti.

Napomena. Ovaj je niz vrlo konvergentan. Na primjer, ako je $x = L/2$, vodeći član je skoro pa u potpunost točan

$$y\left(\frac{L}{2}\right) \cong \frac{2}{\pi^4}\frac{PL^3}{EI}$$

što je samo oko 1% odstupanja od točnog rezultata

$$y\left(\frac{L}{2}\right) \cong \frac{1}{48}\frac{PL^3}{EI}.$$

7. Slaba konvergencija

Ideje spomenute u prethodnim odjeljcima koji su doveli do koncepta delta funkcije, mogu biti povezani u ono što se zove teorija raspodjele.

Kao što i naziv najavljuje, teorija se bavi problemom proširenja definicije funkcije tako da se koncepti kao $\delta(x)$ mogu osloniti na čvrste matematičke temelje. Postoji više načina kako bi se to postiglo. Mi ćemo ići s načinom prikazanim u 3. poglavlju, prići ćemo raspodjelama kroz integrale nizova funkcija tipa

$$\int f_n(x)g(x)dx \quad (n = 1,2,3, \dots).$$

Niz funkcija $f_n(x)$ (kao na primjer delta niz) vodi do novog matematičkog koncepta (kao na primjer delta funkcija), ali pod uvjetom da takav niz integrala konvergira za bilo koju prigodnu funkciju $g(x)$. Što su to točno „prigodne“ funkcije? Ako na primjer želimo definirati koncepte kao $g'(x), g''(x), itd$, tada $g(x)$ treba biti beskonačno derivabilna. Također ćemo pretpostaviti da granice integracije (osim ako se ne postavi drugačije) budu $-\infty$ i $+\infty$. Dakle, $g(x)$ mora imati „normalna ponašanja“ u beskonačnosti. Također inzistiramo na jako snažnom uvjetu, to je da $g(x)$ mora biti identična nuli izvan nekog konačnog intervala (a, b) (drugačijeg za svaki drugačiji $g(x)$).

Funkcije $g(x)$ koje zadovoljavaju ove uvjete nazvati ćemo test funkcijama. Takvo ime je prikladno, pošto su ispitana svojstva delta niza, testirana na takvim funkcijama.
Funkcija

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & |x| < a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases} \quad a > 0,$$

je test funkcija. Očito je beskonačno derivabilna za $|x| \neq a$. Dok se za točke $x = \pm a$ može pokazati koristeći osnovne definicije derivacija, da postoje sve derivacije i da su jednake nuli. Kao primjer pokažimo da je $g'(x) = 0$ u $x = -a$. Da si olakšamo postavimo $a + x = \xi$ i definirajmo funkciju g tako da je g funkcija od ξ. U neposrednoj okolini točke $\xi = 0$ (to jest $x = -a$) imamo

$$g(\xi) = \begin{cases} 0 \quad (\xi \leq 0), \\ e^{-a^2/\xi(2a-\xi)} \quad (\xi > 0). \end{cases}$$

Po definiciji derivacije,

$$\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=-a} = \left.\frac{dg(\xi)}{d(\xi)}\right|_{\xi=0} = \lim_{\xi\to 0}\frac{g(\xi) - g(0)}{\xi} = \lim_{\xi\to 0}\frac{g(\xi)}{\xi}.$$

Ako je $\xi < 0$, tada $g(\xi) = 0$ i limes s desne strane jednadžbe je nula. Ako je $\xi > 0$, koristimo $\eta = 1/\xi$ i pišemo

$$\lim_{\xi\to 0}\left(\frac{1}{\xi}\right)e^{-\frac{a^2}{\xi(2a-\xi)}} = \lim_{\eta\to\infty}\eta e^{-\left|\frac{a^2}{2a-\frac{1}{\eta}}\right|\eta}$$

Pošto $e^{-\frac{a^2\eta}{2a-\frac{1}{\eta}}} < e^{-\frac{a}{2}\eta}$ i pošto $\lim\limits_{\eta\to\infty}\eta e^{-\frac{a}{2}\eta} = 0$ znači da je dokaz završen.

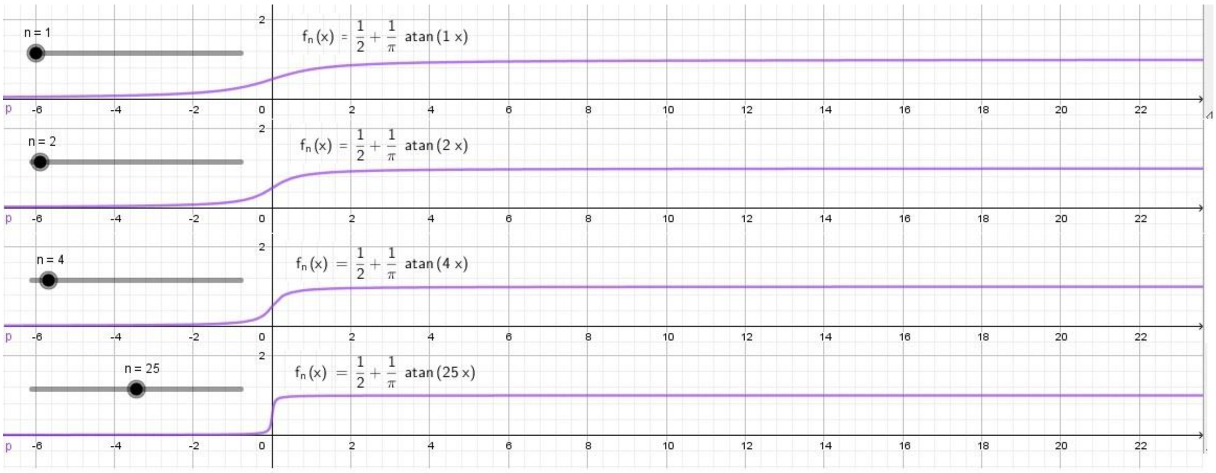
Sada kada smo definirali test funkcije, možemo definirati klasu funkcije jezgre od koje će se uzimati funkcije $f_n(x)$. Postoji više načina. Osim ako se ne kaže drugačije, zahtijevat ćemo da funkcije jezgre budu beskonačno derivabilne na cijelom području $(-\infty, +\infty)$. Njihovo ponašanje u beskonačnosti može biti proizvoljno. Izraz funkcije jezgre je povezan s činjenicom da je ova klasa funkcija proširena s razlogom da obuhvati druge (ne beskonačno derivabilne) funkcije i istinske raspodjele, kao što je delta funkcija.

Sada promatramo niz funkcija jezgre $f_n(x)(n = 1,2,3,\dots)$, nazivamo ga slabo konvergentnim nizom ako

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx,$$

postoji za sve test funkcije $g(x)$. Slabo konvergentan niz može, a i ne mora konvergirati na bilo koji od uobičajenih načina. Koncept slabe konvergencije je posebno izveden da proširi klasu funkcije na poseban način. Takva proširenja su moguća sredstvima drugih tipova konvergencija kao na primjer uniformna konvergencija, konvergencija po točkama itd., ali u biti proširenje sa slabom konvergencijom postavlja teže zahtjeve. Promatramo niz funkcija jezgre

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan nx.$$



Slika 9.2 Funckija $f_n(x)$ za nekoliko različitih n.

Nije teško provjeriti konvergira li ovaj niz u step funkciju $S(x)$. Međutim, jezgra se sastoji od beskonačno puta derivabilnih funkcija na području $(-\infty, +\infty)$ te $S(x)$ nije funkcija jezgre. Što znači da se ne može reći da niz $f_n(x)$ konvergira „unutar jezgre“. Štoviše, konvergira slabo. Može se pokazati da

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x)g(x)dx = \int_{0}^{\infty} g(x)dx,$$

vrijedi za sve test funkcije $g(x)$.

Sada možemo definirati nekontinuiranu funkciju $S(x)$ spajanjem funkcije jezgre i „limesa“ $f_n(x)$ definiranog samo unutar integrala na sljedeći način

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan nx\right) g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x)g(x)dx.$$

Zašto pokušavamo definirati step funkciju $S(x)$ na ovoliko kompliciran način? Zar nije puno jednostavnije definirati je po točkama:

$$S(x) = \begin{cases} 0\ (x < 0), \\ \frac{1}{2}\ (x = 0), \\ 1 (x > 0). \end{cases}$$

Odgovor je očit, zato što na isti način možemo definirati delta funkciju koja se opire svakom definiranju po točkama. Promatramo niz funkcija jezgre:

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2}.$$

Kako se n približava $n \to \infty$, ovaj niz ne konvergira u funkciju (unutar jezgre ili izvan). Štoviše, konvergira slabo i

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) g(x) dx = g(0),$$

za svaku test funkciju $g(x)$. Dokaz je sljedeći:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2} g(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1/\sqrt{n}} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2} g(x) dx$$

$$+ \int_{-1/\sqrt{n}}^{+1/\sqrt{n}} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2} g(x) dx + \int_{+1/\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2} g(x) dx.$$

Neka B bude granica za $g(x)$, $|g(x)| \leq B$ za svaki x. Tada

$$\left| \int_{1/\sqrt{n}}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2} g(x) dx \right| \leq B \int_{1/\sqrt{n}}^{\infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2} dx = B \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{n} \right).$$

Pošto je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{n} \right) = 0,$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/\sqrt{n}}^{\infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2} g(x) dx = 0.$$

Slično tome,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-1/\sqrt{n}} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2} g(x) dx = 0,$$

Konačno, koristeći teorem srednje vrijednosti ($f_n(x) > 0$),

$$\int_{-1/\sqrt{n}}^{+1/\sqrt{n}} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2} g(x)dx$$

$$= g(\xi) \int_{-1/\sqrt{n}}^{+1/\sqrt{n}} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2} dx = g(\xi) \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{n} \quad (-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \xi \leq +\frac{1}{\sqrt{n}}),$$

tako da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1/\sqrt{n}}^{+1/\sqrt{n}} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2} g(x)dx = g(0),$$

čime završavamo dokaz.

Sada možemo postaviti jaku definicije raspodjele: Raspodjela $\phi(x)$ je matematički koncept povezan sa slabom konvergencijom niza funkcija jezgri za koje integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx$$

ima smisla, pomoću formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)gx.$$

NAPOMENE

1. Svaka funkcija jezgre odgovara nekoj raspodjeli jer možemo konstruirati niz koji se sastoji samo od jedne funkcije jezgre $f(x)$.
2. Veliki raspon različitih slabo konvergentnih nizova dati će iste rezultate limesa

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)gx,$$

za sve test funkcije $g(x)$. Takvi ekvivalentni nizovi odgovaraju istoj raspodjeli.

Sljedeći nizovi su ekvivalentni, svi odgovaraju raspodjeli označenoj s θ:

a) $f_n(x) = \frac{1}{2}\, erfc(-nx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-nx}^{\infty} e^{-u^2} du,$

b) $f_n(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\pi}\right) Si(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{nx} \frac{sinu}{u} du,$

c) $f_n(x) = e^{-e^{-nx}}.$

Bilješka: Nizovi (a) i (b) konvergiraju po točkama u uobičajenu step funkciju $S(x)$; niz (c) konvergira po točkama u funkciju

$$\overline{S} = \begin{cases} 0 \ (x < 0), \\ \frac{1}{e} \ (x = 0), \\ 1 (x > 0). \end{cases}$$

S stajališta klasične teorije funkcija, funkcije $S(x)$ i $\bar{S}(x)$ su različite funkcije. Iz kuta gledanja teorije raspodjele, $S(x)$ i $\overline{S}\,(x)$ odgovaraju istoj raspodjeli $\theta(x)$ koja je definirana kroz proces ograničavanja opisan u slaboj konvergenciji.

Nizovi:

a) $f_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$,

b) $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$,

c) $f_n(x) = \frac{1-\cos nx}{n\pi x^2}$,

d) $f_n(x) = \frac{1}{n\pi}\frac{\sin^2 nx}{x^2}$,

su svi ekvivalentni, i vode na

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = g(0), \qquad \big(bilo\ koji\ g(x)\big).$$

Raspodjela definirana s bilo kojim od ovih nizova se zove delta funkcija i označava se s $\delta(x)$.

8. Usporedba funkcija i raspodjela

Neka je $\phi(x)$ raspodjela. U ovom slučaju izraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)g(x)dx,$$

nije integral (u Riemannovom smislu), nego limes niza Riemannovih integrala. Međutim, može biti ekvivalent Riemannovom integralu, ako možemo pronaći funkciju $f(x)$ (ne nužno funkciju jezgre) takvu da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx,$$

za sve test funkcije $g(x)$. Kao pravilo, ovo će se dogoditi ako niz $f_n(x)$ konvergira po točkama u neku funkciju $\mathcal{F}(x)$ koja se može uzeti kao $f(x)$. Međutim postoje iznimke ovom pravilu.

Funkcije

$$F_n(x) = \begin{cases} e^{-1/|1-4(nx-1)^2|}, & \left(\left|x-\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{2n}\right), \\ 0, & \left(\left|x-\frac{1}{n}\right| > \frac{1}{2n}\right) \end{cases}$$

su funkcije jezgre. Posvuda su derivabilne beskonačan broj puta i iščezavaju izvan intervala $(\frac{1}{2n},\frac{3}{2n})$. Normirajmo ih:

$$f_n(x) = \frac{F_n(x)}{\int_{1/2n}^{3/2n} F_n(x)dx}$$

(tako da je $\int_{1/2n}^{3/2n} f_n(x)dx = 1$). Niz funkcija $f_n(x)$ konvergira po točkama u nulu. Naravno ako je $x \leq 0$ tada $f_n(x) = 0$ $(za\ svaki\ n)$. Ako je $x > 0$, izabiremo N dovoljno velik takav da je $N > \frac{3}{2x}$. Tada je $f_n(x) = 0$ $(za\ svaki\ n \geq N)$. Primjetimo da konvergencija nije uniformna.

Niz $f_n(x)$ također slabo konvergira. Za svaku test funkciju $g(x)$ imamo, po teoremu srednje vrijednosti (primjetimo da je $f_n(x) \geq 0$),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = \int_{1/2n}^{3/2n} f_n(x)g(x)dx = g(\xi)\int_{1/2n}^{3/2n} f_n(x)dx = g(\xi), \quad \left(\frac{1}{2n} \leq \xi \leq \frac{3}{2n}\right).$$

Sada, ako je $n \to \infty$, tada ξ mora ići u nulu (s desna). Po kontinuiranosti test funkcije,

$$\lim_{\xi \to 0} g(\xi) = g(0).$$

Pokazali smo da je

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \mathcal{F}(x) = 0.$$

Tako da je

$$\int_{-}^{+} \lim_{n \to \infty} f_n(x)g(x)dx = 0 \ \ [za\ bilo\ koji\ g(x)],$$

ali

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = g(0) \ \ [za\ bilo\ koji\ g(x)].$$

Ovaj primjer pokazuje da koncept konvergencije po točkama ima jako malo smisla sa stajališta fizičara. Naravno ako funkcije $f_n(x)$ predstavaljaju uzastopne aproksimacije određene fizičke pojave, te formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$$

vrijedi cijelo vrijeme, kako je moguće pomiriti fizičku intuiciju s tvrdnjom da $f_n(x)$ „konvergira u nulu?“ Razumno je pretpostaviti, da bar za neke upotrebe, raspodjele više odgovaraju opisivanju neki fizičkih pojava nego obične funkcije.

Idemo pogledati neke probleme do kojih dolazi s prijedlogom. Kao prvo, treba zapamtiti da ne možemo pričati o vrijednosti raspodjele u bilo kojoj točci. Na primjer, ne možemo dodijeliti $\delta(x)$ nijednu vrijednost u $x = 0$. Samo po sebi ovo ne bi bilo toliko loše, ali činjenica da cijeli doprinos integralu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1,$$

dolazi točno iz $x = 0$ nije u skladu s intuicijom. Kao drugi primjer, raspodjela $\theta(x)$[koja odgovara step funkciji $S(x)$] je definirana nizom integrala

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = \int_0^{\infty} g(x)dx,$$

i to nam ne omogućava razlikovati $S(x)$ i $\bar{S}(x)$. Ekvivalento je oboma. Očito ne možemo dodijeliti $\theta(x)$ vrijednost u $x = 0$.

Dakle dali ovo svojstvo raspodjela proturječi obično pretpostavljenom svojstvu da su fizičke pojave funkcije? Možda ne. Na primjer, promotrimo mjerenje električne struje $I(t)$ koje zavisi o vremenu. Struja je mjerena ampermetrom koji ima određenu inerciju: ne može izmjeriti trenutnu promjenu struje. Ono što se zapravo mjeri nije $I(t)$ nego prosječna struja, koja će prije biti oblika

$$\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} I(\tau)d\tau,$$

za neki konačan ϵ (koliko god on bio malen). S ovog stajališta fizičke pojave vrlo teško posjeduju matematička svojstva klasičnih funkcija.

Pošto klasična svojstva funkcija točno opisuju fizičke pojave, neophodno je pokazati da raspodjele također mogu točno opisivati fizičke pojave. Drugim riječima , moramo pokazati da postoji raspodjela koju se ne može razlikovati od obične funkcije, barem od tipova korištenih u fizici. Veliki je korak u ovom smjeru napravljen sljedećim teoremom.

Teorem razmazivanja. Za svaku kontinuiranu funkciju $f(x)$ se može napraviti niz $\{f_n(x)\}$ funkcija jezgre takve da

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

za proizvoljno mali ϵ, uniformno u x unutar bilo kojeg ograničenog intervala.

Dokaz. Promatramo niz funkcija jezgre

$$U_n(x,\xi) = \begin{cases} e^{-1/|1-n^2(x-\xi)^2|}, & \left(|x-\epsilon| < \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & \left(|x-\epsilon| \geq \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$$

One će biti normirane ako ih podijelimo s integralom normiranja

$$N_n = \int_{x-1/n}^{x+1/n} \exp\left[-\frac{1}{1-n^2(x-\xi)^2}\right] d\xi = \int_{-1/n}^{+1/n} \exp\left(-\frac{1}{1-n^2\xi'^2}\right) d\xi'$$

(promjenom varijabli $\xi' = x - \xi$); Primjetimo da je N_n neovisan o $x - u$. Sada definiramo niz funkcija jezgre

$$f_n(x) = \frac{1}{N_n}\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(\xi)U_n(x,\xi)d\xi.$$

Dakako $f_n(x)$ je neograničeno derivabilan i iščezava u $x = \pm\frac{1}{n}$, zajedno sa svim svojim derivacijama.

Napomena. Ono što se radi je zapravo „razmazivanje“ funkcije $f(x)$ preko intervala $\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$ uz pomoć funkcije U_n. Ovime stvaramo neograničeno derivabilnu funkciju $f_n(x)$ iz $f(x)$ (koja možda nema takvo svojstvo) na način da je $f_n(x)$ veoma dobra aproksimacija za $f(x)$ za velike vrijednosti n.

Možemo pisati

$$f(x) = f(x)\frac{\left(\int_{x-1/n}^{x+1/n} U_n(x,\xi)d\xi\right)}{N_n} = \frac{1}{N_n}\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(x)U_n(x,\xi)d\xi,$$

i konstruirati izraz (pošto je $U_n \geq 0$)

$$|f_n(x) - f(x)| = 1/N_n \int_{x-1/n}^{x+1/n} |f(\xi) - f(x)|U_n(x,\xi)d\xi.$$

Pošto je $|x-\xi| \leq 1/n$, uvijek se može izabrati dovoljno veliki n da $|x-\xi|$ bude zanemarivo, iz čega zajedno s kontinuiranosti $f(x)$ slijedi da je

$$|f(\xi) - f(x)| < \epsilon,$$

za svaki x u proizvoljno ograničenom intervalu, sa $\epsilon - om$ proizvoljno malim. Tada je

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1/N_n \int_{x-1/n}^{x+1/n} U_n(x,\xi)d\xi = \epsilon\,,$$

kao što se i traži da bude.

Uniformna konvergencija u teoremu razmazivanja dozvoljava nam da postavimo sljedeći korolar.

Korolar. Za svaku se kontinuiranu funkciju $f(x)$ može naći ekvivalentna raspodjela $\phi(x)$ takva da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx\,,$$

za svaku test funkciju $g(x)$.

Doista, neka je $f_n(x)$ niz funkcija jezgre opisan kao u teoremu razmazivanja. Neka je $g(x)$ test funkcija; po definicija, mora iščezavati izvan nekog intervala (a,b), dakle

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]g(x)dx\right|$$
$$\leq \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]|g(x)|dx\right|.$$

Po teoremu razmazivanja, $|f_n(x) - f(x)|$ može biti proizvoljno mali za svaki x izvan intervala (a, b). Dakle

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx\right| \leq \epsilon \int_a^b |g(x)|dx = \epsilon B(b-a)\,,$$

gdje je B granica na $|g(x)|$. Pošto desnu stranu možemo učiniti proizvoljno malom tako da izaberemo dovoljno veliki n za bilo koju test funkciju $g(x)$, slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx,$$

što uspostavlja ekvivalenciju između raspodjele $\phi(x)$ (definiranu s lijeve strane gore navedene formule) i kontinuirane funkcije $f(x)$.

Napomena. Ekvivalencija $f(x)$ i $\phi(x)$ se može proširiti na funkcije kontinuirane po djelovima. Međutim, jednostavnije je te funkcije gledati kao derivacije funkcija glatkih po dijelovima i postaviti derivabilno svojstvo raspodjele.

9. Svojstva raspodjela

Raspodjele se mogu podvrgnuti različitim linearnim operacijama čestim kod običnih funkcija. Kao prvo, raspodjele se mogu dodavati i množiti s konstantama (drugim riječima, linearna kombinacija raspodjele je također raspodjela). Ovo proizlazi iz promatranja niza integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_n(x) + h_n(x)]g(x)dx$$

i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [Cf_n(x)]g(x)dx \ (C = const).$$

Ako su $f_n(x)$ i $h_n(x)$ funkcije jezgre, tada su također i funkcije

$$s_n(x) = f_n(x) + h_n(x)$$

i

$$z_n(x) = Cf_n(x),$$

funkcije jezgre.

Nadalje, nizovi $s_n(x)$ i $z_n(x)$ moraju biti slabo konvergentni ako su i nizovi $f_n(x)$ i $h_n(x)$ slabo konvergentni. Dakle, gore navedeni nizovi integrala definiraju raspodjele

$$\sigma(x) = \phi(x) + \chi(x), \qquad \xi(x) = C\phi(x),$$

gdje su $\phi(x)$ i $\chi(x)$ raspodjele koje odgovaraju $f_n(x)$ i $h_n(x)$.

Raspodjele se također mogu pomnožiti s beskonačno derivabilnim funkcijama. Pustimo da je $h(x)$ beskonačno derivabilna funkcija te da je niz $f_n(x)$ ja slabo konvergentan. Promatramo niz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [h(x) f_n(x)] g(x) dx.$$

Funkcije $y_n(x) = h(x) f_n(x)$ su funkcije jezgre. Također, gore navedeni integral mora konvergirati kako $n \to \infty$, zato što se može zapisati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) [h(x) g(x)] dx,$$

i $\overline{g}(x) = h(x) g(x)$ je očito test funkcija. Dakle možemo definirati novu raspodjelu

$$\psi(x) = h(x) \phi(x)$$

koja odgovara nizu $y_n(x)$.

Napomena. Nije moguće definirati umnožak dvije raspodjele u uobičajenom smislu. Razlog je taj što ako formiramo niz funkcija $p_n(x) = f_n(x) h_n(x)$, takav niz ne može biti slabo konvergentan i ne odgovara definiciji raspodjele. Na primjer

$$f_n(x) = h_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}.$$

Nije teško pronaći test funkciju $g(x)$ za koji integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) h_n(x) g(x) dx$$

neće konvergirati [npr. $g(x) = 1$ za $|x| < a$].

Raspodjele također dozvoljavaju linearne transformacije nezavisne varijable, ako je $\phi(x)$ raspodjela, tada su $\phi(x - a)$ i $\phi(Cx)$ također raspodjele (gdje su a i C konstante). One su definirane nizom funkcija jezgri $f_n(x - a)$ i $f_n(Cx)$ koji je slabo konvergentan zato što vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x - a) g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) g(x + a) dx$$

i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(Cx) g(x) dx = \frac{1}{|C|} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) g\left(\frac{x}{C}\right) dx, \qquad (C \neq 0),$$

pošto su $g(x + a)$ i $g(\frac{x}{C})$ test funkcije i $f_n(x)$ je slabo konvergentna.

Jedno od najvažnijih svojstava raspodjela je to da se mogu neograničen broj puta derivirati. Derivacija raspodjele $\phi(x)$ je povezana s nizom derivacija funkcija jezgre $f_n(x)$, koje slabo konvergiraju u $\phi(x)$. Da provjerimo je li ovo moguće, primjetimo da je $f_n'(x)$ funkcija jezgre ako je i $f_n(x)$ funkcija jezgre. Nadalje, parcijalnom integracijom, dobijemo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n'(x)g(x)dx = f_n(x)g(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-}^{+} f_n(x)g'(x)dx = -\int_{-}^{+} f_n(x)g'(x)dx \ ,$$

zato što $g(x)$ iščezava izvan nekog ograničenog intervala. Pošto je $g'(x)$ test funkcija (ako je i $g(x)$ također test funkcija), limes (kako $n \to \infty$) s desne strane postoji. Tada limes i s lijeve strane mora postojati. Dakle $f_n'(x)$ je slabo konvergentan za neke raspodjele koje definiramo kao derivacije $\phi(x)$ i označavamo s $\phi'(x)$. Raspodjele $\phi(x)$ i $\phi'(x)$ su povezane formulom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)g(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g'(x)dx,$$

za bilo koju test funkciju $g(x)$.

Ako je $\phi(x)$ ekvivalent nekoj derivabilnoj funkciji $f(x)$, tada se može pokazati da je $\phi'(x)$ ekvivalent $f'(x)$. Pretpostavimo da $\phi'(x)$ nije posvuda derivabilna. Pretpostavimo da je $f(x)$ kontinuirana i po djelovima glatka. Idemo istražiti u kojem smislu $\phi'(x)$ proširuje definiciju derivacije $f'(x)$ u onim točkama u kojima derivacija ne postoji u klasičnom pogledu. Kao prvo $\phi'(x)$ ne definira $f'(x)$ u bilo kojoj točci: Raspodjela nema vrijednost u točci. Ono što i dalje vrijedi je da raspodjela može biti ekvivalent funkciji u području oko neke točke, neka je $x = \xi$. Ovo je pokazano na sljedeći način: Neka je $\overline{g}(x)$ test funkcija, različita od nule samo u području oko točke ξ, u intervalu $(\xi - e, \xi + e)$. Sada, ako za funkciju $f(x)$ i raspodjelu $\phi(x)$ vrijedi da

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \phi(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f(x)\overline{g}(x)dx,$$

za sve funkcije $\overline{g}(x)$ opisanog tipa, tada kažemo da je $\phi(x)$ ekvivalent $f(x)$ u okolini točke ξ. Ako je $f(x)$ kontinuirana na intervalu $(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$, tada možemo konstruirati $\phi(x)$ koristeći korolar teoremu razmazivanja.

Sada možemo pokazati da ako su $\phi(x)$ i $f(x)$ ekvivalenti u $x = \xi$ i ako $f'(\xi)$ postoji, da su tada $\phi'(x)$ i $f'(x)$ također ekvivalenti u $x = \xi$. Naravno ako $\overline{g}(x)$ iščezava izvan $(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$, tada i $\overline{g}'(x)$ iščezava. Za sve takve $\overline{g}(x)$ imamo,

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \phi'(x)\overline{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)\overline{g}(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\overline{g}'(x)dx = -\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \phi(x)\overline{g}'(x).$$

Međutim, isto se odnosi i na $f'(x)$, čime dobijemo

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f'(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f(x)\overline{g}'(x)dx.$$

Dakle

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \phi'(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f'(x)\overline{g}(x)dx,$$

čime uspostavljamo jednakost između $\phi'(x)$ i $f'(x)$ u $x = \xi$.

Što je s onim točkama ξ u kojima ne postoji $f'(\xi)$? Pošto je $f(x)$ po djelovima glatka, $f'(x)$ mora biti nekontinuirana u $x = \xi$, i mora je se moći iskazati(u dovoljno maloj okolini oko ξ) s

$$f'(x) = f_1(x) + hS(x-\xi), \qquad (x \neq \xi),$$

gdje je $f_1(x)$ kontinuirana a h konstanta. Pošto $\phi'(x)$ mora pratiti $f'(x)$ za $x \neq \xi$, mora biti zadovoljena jednakost

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \phi'(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} [f_1(x) + hS(x-\xi)]\overline{g}(x)dx,$$

za sve prikladne $\overline{g}(x)$. Ova jednakost jedinstveno definira $\phi'(x)$ i izjednačava je s nekontinuiranom funkcijom

$$f_1(x) + hS(x-\xi).$$

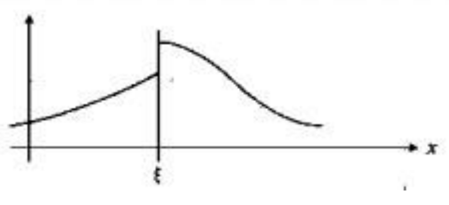
Primjetimo da nema razlike kako je $S(x-\xi)$ definirana u $x = \xi$, zato što to ne mijenja vrijednost integrala

$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} [f_1(x) + hS(x-\xi)]\overline{g}(x)dx.$$

Iz ove analize vidimo da raspodjele mogu predstavljati nekontinuirane funkcije (barem one sa skokovitim nekontinuiranostima).

Pošto je derivacija distribucije dobro definirana bez ikakvih ograničenja, slijedi da se „raspodjela s skokovitim nekontinuiranostima," kao $\phi'(x)$ gore, također može derivirati. Neka je $\psi(x)$ jednaka, u okolini točke ξ, nekontinuiranoj funkciji tipa

$$y(x) = u(x) + hS(x-\xi),$$



Slika 10. Skok funkcije

gdje je $u(x)$ derivabilna na intervalu $(\xi-\epsilon, \xi+\epsilon)$ osim u točki $x = \xi$. Takva funkcija je prikazana na slici 10.

Neka je $\theta(x-\xi)$ raspodjela koja odgovara $S(x-\xi)$. Tada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x-\xi)g(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-\xi)g'(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} S(x-\xi)g'(x)dx$$
$$= -\int_{\xi}^{\infty} g'(x)dx = -g(x)|_{\xi}^{\infty} = g(\xi).$$

Iz poglavlja gdje smo pisali o slaboj konvergenciji sljedi da $\theta'(x-\xi)$ odgovara delta nizu, te $\theta'(x-\xi) = \delta(x-\xi)$. Iz čega sljedi da je izraz raspodjela $\psi'(x)$

$$\psi'(x) = u'(x) + h\delta(x-\xi),$$

gdje je izraz za $u'(x)$

$$u'(x) = u_1(x) + kS(x-\xi) \;\; (k = const.),$$

$u_1(x)$ je neka kontinuirana funkcija u području $(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$.

Ova analiza postavlja pravilo: Kada je raspodjela s skokovitim nekontinuiranostima derivirana, svaka nekontinuiranost u $x = \xi$ visine h (visina skoka) daje rezultat $h\delta(x-\xi)$ u izrazu za derivaciju.

Pošto je raspodjela derivabilna, može se postaviti zahtjev da zadovoljava diferencijalne jednadžbe. Zbog linearnog karaktera teorije raspodjele, diferencijalne jednadžbe koje zadovoljavaju, po pravilu moraju biti linearne, oblika $\mathcal{L}y = f$, gdje je $\mathcal{L}$ linearni diferencijalni operator s beskonačno derivabilnim koeficijentima.

Pretpostavimo da je f istinska funkcija. Tada se gornja diferencijalna jednadžba može gledati kao „klasična“ diferencijalna jednadžba (za funkcije) ili kao diferencijalna jednadžba za raspodjele. Bez da idemo u detalje, predstaviti ćemo neka svojstva kada na nju gledamo kao na diferencijalnu jednadžbu raspodjele.

Ako diferencijalna jednadžba nema ograničen broj točaka singulariteta, tada se može pokazati da nema drugih rješenja (u prostoru raspodjela) osim „klasičnih rješenja.“ Diferencijalna jednadžba

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

ima, u prostoru raspodjela, općenito rješenje

$$y(x) = C = const.$$

Prisustvo singulariteta u diferencijalnoj jednadžbi može dovesti do čudnih situacija.
Promotrimo jednadžbu

$$x\frac{dy}{dx} = 0;$$

za $x > 0$, $y(x)$ mora biti konstanta. Isto vrijedi i za za $x < 0$. Međutim ta konstanta ne mora biti ista. Naravno, „step funkcija“ raspodjele $y(x) = \theta(x)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu zato što je $\theta'(x) = \delta(x)$ i $x\delta(x) = 0$. Do sada što se tiče raspodjela, naša diferencijalna jednadžba ima 2 linearno neovisna rješenja, $y_1(x) = 1$ i $y_2(x) = \theta(x)$, općenito rješenje je $y(x) = C_1 + C_2\theta(x)$. Diferencijalna jednadžba nema derivacije u $x = 0$. Takav se nedostatak ne može dogoditi i raspodjeli.

Primjer 2. Promatramo jednadžbu $x^2 \frac{dy}{dx} = -y$.

Ima klasično rješenje $y(x) = 0$ koje je također raspodjela. Ima i klasično rješenje

$$y(x) = Ce^{1/x}\ (C \neq 0).$$

Međutim, ovo rješenje ne može proći kao raspodjela. Ne možemo pronaći ni jedan niz funkcija jezgre koji je ekvivalent s $Ce^{1/x}$ za $x \neq 0$ i koji je konvergentan. Najčešće i najvažnije diferencijalne jednadžbe ovog tipa su oblika

$$\mathcal{L}y = \delta(x - \xi).$$

10. Redovi i nizovi raspodjela

U mnogim primjenama moramo se koristiti s redovima raspodjela $\phi_m(x)$ $(m = 1,2, \dots)$ ili, generalno, s raspodjelama ϕ_μ ovisnih o parametru μ. Red $\{\phi_m(x)\}$ raspodjela je konvergentan ako postoji raspodjela $\phi(x)$ takva da vrijedi

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(x)g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx,$$

ili općenitije,

$$\lim_{\mu\to\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\mu(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx,$$

za sve test funkcije $g(x)$. Tada po definiciji pišemo,

$$\phi(x) = \lim_{\mu\to\mu_0} \phi_\mu(x)$$

i $\phi(x)$ zovemo limesom niza $\{\phi_\mu(x)\}$.

Funkcije $\{\cos mx\}$ se također mogu promatrati kao raspodjele. U ovom smislu one stvaraju konvergentan red kako $m \to \infty$. Neka je $g(x)$ proizvoljna test funkcija. Tada ona mora iščezavati izvan nekog intervala (a, b) i mora biti ograničena unutar tog intervala:

$$|g(x)| \leq B\ \ (a \leq x \leq b).$$

Tada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos mx \cdot g(x)dx = \int_{a}^{b} \cos mx \cdot g(x)dx = \frac{\sin mx}{m} g(x)\Big|_{a}^{b} - \frac{1}{m}\int_{a}^{b} \sin mx \cdot g'(x)dx.$$

Sada, $g(a) = g(b) = 0$, dok je

$$\left|\int_{a}^{b} \sin mx \cdot g'(x)dx\right| \leq B(b-a).$$

Kako $m \to \infty$, desna se strana jednadžbe približava nuli. Dakle, red raspodjela $\{\cos mx\}$ konvergira prema nuli. Primijetimo da red funkcija $\{\cos mx\}$ ne konvergira u ništa; to je divergentan red. Ovdje očito imamo različite definicije konvergencije. Za nizove, ovaj je koncept proširenje slabe konvergencije funkcija (za razliku od konvergencije po točkama), red funkcija $\{cos\ mx\}$ slabo konvergira (prema nuli).

Teorem. Ako $\phi(x) = \lim_{\mu \to \mu_0} \phi_\mu(x)$, tada

$$\phi'(x) = \lim_{\mu \to \mu_0} \phi'_\mu(x).$$

Dokaz. Sjetimo se da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)g(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g'(x)dx.$$

Dakle

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'_\mu(x)g(x)dx = -\lim_{\mu \to \mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\mu(x)g'(x)dx =$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g'(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)g(x)dx,$$

time je dokaz završen.

Ovo nam svojstvo raspodjela uvelike olakšava razne analitičke operacije. Takvo svojstvo uglavnom ne vrijedi za obične funkcije. Na primjer, red funkcije $f_m(x) = \frac{\sin mx}{m}$ konvergira u nulu kako se $m \to \infty$,

$$\lim_{m \to \infty} f_m(x) = f(x), \text{ gdje je } f(x) = 0.$$

Svaka funkcija $f_m(x)$ je derivabilna, ali red derivacija, $f'_m(x) = \cos mx$ je divergentan. Primijetimo kako je derivacija $f(x)$ nula.

Konvergencija se nizova raspodjela može definirati s konvergencijom redova parcijalnih suma. Na primjer, dane su raspodjele $\psi_k(x), k = 1,2,3, \dots$), formiramo red parcijalnih suma:

$$\sigma_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \psi_k(x) \quad (m = 1,2,3 \dots).$$

Ako ovaj red konvergira u neku raspodjelu $\sigma(x)$, kažemo da

$$\sigma(x) = \lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x).$$

Takav se red može parcijalno derivirati. Naravno iz

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = \sigma(x),$$

sljedi da je

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m'(x) = \sigma'(x).$$

Međutim,

$$\sigma_m'(x) = \sum_{k=1}^{m} \psi_k'(x).$$

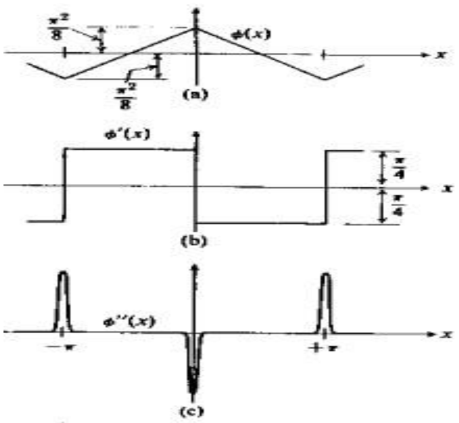
Dakle

$$\sigma(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \psi_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k'(x).$$

Želimo pokazati da se niz $\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos kx$, koji je u običnom pogledu divergentan, može promatrati kao raspodjela.

Promotrimo niz $\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (\frac{1}{k^2}) \cos kx$, ovaj nizu u običnom pogledu uniformno konvergira i predstavlja periodičnu funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{\pi x}{4}, & -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{\pi x}{4}, & 0 \le x < \pi, \\ f, & x + 2n\pi \;\; inače \end{cases} \quad n \in N.$$



Slika 11.

Možemo povezati $f(x)$ s raspodjelom $\phi(x)$ koja je jednaka $f(x)$ (u području oko točke x). Takva se raspodjela može promatrati kao suma gore navedenih nizova unutar prostora raspodjela.

$$\phi(x) = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}\right) \cos kx.$$

Slika 11 a) predstavlja grafički ili $\phi(x)$ ili $f(x)$.

Niz za $\phi(x)$ možemo parcijalno derivirati i dobijemo

$$\phi'(x) = -\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) \sin kx,$$

predstavljajući raspodjelu

$$\phi'(x) = \begin{cases} +\frac{\pi}{4} \;\; (-\pi \leq x < 0), \\ -\frac{\pi}{4} \;\; (0 \leq x < \pi), \\ \phi'(x + 2n\pi) \;\; inače \end{cases}$$

pokazanu u slici 11 b).

Primijetimo da se $\phi'(x)$ također podudara s $f'(x)$. Derivirajući još jednom, dobijemo

$$\phi''(x) = -\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \cos kx,$$

što ima smisla samo unutar okvira prostora raspodjela. Možemo reći da

$$\phi''(x) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right)[\delta(x+\pi) - \delta(x)] \;\; \left(-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right), \\ \phi''(x + 2n\pi) \;\; inače. \end{cases}$$

Ova je raspodjela pokazana shematski na slici 11 c).

Iz ovog primjera trebalo bi biti jasno da svaki trigonometrijski niz

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

bilo konvergentan ili divergentan, možemo promatrati kao raspodjelu ali pod uvjetom da $k \to \infty$, a koeficijenti a_k i b_k ne rastu brže nego neki proizvoljan eksponent k^N (gdje je N proizvoljan, ali konstantan),

$$|a_k| \leq Ak^N \;\; |b_k| \leq Bk^N \;\; (A, B = const.).$$

Naravno, osim izraza $a_0/2$, takav niz se može dobiti deriviranjem niza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k^{N+2}} \cos kx + \frac{b_k}{k^{N+2}} \sin kx\right)$$

$N + 2$ puta. Međutim, ovaj zadnji niz očito konvergira u neku funkciju $f(x)$, iz koje se tada izvodi odgovarajuća raspodjela $\phi(x)$. Originalni niz je tada (osim $\frac{a_0}{2}$) $(N + 2) - a$ derivacija $\phi(x)$.

Iz ovih razmatranja slijedi da se praktički svaki Fourierov red, koji se pojavljuje u fizičkim primjenama, može promatrati kao raspodjela. Od teorijskog interesa je suprotni problem, kako proširiti danu raspodjelu $\phi(x)$ u Fourierov red? Naravno, ako je $\phi(x)$ ekvivalent nekoj po dijelovima glatkoj funkciji $f(x)$, tada se ovo može napraviti koristeći običnu formulu (u kompleksnoj formi): Ako je

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{i\frac{m\pi x}{L}} \quad (-L \leq x \leq L),$$

Tada je

$$c_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(x) e^{-i\frac{m\pi x}{L}} dx.$$

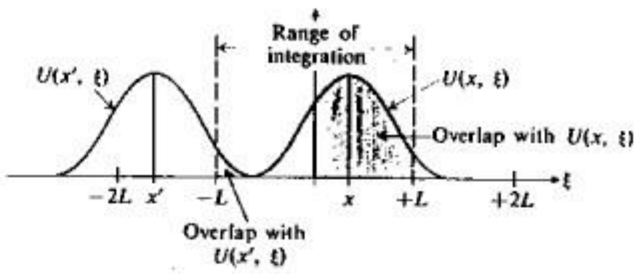
Da bi smo primijenili ovaj pristup nekoj drugoj vrsti raspodjele, moramo imati na umu da Fourierov red istinski može predstavljati samo periodične funkcije, u tom se slučaju integral za c_m može odrediti proizvoljnim intervalom dužine 2L. Dakle samo se samo periodične raspodjele mogu proširiti u Fourierov red. Pod takvim raspodjelama mislimo na raspodjele koje se mogu napraviti nizom periodičnih funkcija jezgre, tj. Funkcije koje zadovoljavaju

$$f_n(x) = f_n(x + 2kL) \quad k \in N.$$

Napravimo niz integrala

$$c_{mn} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f_n(x) e^{-i\frac{m\pi x}{L}} dx$$

i potražimo limes kako $n \to \infty$ kako bi dobili c_m. Međutim, nije toliko očito da limes postoji čak i ako je $\{f_n(x)\}$ slabo konvergentan. Primjetimo da su granice integracije drugačije nego $\pm\infty$ i da $e^{-i\frac{m\pi x}{L}}$ nije test funkcija.



Slika 12. Granice integracije

Ova ćemo riješiti na sljedeći način: Promatramo funkciju

$$u(x) = \frac{1}{N}\int_{-L}^{+L} U(x,\xi) d\xi,$$

gdje je

$$U(x,\xi) = \begin{cases} e^{-\frac{L^2}{|L^2-(x-\xi)^2|}}, & (|x-\xi| < L), \\ 0, & (|x-\xi| > L), \end{cases}$$

i

$$N = \int_{x-L}^{x+L} U(x,\xi)d\xi = \int_{-L}^{+L} U(0,\xi)d\xi.$$

Test funkcija $u(x)$ je jednaka nuli za $x < -2L$ i za $x > 2L$ zato što se dijelovi gdje je $U(x,\xi)$ drugačija od nule ne poklapaju sa područjem itegracije $(-L, L)$. Za $-2L \leq x \leq 2L$ postoji djelomično preklapanje kao što je pokazano na slici 12; iz te slike vidi se da se $u(x)$ može izračunati za $0 \leq x \leq 2L$ s formulom

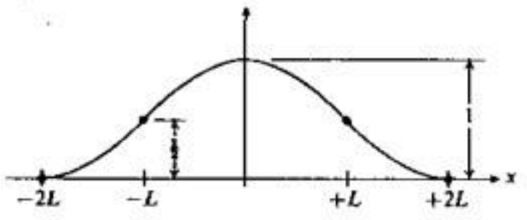
$$u(x) = \frac{1}{N}\int_{x-L}^{L} e^{-\frac{L^2}{|L^2-(x-\xi)^2|}}d\xi \quad (0 \leq x \leq 2L)$$

i za $-2L \leq x \leq 0$ s formulom

$$u(x) = \frac{1}{N}\int_{-L}^{x+L} e^{-\frac{L^2}{|L^2-(x-\xi)^2|}}d\xi \quad (-2L \leq x \leq 0).$$

Funkcija $u(x)$ je shematski prikazana na slici 13 i posjeduje važno svojstvo $u(x) + u(x-2L) = 1$ za $0 \leq x \leq 2L$. Da ovo provjerimo, neka je $x' = x - 2L$ tako da $-2L \leq x' \leq 0$ i

$$u(x') = \frac{1}{N}\int_{-L}^{x'+L} e^{-\frac{L^2}{|L^2-(x\prime-\xi)^2|}}d\xi.$$



Slika 13. Funkcija $u(x)$

Zamijenimo x' sa $x - 2L$, i dobijemo

$$u(x-2L) = \frac{1}{N}\int_{-L}^{x-L} e^{-\frac{L^2}{|L^2-(x-2L-\xi)^2|}}d\xi.$$

Sada mijenjamo varijablu $\xi = \xi' - 2L$,

$$u = (x-2L) = \frac{1}{N}\int_{L}^{x+L} e^{-\frac{L^2}{L^2-(x-\xi)^2}}d\xi = \frac{1}{N}\int_{x-L}^{x+L} e^{-\frac{L^2}{L^2-(x-\xi)^2}}d\xi - \frac{1}{N}\int_{x-L}^{L} e^{-\frac{L^2}{L^2-(x-\xi)^2}}d\xi$$
$$= 1 - u(x),$$

kao što je bilo i pretpostavljeno.

Funkcija $u(x)$ nam dopušta da prikažemo integral

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f_n(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx$$

u takvom obliku da se uspostavi konvergencija. Promatramo integral

$$\frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)u(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx.$$

Ovaj integral mora imati limes kada $n \to \infty$ ako je $\{f_n(x)\}$ slabo konvergentan red, pošto je $u(x)e^{-i(\frac{m\pi x}{L})}$ test funkcija. Zbog svojstava funkcije $u(x)$, ovaj se integral može ograničiti na interval $(-2L, +2L)$, i možemo pisati

$$\frac{1}{2L}\int_{-2L}^{+2L} f_n(x)u(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx = \frac{1}{2L}\int_{-2L}^{0} f_n(x)u(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}} + \frac{1}{2L}\int_{0}^{2L} f_n(x)u(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx.$$

Sada ubacimo $x = \xi - 2L$ u prvi integral; ako je $f_n(x)$periodična, tada

$$\frac{1}{2L}\int_{-2L}^{0} f_n(x)u(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx = \frac{1}{2L}\int_{0}^{2L} f_n(\xi)u(\xi - 2L)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}d\xi.$$

Koristeći to s drugim integralom i koristeći $u(x - 2L) + u(x) = 1$, dobijemo

$$\frac{1}{2L}\int_{-2L}^{+2L} f_n(x)u(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx = \frac{1}{2L}\int_{0}^{2L} f\_n(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}\,dx.$$

Međutim, po periodičnosti $f_n(x)$, ovo je integral c_{mn} koji smo ranije definirali. Dakle dokazali smo da

$$\lim_{n\to\infty} c_{mn} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f_n(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx\,,$$

postoji za slabo konvergentan red periodičnih funkcija jezgre, i proširili smo definiciju Fourierovih koeficijenata u prostor raspodjela.

11. Raspodjele u N dimenzija

Koncept raspodjele se može proširiti na dvije i više dimenzija. Samo ćemo okvirno opisati potrebne promjene, i ograničiti se na dvije dimenzije. Za test funkcije, treba izabrati funkcije koje iščezavaju izvan nekog konačnog područja u ravnini Ω i imaju parcijalne derivacije svih redova. Funkcije jezgre trebaju imati samo drugo svojstvo.

Funkcija

$$g(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-r^2}}, & (|r| < a), \\ 0\,, & (|r| \geq a), \end{cases}$$

gdje je $r^2 = x^2 + y^2$, je test funkcija (i funkcija jezgre također). Kao i jednodimenzionalni partner, može se opsežno koristiti u teorijskim razmatranjima. Raspodjele su definirane s limesom

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x,y) g(x,y) dxdy.$$

Delta funkcija se može definirati nizom:

$$f_n(x,y) = \frac{n^2}{\pi} e^{-n^2(x^2+y^2)},$$

i obično se označava s $\delta(r)$, $\delta(x,y)$, ili nekada s $\delta(x)\delta(y)$; ova je posljednja izvedba jako korisna ako se test funkcija može faktorizirati:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r) g_1(x) g_2(y) dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) g_1(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) g_2(y) dy = g_1(0) g_2(0).$$

Parcijalne derivacije raspodjele $\phi(x,y)$ se mogu definirati na sličan način kao i za jednu dimenziju. Vrijedi da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} g(x,y) dxdy = -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x,y) \partial g(x,y)}{\partial x} dxdy.$$

Od velike koristi u primjeni je rezultat korištenja Laplaceovog diferencijalnog operatora

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

na raspodjelu $\phi(x,y)$. Na primjer, može se pokazati da je

$$\delta(r) = -\frac{1}{2\pi} \nabla^2 \log\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

gdje se na $\log\left(\frac{1}{r}\right)$ gleda kao na raspodjelu.

12. Zaključak

U ovom radu smo uveli novu vrstu „funkcije“ koja zapravo to nije. Raspodjela se može ponašati kao obična funkcija i može veoma dobro opisivati fizičke pojave. Možemo je derivirati i podvrgavati određenim zahtjevima. Veoma je korisna primjena δ – funkcije, u rješavanju određenih diferencijalnih jednadžbi i promatranja fizikalnih zakona.

13. Literatura

[1] Eugene Butkov, Mathematical physics.
URL: http://www.uic.unn.ru/~krnv100/pub/physics/butkov_mathematical-physics.pdf
[2] Zvonimir Glumac, Matematičke metode fizike kratak uvod.
URL: http://gama.fizika.unios.hr/~zglumac/ummf.pdf
[3] Željа Salinger, Laplaceova transformacija završni rad
URL: http://www.mathos.unios.hr/~zsalinge/Laplace.pdf